

VOLUMEN 1
4ª EDICION

El Método de los Elementos Finitos
FORMULACION BASICA Y PROBLEMAS LINEALES

Zienkiewicz - Taylor

VOLUMEN 1

El Método de los Elementos Finitos

FORMULACION BASICA Y PROBLEMAS LINEALES

O. C. Zienkiewicz - R. L. Taylor

4ª EDICIÓN



CIMNE

El Método de los Elementos Finitos
Cuarta Edición

Volumen 1
Formulación básica y problemas lineales

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Cuarta Edición

Volumen 1: Formulación básica y problemas lineales

O.C. Zienkiewicz, FRS
Profesor emérito de la Universidad de Gales, Swansea

R.L. Taylor
Universidad de California, Berkeley

Traducción al castellano
Miguel Cervera Ruiz
Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra
Profesores de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España

McGraw-Hill

MADRID · BUENOS AIRES · CARACAS · GUATEMALA · LISBOA · MEXICO
NEW YORK · PANAMA · SAN JUAN · SANTA FE DE BOGOTA · SANTIAGO · SAO PAULO
AUCKLAND · HANBURGO · LONDRES · MILAN · MONTREAL · NUEVA DELHI · PARIS
SAN FRANCISCO · SIDNEY · SINGAPUR · ST. LOUIS · TOKIO · TORONTO

CIMNE

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingenería
Barcelona, España

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS. Cuarta edición, Volumen 1

McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S.A.
Edificio OASIS-A, planta 1ª
Basauri, 17
28023 Aravaca (Madrid)

Edificio C1, Campus Norte UPC
Gran Capitán s/n
08034 Barcelona, España

Traducido de la cuarta edición en inglés de
FINITE ELEMENT METHOD Volume 1. Fourth edition

ISBN: 84-481-0177-4 (Vol. I)
ISBN: 84-481-0178-2 (Obra completa)
Depósito Legal: B-36149-93

Editor:Mariano J. Norte
Cubierta Felix Piñuela, Grafismo electrónico
Compuesto en CIMNE por L. Ballivián y L. Puccio

Imprime: Artes Gráficas Torres S.A.
Morales 17, 08029 Barcelona.

IMPRESO EN ESPAÑA-PRINTED IN SPAIN

Este libro ha sido impreso en papel ecológico blanqueado sin cloro

A
Nuestras Familias

ÍNDICE

PRÓLOGO DE LA EDICIÓN ESPAÑOLA

Catorce años han transcurrido desde que apareciera la versión castellana de la tercera edición del libro *The Finite Element Method* escrito por el Prof. O. C. Zienkiewicz desde el Dpt. of Civil Engineering del University College of Swansea en tierras del País de Gales. Mucho ha cambiado desde esa fecha en el mundo de la ciencia en relación con la investigación y aplicaciones del método de los elementos finitos (MEF).

Si por entonces el MEF era una técnica totalmente minoritaria entre los investigadores de las universidades hispanas y sólo utilizada para estudiar problemas muy especiales por empresas altamente tecnificadas, hoy en día el MEF es una herramienta sumamente extendida y empleada tanto en la investigación y desarrollo en la mayor parte de los ámbitos científicos y tecnológicos de habla hispana, como por numerosos sectores productivos preocupados por la mejora de la calidad de sus productos y procesos. Así no es extraño encontrar aplicaciones del MEF en áreas tan lejanas entre sí como el diseño estructural, campo en el que el MEF se desarrolló originalmente y del que se nutrió de múltiples conceptos físicos, y la meteorología en donde se resuelven actualmente los problemas de simulación numérica quizás de mayor tamaño.

Esta circunstancia ha sido fruto de una serie de coincidencias favorables. Entre ellas hay que citar el esfuerzo de las Universidades y Centros de Investigación en los países de habla hispana, tanto en la formación de investigadores en el área de la simulación numérica como en la difusión de las ventajas de los métodos numéricos en el mundo industrial, que en su continuo progreso ha ido requiriendo análisis por ordenador cada vez más precisos y eficientes.

Fruto de este esfuerzo se ha ido generando una masa crítica de "expertos" en métodos numéricos en todo el mundo hispánico, que desarrolla una constante actividad en múltiples campos científico-técnicos con frecuentes reuniones y congresos relacionados con los métodos numéricos y sus aplicaciones, celebrados en España o en algún otro país de lengua española. Asimismo, la creación de centros nacionales o regionales relacionados con esta especialidad, tales como la Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería (SEMNI), la Asociación Argentina de Mecánica Computacional (AMCA), la Asociación Iberoamericana de Mecánica Computacional, así

como diversas asociaciones de matemática aplicada a la industria han contribuido al gran avance del MEF en al ámbito hispano. Todas las personas relacionadas con estos grupos celebrarán con toda seguridad la aparición de este texto.

El contenido del libro es excelente y ofrece una completa panorámica de las posibilidades del MEF en prácticamente todos los campos científico-técnicos. El temario de cada capítulo se ha actualizado y ampliado y eso explica la inevitable división en dos volúmenes que serán de obligada consulta para los interesados en el MEF y sus aplicaciones.

No puedo acabar estas líneas sin agradecer al profesor Zienkiewicz su constante apoyo a la comunidad numérica hispana durante estos últimos años a través de sus estancias anuales en el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), como Catedrático UNESCO de Métodos Numéricos en Ingeniería de la Universidad Politécnica de Cataluña. Fue precisamente durante una de dichas estancias cuando surgió la idea de esta publicación.

Muchas gracias también en nombre del CIMNE a todo el equipo que ha intervenido en la edición de este texto. En primer lugar al Dr. Miguel Cervera Ruiz por su importante labor coordinadora, así como por la traducción de todos los nuevos contenidos de esta cuarta edición, y a las Sras. Lorena Ballivián y Laura Puccio por su excelente trabajo en la escritura del texto en TEX.

Finalmente quiero agradecer también la colaboración prestada por McGraw–Hill/Interamericana de España para la edición en castellano de esta obra.

Barcelona, Septiembre de 1993

Eugenio Oñate Ibáñez de Navarra

– Catedrático de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la Universidad Politécnica de Cataluña

– Director del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería

PRÓLOGO

Hace ya más de veinte años desde que se publicó por primera vez *"The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics"*. Este libro, que fue el primero en tratar el método de los elementos finitos, sirvió de base para muchos desarrollos posteriores. La expansión de la investigación y el campo de aplicación de los elementos finitos llevó a la segunda edición en 1971 y a la tercera en 1977. El tamaño de cada uno de estos volúmenes creció geométricamente (de 272 páginas en 1967, 521 páginas en 1971, a 787 páginas en 1977). Esto fue necesario para hacerle justicia a un campo de aplicación profesional e investigación en rápida expansión. Aún así, fue preciso filtrar los contenidos de la tercera edición para mantenerla dentro de límites razonables.

Como, en esencia, los temas publicados en la tercera edición son todavía válidos hoy, y esto constituye un libro de texto y de referencia útil y ampliamente utilizando, hemos decidido publicar una *versión extendida* en dos volúmenes. Éstos mantienen en la medida de lo posible los contenidos de la tercera edición y añaden o reinterpretan temas que han adquirido hoy una importancia adicional.

La división de los contenidos entre los dos volúmenes sigue los fines pedagógicos para los que puede utilizarse el libro, bien para estudio personal, tal como pensamos que será ampliamente empleado por los ingenieros, o bien en cursos universitarios para ingenieros y físicos. Por tanto, el primer volumen se dedica a los conceptos básicos de aproximación por elementos finitos y a cálculos sencillos, lineales y estáticos, que incluso hoy constituyen la mayor parte del uso de los elementos finitos.

Hemos relegado al segundo volumen todos los problemas de dinámica, de técnicas de solución no-lineales, y ciertamente, los problemas lineales de placas y láminas que introducen dificultades especiales y donde todavía se debaten las técnicas óptimas.

Los contenidos del primer volumen están ligeramente reordenados respecto a los de la tercera edición, y los primeros ocho capítulos tratan problemas de elasticidad lineal que para muchos son aún la esencia de la aplicación del método de los elementos finitos. El Capítulo 9 generaliza los conceptos y muestra el método y su aplicación a la solución de problemas gobernados por ecuaciones diferenciales. En los primeros capítulos hay pocos

cambios respecto a la tercera edición, pero el texto se ve ampliado por la adición de las funciones de forma jerárquicas (Capítulo 7), de los elementos infinitos (Capítulo 8), y la notación tensorial para aquéllos que la prefieren (Capítulo 6).

El Capítulo 10 muestra las aplicaciones a varios problemas de campo y también se presenta con mínimos cambios. Sin embargo, los Capítulos 11 a 14 introducen nueva materia que hoy es objeto de creciente actividad.

En el Capítulo 11 se amplía sobre el "test de la parcela" al que sólo se hacía breve referencia en ediciones anteriores. Se demuestra cómo se puede utilizar el test para combrobar, y de hecho diseñar, nuevos elementos.

Los Capítulos 12 y 13 presentan la esencia de las "formulaciones mixtas" y muestran cómo tales formulaciones se pueden usar de forma eficiente en muchos problemas. En particular, se discuten en detalle temas tales como la imposición de la condición de incompresibilidad, de gran interés en problemas de mecánica estructural y de fluidos.

El Capítulo 14 introduce al lector en la nueva área de la estimación de error y la adaptabilidad, que surgió después de la aparición de la tercera edición y que hoy es de vital importancia para asegurar la precisión de los cálculos.

La aplicación del método de los elementos finitos depende del uso habilidoso de los ordenadores y de técnicas eficientes de programación. El capítulo que concluye el libro, Capítulo 15, incluye mucha de la experiencia en programación de la Universidad de California en Berkeley, y el Instituto de Métodos Numéricos en Ingeniería de Universidad de Gales, en Swansea. El programa que se presenta no es sólo útil para educación, sino que puede ser eficientemente empleado para la solución de problemas reales en varios sistemas de ordenadores y microordenadores.†

Aunque muchos de los desarrollos presentados en este libro han sido hechos por matemáticos, hemos tratado de presentar los temas en un lenguaje y forma accesible para los ingenieros, aunque intentando mantener el necesario rigor en todos los casos.

OCZ y RLT

† Se pueden obtener diskettes y cintas con el listado completo del programa pidiéndolo a R.L . Taylor, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley CA 94720, USA.

AGRADECIMIENTOS

A los muchos amigos de alrededor del mundo en este campo que, compartiendo el entusiasmo de los autores, han contribuido a través de discusiones y su propia investigación a muchas de las ideas que aquí se presentan.

A los colegas y estudiantes de investigación de Swansea, sin cuyo esfuerzo este libro no hubiera podido escribirse.

A las innumerables instituciones que financian estudiantes e investigación. Gracias especialmente a Peter y Jackie Bettes por su colaboración científica y por el trabajo espléndido en hacer que el índice temático de esta edición fuese más útil para el lector.

Debemos dar las gracias también a muchos socios industriales —sea en ingeniería civil, mecánica o aeronaútica— por proporcionar muchos de los problemas interesantes. Sus necesidades se convirtieron en una actividad ciertamente grata para nosotros.

Finalmente, muchas gracias a nuestras esposas por su ayuda y paciencia en las numerosas ocasiones en las que la tarea de escribir nuestro trabajo con los elementos finitos se convirtió en una preocupación que absorbía todo nuestro tiempo.

O.C. Zienkiewicz *R.L. Taylor*

LISTA DE SÍMBOLOS

Como referencia, se ofrece a continuación una lista de los símbolos principales utilizados en este libro, aunque todos se definen en el texto a medida que aparecen. En muchas ocasiones se han de utilizar otros adicionales para operaciones secundarias y puede que se repita el mismo símbolo. Se espera que la explicación correspondiente en el texto evitará cualquier confusión.
Los símbolos se listan aproximadamente según el orden de su aparición a través de los capítulos.
Las matrices y las columnas se expresan por letras negritas, por ejemplo $\mathbf{K}$, $\mathbf{a}$; $\mathbf{K}^T$ indica la traspuesta de $\mathbf{K}$. Los puntos se utilizan para indicar diferenciación respecto de una variable, por ej., $\frac{d}{dt} \equiv \dot{\mathbf{a}}$, etc.

Capítulo	*Símbolo*	
1	$\mathbf{a}_i$, $\mathbf{a}$	desplazamientos nodales o globales parámetros de problemas discretos
	$\mathbf{q}_i^e$	fuerza nodal en i debida al elemento e
	$\mathbf{K}^e$, $\mathbf{K}$	matriz de rigidez (elemento/global)
	$\mathbf{f}_{pi}^e$	fuerza nodal del elemento en i debida a p, etc.
	$\mathbf{r}_i$	fuerza nodal exterior
	$\boldsymbol{\sigma}$	tensión (vector columna)
	$\mathbf{L}$, $\mathbf{T}$	matrices de cambio de ejes
	$\mathbf{b}$	otros parámetros
2, 3, 4, 5	$\mathbf{u}$	vector de desplazamientos (componentes u, v y w)
	$\hat{\mathbf{u}}$	aproximación de $\mathbf{u}$
	$\boldsymbol{\varepsilon}$	deformación (vector columna)
	$\mathbf{S}$	operador de deformaciones
	$\mathbf{N}$	función de forma (de desplazamientos)
	$\mathbf{B} = \mathbf{LN}$	función de forma de deformaciones
	$\mathbf{D}$	matriz de rigidez elástica
	$\mathbf{b}$	fuerzas másicas (vector columna)
	E	módulo de Young
	ν	coeficiente de Poisson
	$\boldsymbol{\varepsilon}_0$, $\boldsymbol{\sigma}_0$	deformación o tensión inicial

	$\delta\boldsymbol{\varepsilon}, \delta\mathbf{u}$ etc.	variación virtual de $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{u}$, etc.
	$\mathbf{t}$	fuerza de superficie
	b_x, t_x, etc.,	componentes x de las fuerzas másicas y de superficie
	ε_x, γ_{xy}, σ_x, τ_{xy}	componentes x de las deformaciones y tensiones
	U	energía de deformación
	W	energía potencial de las cargas
	$\boldsymbol{\Pi}$	energía potencial total
	$\mathbf{I}$	matriz unidad
	h	dimensión representativa del elemento
	ϕ	potencial de fuerzas másicas (u otra función escalar)
	$\boldsymbol{\phi}$	valores nodales del potencial de fuerzas másicas
	$\mathbf{m}^T = [1,1,0]$ o $[1,1,1,0,0,0]$	matriz equivalente del delta de Kronecker para los vectores de deformación/tensión en dos o tres dimensiones
	$x, y, z, x', y', z', r, z, \theta$	coordenadas cartesianas o cilíndricas
	θ	cambio de temperarura
	α	coeficiente de expanción tŕmica
	p	presión interna
	$a_i b_i c_i$	constantes en un desarrollo polinómico de una función N_i
6	x_a	$a = 1,2,3$ coordenadas cartesianas notación indicial
	u_e	desplazamiento paralelo a x_a
	ε_{ab}	componente del tensor de deformaciones
	ω_{ab}	tensor de rotación
	$\Lambda_{a'b}$	cosenos directores $x_{a'}$ y x_b
	σ_{ab}	componente del tensor de tensiones
	$u_{a,b}$	derivada de u_a en la dirección x_b
7, 8	l_k^n	polinomios de Lagrange
	$\xi, \eta(\zeta)$	coordenadas curvilíneas de elementos, bi y tridimensionales
	$L_1, L_2, (L_3)$	coordenadas triangulares (superficie) o tetraédricas (de volumen)
	$\mathbf{J}$	matriz jacobiana
	H_i, w_i	coeficientes de peso de la cuadratura

9	$\boldsymbol{\Omega}$	dominio
	$\boldsymbol{\Gamma}$	contorno de Ω
	$\mathbf{A(u)}, \mathbf{B(u)}$, etc.	operadores que definen las ecuaciones diferenciales del problema y las condiciones de contorno
	$\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}, \phi$	funciones incógnita
	$\mathbf{v}$	función de "prueba"
	$\mathbf{a}, \mathbf{b}$, etc.	parámetros nodales (u otros) que definen el desarrollo de prueba $\mathbf{u} \simeq \mathbf{Na}$
	$\mathbf{w}_j$	función de ponderación
	$\boldsymbol{\Pi}$	un funcional estacionario
	$\mathbf{L}$	operador diferencial lineal
	$\mathbf{C(u)}$	condición de vinculación en $\mathbf{u}$
	$\boldsymbol{\lambda}$	multiplicador de Lagrange
	$\mathbf{n}^T = [n_x, n_y, n_z]$	vector normal al contorno
	α	número corrector
	$\boldsymbol{\nabla}$	operador gradiente $= \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right]^T$
	$\boldsymbol{\nabla}^T$	operador de divergencia
10	$\mathbf{k}, k$	matriz y coeficiente de permeabilidad
	$\mathbf{H}$	matriz del problema discretizado
	p	presión
	ϕ	potencial
	T	temperatura
	$\mathbf{H}$	fuerza del campo magnético
	$\mathbf{B}$	densidad del flujo magnético
	$\mathbf{J}$	corriente eléctrica
12	$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}, \mathbf{M}$	sistema de matrices
	$\boldsymbol{\sigma}^*$	tensor de tensiones alisado (proyectado)
	ρ	acelerador de convergencia
	K, G	módulos de deformación y de rigidez tranversal
14	$\mathbf{e}$	error local
	$\mathbf{e}_\sigma$ o $\mathbf{e}_u$	error local en $\boldsymbol{\sigma}$ o $\mathbf{u}$
	$\lVert e \rVert$; $\lVert u \rVert$	norma de energía de $\mathbf{e}$ o $\mathbf{u}$
	η	porcentaje de error relativo
	θ	índice de efectividad
	$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$	aproximación de la tensión por elementos finitos
	$\boldsymbol{\sigma}^*$	tensión alisada o proyectada

$\mathbf{r}$	residuo en el dominio
$\mathbf{J}$	residuo o salto discontinuo en la interfase
ζ	indicador de refinamiento

Capítulo 1

PRELIMINARES: LOS SISTEMAS DISCRETOS EN GENERAL

1.1 Introducción

Las limitaciones de la mente humana son tales que no puede captar el comportamiento del complejo mundo que la rodea en una sola operación global. Por ello, una forma natural de proceder de ingenieros, científicos, e incluso economistas, consiste en separar los sistemas en sus componentes individuales, o "elementos", cuyo comportamiento pueda conocerse sin dificultad, y a continuación reconstruir el sistema original para estudiarlo a partir de dichos componentes.

En muchos casos se obtiene un modelo adecuado utilizando un número finito de componentes bien definidos. A tales problemas los denominaremos *discretos*. En otros, la subdivisión prosigue indefinidamente y el problema sólo puede definirse haciendo uso de la ficción matemática de infinitésimo. Ello nos conduce a ecuaciones diferenciales o expresiones equivalentes con un número infinito de elementos implicados. A tales sistemas los llamaremos *continuos*.

Con la llegada de las computadoras digitales, los problemas *discretos* pueden resolverse generalmente sin dificultad, aún cuando el número de elementos sea muy elevado. Como la capacidad de las computadoras es finita, los problemas *continuos* sólo se pueden resolver de forma exacta mediante manipulaciones matemáticas. En este aspecto, las técnicas matemáticas disponibles suelen limitar las posibilidades a casos extremadamente simplificados.

Para vencer la dificultad que presenta la solución de problemas continuos reales, ingenieros y matemáticos han ido proponiendo a través de los años diversos métodos de *discretización*. La aplicación de estos métodos hace necesario efectuar alguna *aproximación* de tal manera que quepa esperar que la misma se acerque, tan estrechamente como se quiera, a la solución continua verdadera a medida que crezca el número de variables discretas.

La discretización de problemas continuos ha sido abordada de manera diferente por matemáticos e ingenieros. Los primeros han desarrollado técnicas generales aplicables directamente a las ecuaciones diferenciales que rigen el problema, tales como aproximaciones por diferencias finitas,[1,2] diferentes métodos de residuos ponderados,[3,4] o técnicas aproximadas,

para determinar puntos estacionarios de "funcionales" definidos en forma apropiada. Los ingenieros, por otra parte, suelen enfrentarse al problema más intuitivamente creando una analogía entre elementos discretos reales y porciones finitas de un dominio continuo. Por ejemplo, en el campo de la mecánica de los sólidos, McHenry[5], Hrenikoff[6] y Newmark[7] demostraron, al comienzo de la década de 1940, que pueden obtenerse soluciones razonablemente buenas de un problema continuo sustituyendo pequeñas porciones del continuo por una distribución de barras elásticas simples. Más tarde y en el mismo contexto, Argyris[8], Turner y otros[9] demostraron que se pueden sustituir las propiedades del continuo de un modo más directo, y no menos intuitivo, suponiendo que las pequeñas porciones del mismo, o "elementos", se comportan de una cierta forma simplificada.

Fue de la posición de "analogía directa", adoptada por los ingenieros, de donde nació la expresión "elemento finito". Parece que fue Clough[10] el primero en usar este nombre que supone el uso preciso de la *metodología general aplicable a los sistemas discretos*. Esto, tanto desde el punto de vista conceptual como del numérico, es de la mayor importancia. El primero permite una mejor comprensión del problema; el segundo, el uso de un criterio unificado para abordar una gran variedad de problemas y desarrollar procedimientos generales de cálculo.

Mucho se ha avanzado desde el principio de la década de 1960 y hoy día, las dos vertientes, la meramente matemática y la "analógica", están en completo acuerdo. Es objeto de este texto presentar un panorama del método de los elementos finitos como *procedimiento general de discretización de los problemas continuos planteados por expresiones definidas matemáticamente*.

Con el transcurso de los años se han ido desarrollando métodos generales para analizar problemas de naturaleza discreta. El ingeniero civil, que trabaja con estructuras, calcula primero las relaciones entre fuerzas y desplazamiento para cada miembro de la estructura y después procede al ensamblaje del conjunto siguiendo un procedimiento bien definido que consiste en establecer el equilibrio local en cada "nudo" o punto de unión de la estructura. A partir de tales ecuaciones se pueden obtener los desplazamientos desconocidos. Análogamente, el ingeniero hidráulico o eléctrico, que trabaja con conducciones hidráulicas o con redes de componentes eléctricos, (resistencias, condensadores, etc.), establece primeramente una relación entre corrientes (flujos) y potenciales para cada elemento aislado y después procede a unir el conjunto imponiendo la continuidad de los flujos.

Todos estos análisis siguen un patrón general que puede adaptarse universalmente a todos los sistemas discretos. Es por tanto posible definir un *sistema discreto tipo*. Este capítulo se ocupa fundamentalmente de establecer los procedimientos aplicables a dichos sistemas. Mucho de lo que aquí se presenta es conocido por cualquier ingeniero, pero es aconsejable en esta parte reiterar algunos conceptos. Dado que el estudio de las estructuras elásticas ha sido el campo en el que se ha desarrollado mayor actividad, presentaremos su estudio en primer lugar y seguidamente diversos ejemplos de otros campos, antes de que intentemos presentar el problema de manera general.

La existencia de una manera única para abordar los *problemas discretos tipo* nos lleva a la primera definición del método de los elementos finitos como procedimiento de aproximación de problemas continuos, de tal forma que:

a) el continuo se divide en un número finito de partes (elementos), cuyo comportamiento se especifica mediante un número finito de parámetros, y
b) la solución del sistema completo como ensamblaje de los elementos sigue precisamente las mismas reglas que se aplican a los *problemas discretos tipo*.

Se encontrará que numerosos métodos matemáticos clásicos de aproximación se incluyen en esta categoría, así como también varios métodos de aproximaciones de naturaleza técnica. Es difícil, por tanto, hablar de los orígenes del método de los elementos finitos y del preciso momento de su invención.

En la Tabla 1.1 presentamos el proceso de evolución que condujo a los conceptos actuales del análisis mediante elementos finitos. En el Capítulo 9 se presentarán con más detalle las bases matemáticas cuya evolución se remonta a épocas más clásicas.[11–20]

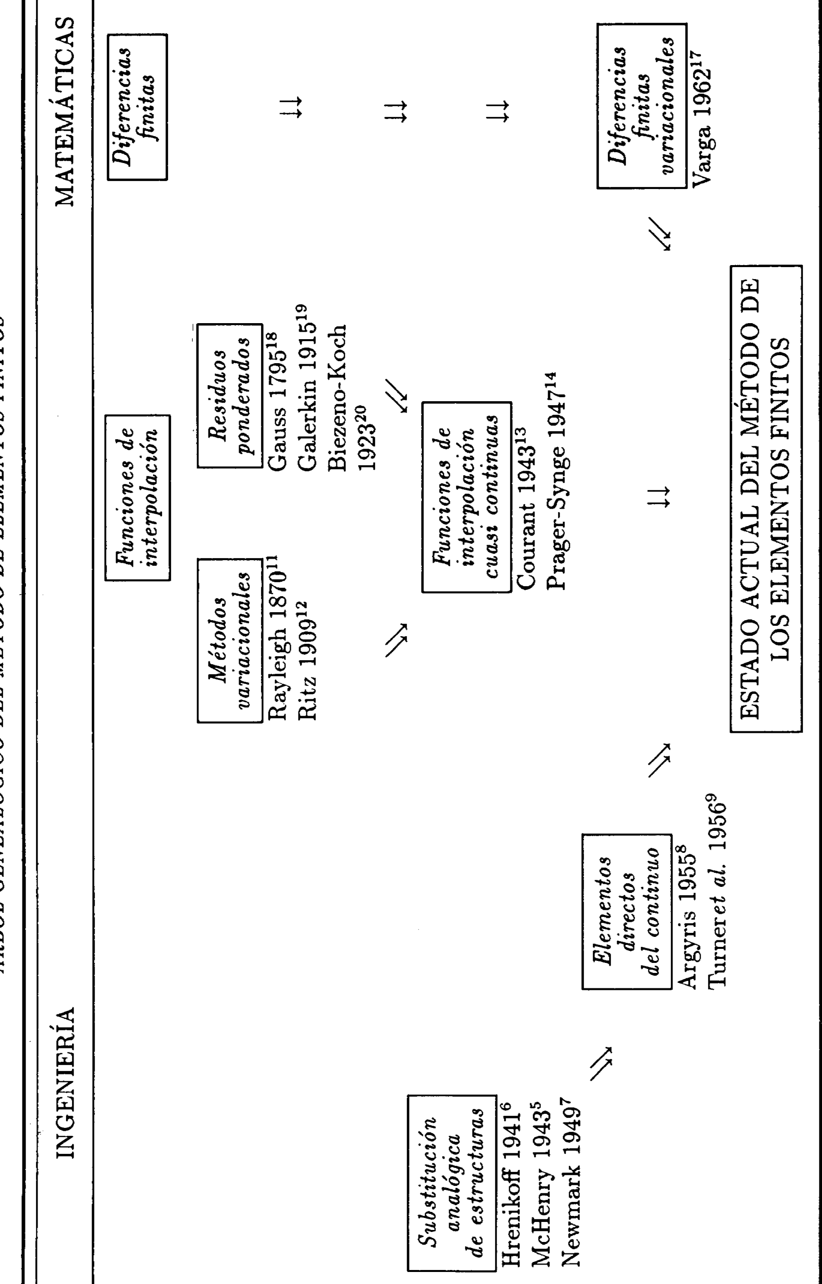
1.2 Elementos y sistemas estructurales

Para presentar al lector el concepto general de sistema discreto, consideraremos en primer lugar un ejemplo mecánico estructural del tipo de elasticidad lineal.

Sea la Figura 1.1 una estructura plana formada por distintos elementos enlazados entre sí en los nudos, numerados del 1 al n. Los enlaces en los nudos son, en este caso, articulaciones de manera que no transmiten momentos.

Para empezar se supondrá que mediante cálculos efectuados aparte, o mediante resultados experimentales, conocemos exactamente las propiedades de cada elemento. Así pues, si examinamos un miembro representativo como el (1) asociado a los nudos 1, 2 y 3, las fuerzas que actúan en los nudos están unívocamente definidas por los desplazamientos de tales nudos, la carga distribuida que actúa sobre el elemento (p), y su deformación inicial. Esta última puede ser debida a la temperatura, a la retracción, o simplemente a un desajuste inicial. Las fuerzas y los correspondientes desplazamientos se definen mediante las componentes apropiadas (U, V y u, v) en un sistema de coordenadas cartesianas.

TABLA 1.1
ÁRBOL GENEALÓGICO DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS



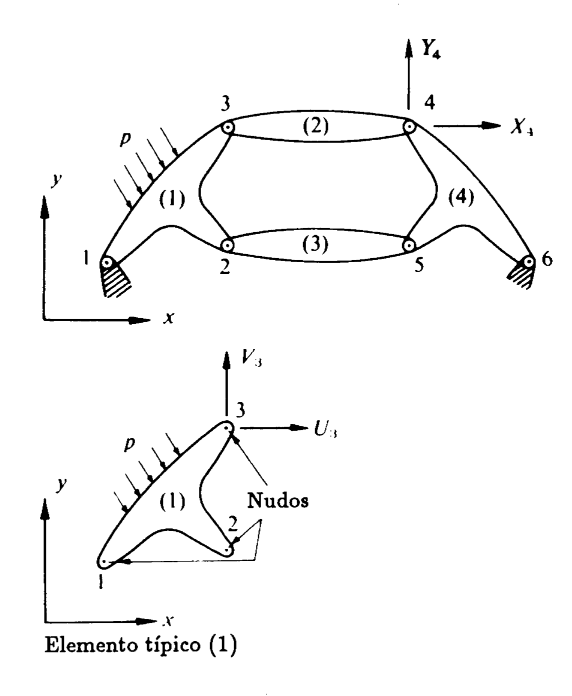


Figura 1.1 Estructura típica formada por elementos interconectados.

Expresemos en forma matricial† las fuerzas que actúan en todos los nudos (3 en este caso) del elemento (1), tenemos

$$\mathbf{q}^1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^1 \\ \mathbf{q}_2^1 \\ \mathbf{q}_3^1 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{q}_1^1 = \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \end{Bmatrix}, \quad \text{etc.} \tag{1.1}$$

y para los correspondientes desplazamientos nodales

$$\mathbf{a}^1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^1 \\ \mathbf{a}_2^1 \\ \mathbf{a}_3^1 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{a}_1^1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}, \quad \text{etc.} \tag{1.2}$$

† En todo este libro se supondrá que el lector posee ciertos conocimientos de álgebra matricial. Esto se hace necesario para mantener un texto lo más conciso posible. Para lectores que no están familiarizados con ese tema se incluye un breve apéndice (Apéndice 1) donde se dan los suficientes principios de álgebra matricial para poder seguir con conocimiento de causa el desarrollo del texto. Las matrices (y vectores) se distinguirán a lo largo del texto por letras negritas.

Suponiendo que el elemento presenta un comportamiento elástico lineal, la relación característica será siempre de la forma

$$\mathbf{q}^1 = \mathbf{K}^1\mathbf{a}^1 + \mathbf{f}_p^1 + \mathbf{f}_{\varepsilon_0}^1 \tag{1.3}$$

en donde $\mathbf{f}_p^1$ representa las fuerzas nodales necesarias para equilibrar cualquier carga distribuida que actúe sobre el elemento y $\mathbf{f}_{\varepsilon_0}^1$ las fuerzas nodales necesarias para equilibrar cualquier deformación inicial, como la que puede ocasionar un cambio de temperatura si los nudos tienen impedido todo desplazamiento. El primer término representa las fuerzas inducidas por los desplazamientos de los nudos.

Similarmente, mediante un análisis o experimento preliminar se pueden definir unívocamente las tensiones o reacciones internas en cualquier punto o puntos especificados del elemento, en función de los desplazamientos de los nudos. Definiendo esas tensiones mediante la matriz $\boldsymbol{\sigma}^1$ se obtiene una relación de la forma

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{S}^1\mathbf{a}^1 + \boldsymbol{\sigma}_p^1 + \boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon_0}^1 \tag{1.4}$$

donde los dos últimos términos son simplemente las tensiones originadas por las cargas distribuidas que actúan sobre el elemento o por tensiones iniciales cuando se restringe el desplazamiento en los nudos.

La matriz $\mathbf{K}^e$ se conoce como matriz de rigidez del elemento y la matriz $\mathbf{S}^e$ como matriz de tensiones del elemento (e).

Se han ilustrado las relaciones (1.3) y (1.4) utilizando el ejemplo de un elemento de tres nudos y puntos de interconexión capaces de transmitir sólo dos componentes de fuerza. Obviamente, los mismos argumentos y las mismas definiciones se pueden aplicar con carácter general. Un elemento como el (2) de una estructura hipotética tendrá sólo dos puntos de interconexión; otros pueden tener un número muy superior. Análogamente, si los puntos de enlace se consideran rígidos han de tenerse en cuenta tres componentes de fuerzas generalizadas y tres componentes de desplazamientos generalizados, correspondiendo el tercero de ellos a un momento y a una rotación, respectivamente. Para una estructura tridimensional rígidamente articulada, el número de componentes por nudo será seis. Así pues, en general:

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^e \\ \mathbf{q}_2^e \\ \vdots \\ \mathbf{q}_m^e \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{Bmatrix} \tag{1.5}$$

poseyendo cada $\mathbf{q}_i$ y $\mathbf{a}_i$ el mismo número de componentes o *grados de libertad*. Estas cantidades son conjugadas una de la otra.

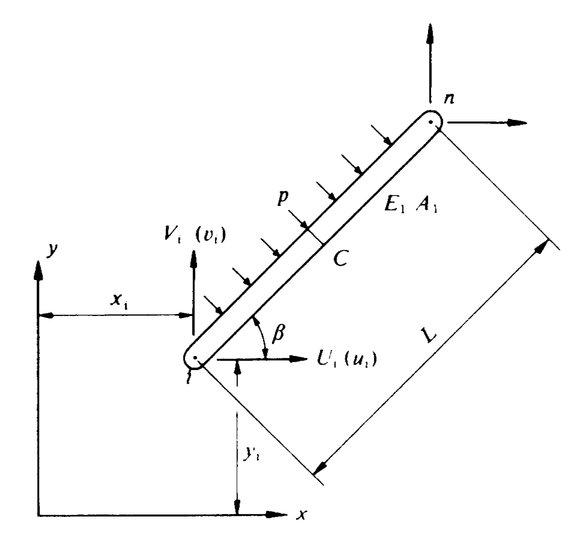


Figura 1.2 Barra articulada en los extremos.

Las matrices de rigidez de los elementos serán, por tanto, siempre cuadradas y de la forma

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^e & \mathbf{K}_{ij}^e & \cdots & \mathbf{K}_{im}^e \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}_{mi}^e & \cdots & \cdots & \mathbf{K}_{mm}^e \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

donde $\mathbf{K}_{ii}^e$, etc., son submatrices también cuadradas de dimensiones $l \times l$, siendo l el número de componentes de fuerza a considerar en los nudos.

Como ejemplo, el lector puede considerar la barra articulada plana de sección uniforme A y módulo de elasticidad E que se representa en la Figura 1.2. La barra está sometida a una carga lateral uniforme p y a una deformación uniforme debida a la temperatura

$$\varepsilon_0 = \alpha T$$

Si los extremos de la barra están definidos por las coordenadas x_i, y_i y x_n, y_n su longitud puede calcularse mediante la fórmula

$$L = \sqrt{[(x_n - x_i)^2 + (y_n - y_i)^2]}$$

y su ángulo de inclinación respecto a la horizontal por

$$\beta = \tan^{-1}\frac{y_n - y_i}{x_n - x_i}$$

Solamente hay que considerar dos componentes de fuerzas y de desplazamientos en cada nudo.

Las fuerzas nodales debidas a la carga lateral son, evidentemente

$$\mathbf{f}_p^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_n \\ V_n \end{Bmatrix}_p = - \begin{Bmatrix} -\operatorname{sen}\beta \\ \cos\beta \\ -\operatorname{sen}\beta \\ \cos\beta \end{Bmatrix} \frac{pL}{2}$$

y representan las componentes adecuadas de las reacciones de una viga simplemente apoyada, $pL/2$. Similarmente, para impedir la expansión térmica ε_0 se necesita una fuerza axial ($E\alpha TA$), lo que da unas componentes

$$\mathbf{f}_{\varepsilon_0}^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_n \\ V_n \end{Bmatrix}_{\varepsilon_0} = - \begin{Bmatrix} -\cos\beta \\ -\operatorname{sen}\beta \\ \cos\beta \\ \operatorname{sen}\beta \end{Bmatrix} (E\alpha TA)$$

Finalmente, los desplazamientos del elemento

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix}$$

originarán un alargamiento $(u_n - u_i)\cos\beta + (v_n - v_i)$ sen β. Al mutiplicar éste por EA/L obtendremos la fuerza axial cuyas componentes pueden calcularse. Tras ordenar las ecuaciones obtenemos la expresión general

$$\mathbf{K}^e\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_n \\ V_n \end{Bmatrix}_\delta =$$

$$= \frac{EA}{L} \left[\begin{array}{cc|cc} \cos^2\beta & \operatorname{sen}\beta\cos\beta & -\cos^2\beta & -\operatorname{sen}\beta\cos\beta \\ \operatorname{sen}\beta\cos\beta & \operatorname{sen}^2\beta & -\operatorname{sen}\beta\cos\beta & -\operatorname{sen}^2\beta \\ \hline -\cos^2\beta & -\operatorname{sen}\beta\cos\beta & \cos^2\beta & \operatorname{sen}\beta\cos\beta \\ -\operatorname{sen}\beta\cos\beta & -\operatorname{sen}^2\beta & \operatorname{sen}\beta\cos\beta & \operatorname{sen}^2\beta \end{array} \right] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_n \\ v_n \end{Bmatrix}$$

Así pues, hemos obtenido las componentes de la ecuación general (1.3) para el caso elemental estudiado. Es, asimismo, muy sencillo establecer las tensiones en cualquier sección del elemento en la forma establecida por la Ec. (1.4). Por ejemplo, si se considera la sección media C de la viga, puede demostrarse que las tensiones en la fibra extrema, calculadas a partir de la tensión axial del elemento y del momento flector, son

$$\boldsymbol{\sigma}_C^e = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix}_C = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -\cos\beta, & -\operatorname{sen}\beta, & \cos\beta, & \operatorname{sen}\beta \\ -\cos\beta, & -\operatorname{sen}\beta, & \cos\beta, & \operatorname{sen}\beta \end{bmatrix} \mathbf{a}^e +$$

$$+ \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{pL^2}{8}\frac{d}{I} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} E\alpha T$$

en la cual d es el semiespesor de la sección e I su momento de inercia. Por tanto, todos los términos que aparecían en la Ec. (1.4) son ya fácilmente reconocibles.

Para elementos más complicados se requieren procedimientos de análisis más elaborados, pero los resultados tienen la misma forma. El ingeniero reconocerá enseguida que las relaciones entre desplazamientos y rotaciones que se usan en el análisis de entramados rígidos son solamente un caso particular de las relaciones generales.

Quizás deba destacarse, de paso, que la matriz de rigidez obtenida para el elemento aislado sometido a tracción resulta ser simétrica (como también ocurre con algunas submatrices). Esto no es en absoluto un hecho fortuito, sino que es consecuencia del principio de la conservación de la energía y de su corolario, el conocido teorema de reciprocidad de Maxwell-Betti.

Se ha supuesto que las propiedades del elemento cumplen relaciones lineales sencillas. En principio, se podrían establecer relaciones similares para materiales no lineales, pero por el momento aplazaremos para más adelante el estudio de los problemas de esta naturaleza.

1.3 Ensamblaje y análisis de una estructura

Consideremos de nuevo la estructura hipotética de la Figura 1.1. Para obtener la solución completa se han de satisfacer en toda ella las dos condiciones de:

a) compatibilidad de los desplazamientos, y
b) equilibrio.

Todos los sistemas de desplazamientos nodales **a**:

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{Bmatrix} \tag{1.7}$$

representando ahora a la totalidad de la estructura y donde participan todos los elementos de la misma, satisfacen automáticamente la primera condición.

Como las condiciones generales de equilibrio ya son satisfechas *dentro* de cada elemento, sólo nos queda por establecer las condiciones de equilibrio en los nudos de la estructura. Las ecuaciones que resulten contendrán los desplazamientos como incógnitas y una vez calculados éstos el problema quedará completamente resuelto. Las fuerzas internas, o tensiones, que

actúan dentro de cada elemento pueden hallarse fácilmente utilizando las características establecidas *a priori* para cada elemento por la Ec. (1.4).

Consideremos la estructura sometida a un sistema de fuerzas externas $\mathbf{r}$ aplicadas en los nudos:

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{Bmatrix} \tag{1.8}$$

además de las cargas distribuidas aplicadas a cada elemento individual. Como antes, cada una de las fuerzas $\mathbf{r}_i$ deberá tener el mismo número de componentes que las reacciones consideradas en cada elemento. En el ejemplo en cuestión

$$\mathbf{r}_i = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix} \tag{1.9}$$

ya que se ha supuesto que las uniones son articulaciones, pero ahora, a efectos de generalizar, supongamos que el número de componentes es arbitrario.

Si establecemos ahora el equilibrio en un nudo cualquiera, i, cada componente de $\mathbf{r}_i$ tiene que ser igual, a su vez, a la suma de las componentes de las fuerzas que aportan los elementos que se reúnen en dicho nudo. Así pues, considerando *todas* esas componentes

$$\mathbf{r}_i = \sum_{e=1}^{m} \mathbf{q}_i^e = \mathbf{q}_i^1 + \mathbf{q}_i^2 + \cdots \tag{1.10}$$

en donde $\mathbf{q}_i^1$ es la fuerza que el elemento 1 aporta al nudo i, $\mathbf{q}_i^2$ la fuerza que aporta el elemento 2, etc. Claramente, sólo los elementos que contengan al punto i contribuirán con fuerzas no nulas, pero para mayor claridad se han incluido todos los elementos en el sumatorio.

Al sustituir las fuerzas aportadas al nudo i por sus expresiones dadas por la definición (1.3), resulta que las variables nodales $\mathbf{a}_i$ son comunes (y por ello, omitiendo el supraíndice e), tendremos

$$\mathbf{r}_i = (\sum_{e=1}^{m} \mathbf{K}_{i1}^e)\mathbf{a}_1 + (\sum_{e=1}^{m} \mathbf{K}_{i2}^e)\mathbf{a}_2 + \cdots + \sum_{e=1}^{m} \mathbf{f}_i^e \tag{1.11}$$

donde

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_p^e + \mathbf{f}_{\varepsilon 0}^e$$

Como antes, el sumatorio sólo afecta a los elementos que contienen al nudo i. Reuniendo todas esas ecuaciones obtenemos simplemente

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{f} \tag{1.12}$$

en la cual las submatrices son

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij} &= \sum_{e=1}^{m} \mathbf{K}_{ij}^e \\ \mathbf{f}_i &= \sum_{e=1}^{m} \mathbf{f}_i^e \end{aligned} \tag{1.13}$$

con sumatorios que comprenden a todos los elementos. Esta regla tan sencilla para ensamblar los elementos es muy útil, pues tan pronto como se conozca un coeficiente para un elemento particular se puede almacenar inmediatamente en la "posición" adecuada del computador. *Este proceso general de ensamblaje constituye la característica fundamental y común a todos los cálculos por elementos finitos y debe ser bien comprendido por el lector.*

Si utilizamos diferentes tipos de elementos estructurales y éstos han de acoplarse, se ha de recordar que la regla para la suma de matrices sólo permite ésta si las matrices son de idénticas dimensiones. Por consiguiente, las submatrices individuales que hayan de ensamblarse deben formarse con el mismo número de componentes de fuerzas o de desplazamientos. Así, por ejemplo, si un miembro capaz de transmitir momentos a un nudo tiene que unirse en ese nudo a otro miembro que esté articulado, es necesario completar la matriz de rigidez de este último insertando convenientemente ceros en las posiciones correspondientes a las rotaciones y en las de los momentos.

1.4 Condiciones de contorno

El sistema de ecuaciones que resulta de la Ec. (1.12) puede resolverse una vez sustituidos los desplazamientos impuestos en los apoyos. En el ejemplo de la Figura 1.1, donde son nulas ambas componentes de los desplazamientos de los nudos 1 y 6, habría que sustituir

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_6 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

lo que equivale a reducir el número de ecuaciones de equilibrio (en este caso doce) anulando las dos primeras y las dos últimas, y reduciéndose así el número total de incógnitas a ocho. Es conveniente, sin embargo, ensamblar las ecuaciones de la forma expresada en la Ec. (1.12) para incluir todos los nudos.

Es obvio que sin sustituir un número mínimo de desplazamientos, obligados para impedir que la estructura se mueva como un sólido rígido, sería imposible resolver el sistema pues los desplazamientos no pueden quedar unívocamente determinados por las fuerzas y habría infinitas soluciones para un sistema de fuerzas dado. Este hecho, físicamente evidente, debe

interpretarse matemáticamente en razón de que la matriz **K**, al ser singular, carece de inversa. Estableciendo los desplazamientos adecuados tras la fase del ensamblaje, podrá obtenerse una solución única prescindiendo de las filas y las columnas adecuadas de las distintas matrices.

La forma del sistema de ecuaciones una vez ensambladas, es como sigue

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{11}\mathbf{a}_1 + \mathbf{K}_{12}\mathbf{a}_2 + \cdots &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{K}_{21}\mathbf{a}_1 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{a}_2 + \cdots &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{f}_2 \\ \text{etc.}\end{aligned} \tag{1.14}$$

Se apreciará que si imponemos un desplazamiento cualquiera, tal como $\mathbf{a}_1 = \bar{\mathbf{a}}_1$, la "fuerza" exterior $\mathbf{r}_1$ no puede ser impuesta y permanecerá como incógnita. Podemos, pues, *prescindir* de la primera ecuación y sustituir $\mathbf{a}_1$ por un valor conocido en las restantes ecuaciones. Este procedimiento implica un proceso de cálculo engorroso, pudiéndose alcanzar el mismo objetivo añadiendo al coeficiente $\mathbf{K}_{11}$ un número grande, $\alpha\mathbf{I}$, y reemplazando el segundo miembro de la ecuación, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{f}_1$, por $\bar{\mathbf{a}}_1\alpha$. Si α es mucho mayor que cualquier otro coeficiente de rigidez, esta alteración equivale a reemplazar la primera ecuación por

$$\alpha\mathbf{a}_1 = \alpha\bar{\mathbf{a}}_1 \tag{1.15}$$

es decir, la condición necesaria impuesta, pero se conserva la simetría del sistema y sólo se necesitan unos cambios mínimos en el orden del cálculo. De haber más desplazamientos impuestos, seguiríamos el mismo procedimiento. Este artificio fue introducido por Payne e Irons.[21] En el Capítulo 15 se presentará un procedimiento alternativo que evita el ensamblaje de ecuaciones correspondientes a nudos con valores de contorno impuestos.

Una vez introducidas todas las condiciones de contorno podemos resolver el sistema de ecuaciones y obtener los desplazamientos incógnita junto con las tensiones y fuerzas internas de cada elemento.

1.5 Redes hidráulicas y eléctricas

En muchos campos no pertenecientes al análisis de estructuras se aplican los mismos principios para deducir las características de los elementos y de su ensamblaje. Consideremos, por ejemplo, un conjunto de resistencias eléctricas como el representado en la Figura 1.3.

Si aislamos una resistencia cualquiera, ij, del resto del sistema, según la ley de Ohm podemos escribir las relaciones siguientes entre las corrientes que *entran* en el elemento por cada uno de sus extremos y las diferencias de potencial entre éstos

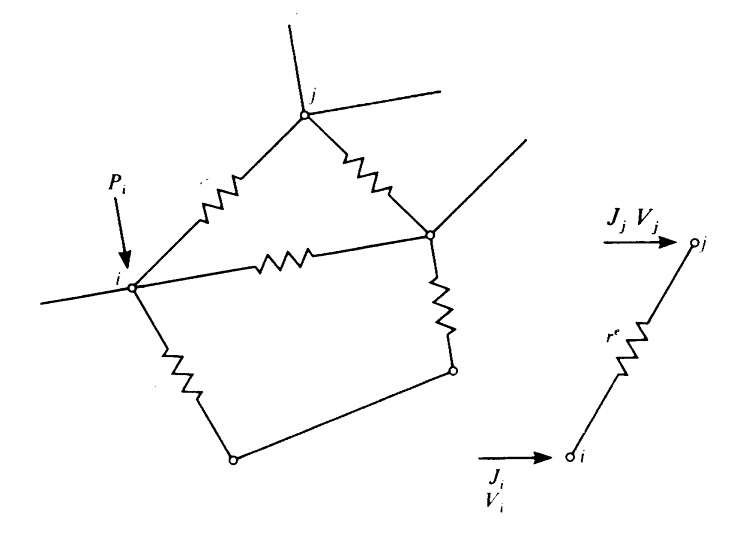


Figura 1.3 Red de resistencias eléctricas.

$$J_i^e = \frac{1}{r^e}(V_i - V_j)$$
$$J_j^e = \frac{1}{r^e}(V_j - V_i)$$

o en forma matricial

$$\begin{Bmatrix} J_i^e \\ J_j^e \end{Bmatrix} = \frac{1}{r^e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix}$$

que con nuestra notación es simplemente

$$\mathbf{J}^e = \mathbf{K}^e\mathbf{V}^e \tag{1.16}$$

Esta ecuación corresponde claramente a la relación de rigidez (1.3), pues si además se suministrasen corrientes exteriores a lo largo del elemento, se podrían calcular también términos equivalentes a las "fuerzas".

Para ensamblar toda la red suponemos la continuidad del potencial en cada nudo e imponemos en éstos el equilibrio de las corrientes concurrentes. Si P_i representa ahora la entrada de una corriente externa en el nudo i se habrá de verificar, de forma completamente análoga a la Ec. (1.11),

$$P_i = \sum_{j=1}^{j=m}\sum_{e=1}^{m} K_{ij}^e V_j \tag{1.17}$$

donde el segundo sumatorio incluye a todos los "elementos", y de nuevo para todos los nudos

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}\mathbf{V} \tag{1.18}$$

en la cual

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{m} K_{ij}^{e}$$

Se ha prescindido en las fórmulas anteriores de la notación matricial, ya que las magnitudes como tensión y corriente son escalares, y por consiguiente también lo son los coeficientes de la matriz "de rigidez".

Si las resistencias se reemplazaran por tuberías por las que discurriera un fluido en régimen laminar, obtendríamos de nuevo fórmulas similares siendo ahora V la caída de presión y J el flujo.

Sin embargo, para las redes de tuberías habitualmente empleadas en la práctica, las leyes lineales no son en general válidas. La relación típica entre flujo y diferencia de presión es de la forma

$$J_i = c(V_i - V_j)^{\gamma} \tag{1.19}$$

en la cual el exponente γ varía entre 0.5 y 0.7. Aún así, seguiría siendo posible escribir ecuaciones de la forma (1.16) advirtiendo, no obstante, que las matrices $\mathbf{K}^e$ no están ya formadas por constantes, sino por funciones conocidas de $\mathbf{V}$. Las ecuaciones finales pueden nuevamente ensamblarse, pero presentan formas no lineales y en general para su solución necesitaremos hacer uso de métodos iterativos.

Finalmente, quizás sea interesante hacer mención a la expresión más general de una red eléctrica atravesada por una corriente alterna. Es corriente escribir en *forma compleja* las relaciones entre corrientes y tensiones, reemplazando las resistencias por impedancias complejas. De nuevo se obtendrán relaciones generales como las (1.16) a (1.18), pero con cada cantidad dividida en sus partes real e imaginaria.

Para encontrar la solución se pueden seguir los mismos procedimientos, considerando en cada paso la igualdad de las partes real e imaginaria, y lo cierto es que los modernos ordenadores posibilitan el empleo de programas generales que hacen uso de la capacidad de tales ordenadores para tratar números complejos. Más adelante, al tratar de los problemas de vibraciones, se hará referencia a algunos problemas de esta clase.

1.6 El proceso general

Para afianzar los conceptos expuestos en este capítulo presentaremos un ejemplo. Éste se muestra en la Figura 1.4(a), donde se interconectan

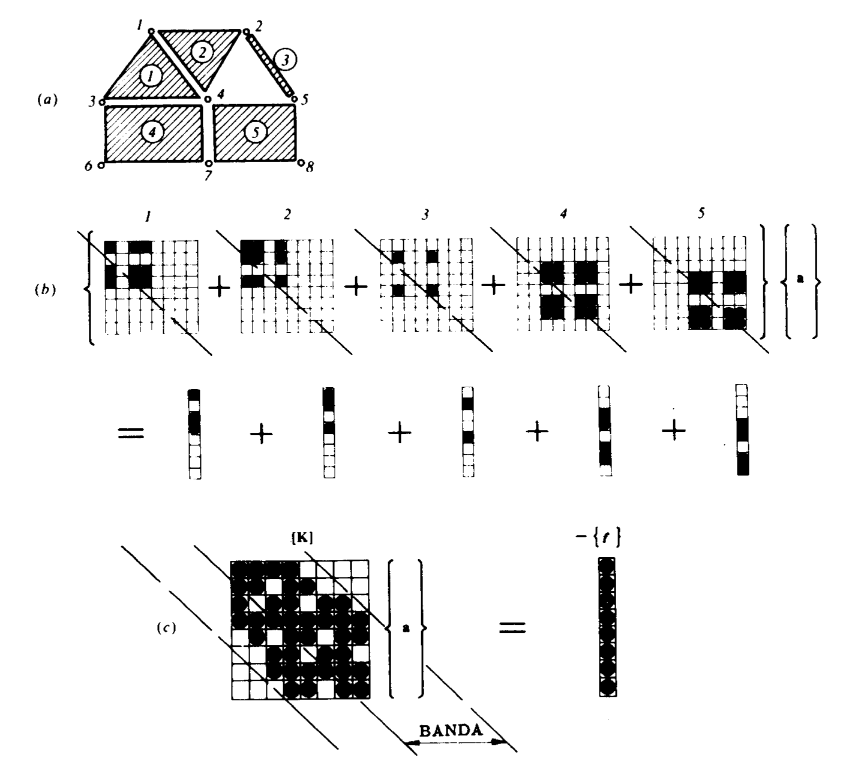


Figura 1.4 El proceso general.

cinco elementos discretos, que pueden ser de tipo estructural, eléctrico o de cualquier otra naturaleza lineal. En la solución:

El *primer paso* es determinar las propiedades de cada elemento a partir de la geometría del problema, de los datos de carga y de la naturaleza del material. Se determina la matriz de rigidez para cada elemento así como las correspondientes "cargas nodales" en la forma expresada por la Ec. (1.3). Cada elemento tiene su propio número de identificación y sus conexiones nodales especificadas. Por ejemplo:

elemento	conexión			
1	1	3	4	
2	1	4	2	
3	2	5		
4	3	6	7	4
5	4	7	8	5

Suponiendo que las propiedades se hayan establecido en las mismas

coordenadas, podemos alojar cada componente de "rigidez" o de "fuerza" en la matriz global como se muestra en la Figura 1.4(b). Cada cuadrado sombreado representa un coeficiente individual, o una submatriz del tipo $\mathbf{K}_{ij}$ si consideramos más de una cantidad en los nudos. En este caso, para cada elemento se muestra su contribución individual y el lector puede comprobar la posición de los coeficientes. Adviértase que aunque hemos considerado en este ejemplo "elementos" de varios tipos, no representa ninguna dificultad su especificación. (Todas las 'fuerzas', incluyendo las nodales, se han asociado aquí con elementos por razones de simplificación).

El *segundo paso* es el ensamblaje de las ecuaciones finales del tipo de la Ec. (1.12). Esto se puede realizar simplemente siguiendo la regla dada en la Ec. (1.13), es decir, mediante *simple adición* de todos los números en el lugar correspondiente de la matriz global. El resultado se muestra en la Figura 1.4(c) donde se han sombreado los coeficientes no nulos. Como las matrices son simétricas, en realidad solamente tenemos que calcular la mitad superior de la diagonal.
Todos los coeficientes no nulos están confinados dentro de una *banda* o *contorno* cuyo ancho puede calcularse *a priori* a partir de la posición de las conexiones nodales. Así pues, en los programas de ordenador solamente es preciso almacenar los elementos que caen dentro de la mitad superior del ancho de banda, como se muestra en la Figura 1.4(c).

El *tercer paso* es introducir las condiciones de contorno en la matriz final ya ensamblada, tal como se dijo en la Sección 1.3. A esto le sigue:

El *paso final* de resolución del sistema de ecuaciones resultantes. Para ello se pueden seguir muchos métodos, algunos de los cuales se expondrán en el Capítulo 15. Evidentemente el problema de la resolución de las ecuaciones, aunque es extremadamente importante, cae en general fuera del alcance de esta obra.

Al paso final seguirá la sustitución para obtener tensiones, corrientes u otras cantidades de *salida* cuyo conocimiento se desee.

Vemos, pues, que todas las operaciones que precisa el análisis de estructuras, o cualquier otro análisis de redes, son extremadamente sencillas y repetitivas.

Podemos ya definir *el sistema discreto general* como aquél en el que prevalecen dichas condiciones.

1.7 El sistema discreto general

En el *sistema discreto general*, ya sea estructural o de cualquier otra clase, encontramos que:

1. Se define un conjunto de parámetros discretos, tales como $\mathbf{a}_i$, de manera que describan el comportamiento de cada elemento, e, y también el comportamiento del sistema conjunto. Les llamaremos *parámetros del sistema*.
2. Se expresa para cada elemento un conjunto de cantidades $\mathbf{q}_i^e$ en función de los parámetros del sistema $\mathbf{a}_i$. La relación general puede ser no lineal

$$\mathbf{q}_i^e = \mathbf{q}_i^e(\mathbf{a}) \tag{1.20}$$

pero en muchos casos será lineal

$$\mathbf{q}_i^e = \mathbf{K}_{i1}^e\mathbf{a}_1 + \mathbf{K}_{i2}^e\mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{f}_i^e \tag{1.21}$$

3. Las *ecuaciones del sistema* se obtienen mediante simple adición

$$\mathbf{r}_i = \sum_{e=1}^{m} \mathbf{q}_i^e \tag{1.22}$$

donde $\mathbf{r}_i$ son cantidades del sistema (a menudo se les asigna el valor cero). Si el problema es lineal, el resultado será un sistema de ecuaciones

$$\mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = \mathbf{r} \tag{1.23}$$

tal que

$$\mathbf{K}_{ij} = \sum_{e=1}^{m} \mathbf{K}_{ij}^e \qquad \mathbf{f}_i = \sum_{e=1}^{m} \mathbf{f}_i^e \tag{1.24}$$

a partir de la cuales pueden determinarse las variables $\mathbf{a}$ del sistema.

El lector observará que en esta definición se incluyen los ejemplos estructurales y eléctricos ya expuestos. Sin embargo, dicha definición es mucho más amplia. En general no tiene por qué haber linealidad ni ser las matrices simétricas, aunque en muchos problemas encontraremos ambas cosas. Más aún, la simplicidad de las interconexiones existentes en los elementos habituales no es esencial.

A pesar de que se podrían dar muchos más detalles sobre este punto (referimos al lector a libros especializados si desea realizar un estudio más completo en el campo de las estructuras[22–24]), creemos que la exposición general presentada aquí basta para proseguir el estudio de este libro.

Solamente mencionaremos un punto más con relación al cambio de los parámetros discretos. El proceso conocido comúnmente como transformación de coordenadas es vital en muchos aspectos y debe comprenderse en su totalidad.

1.8 Transformación de coordenadas

Suele ser conveniente establecer las características de un elemento determinado en un sistema de coordenadas diferentes del que se miden las fuerzas exteriores y los desplazamientos de la estructura, o el sistema ensamblado. En realidad, para facilitar los cálculos, puede utilizarse un sistema de coordenadas diferente para cada elemento. Transformar las componentes de las fuerzas y de los desplazamientos que aparecen en la Ec. (1.3) a cualquier otro sistema de coordenadas es labor sencilla. Obviamente, será preciso hacerlo antes de iniciar el ensamblaje de la estructura.

Diferenciemos al sistema de coordenadas locales en donde calculamos las propiedades del elemento con un índice prima y dejemos sin notación especial al sistema global de coordenadas necesarias para el ensamblaje. Las componentes de los desplazamientos podrán transformarse mediante la matriz $\mathbf{L}$ de cosenos directores adecuada

$$\mathbf{a}' = \mathbf{L}\mathbf{a} \tag{1.25}$$

Como las componentes correspondientes de las fuerzas deben realizar la misma cantidad de trabajo en ambos sistemas †

$$\mathbf{q}^T\mathbf{a} = \mathbf{q}'^T\mathbf{a}' \tag{1.26}$$

y según (1.25), tendremos

$$\mathbf{q}^T\mathbf{a} = \mathbf{q}'^T\mathbf{L}\mathbf{a}$$

o sea

$$\mathbf{q} = \mathbf{L}^T\mathbf{q}' \tag{1.27}$$

El conjunto de transformaciones dado por (1.25) y (1.27) recibe el nombre de *contravariante*.

Para transformar "rigideces" que pueden venir dadas en coordenadas locales a las globales, escribimos

$$\mathbf{q}' = \mathbf{K}'\mathbf{a}' \tag{1.28}$$

y según (1.27), (1.28) y (1.25), tendremos

$$\mathbf{q} = \mathbf{L}^T\mathbf{K}'\mathbf{L}\mathbf{a}$$

o sea, en coordenadas globales

† $(\ )^T$ indica matriz traspuesta.

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}^T\mathbf{K}'\mathbf{L} \tag{1.29}$$

El lector puede verificar la utilidad de las transformaciones anteriores volviendo a resolver el ejemplo anterior de la barra articulada en sus extremos. En muchos problemas complicados se pueden dar limitaciones externas de alguna clase que obliguen a que la expresión (1.25) tenga diferentes grados de libertad en $\mathbf{a}$ y en $\mathbf{a}'$. Incluso en tales casos siguen siendo válidas las relaciones (1.26) y (1.27).

En muchos otros casos de análisis discreto puede seguirse un método diferente y más general. Nuestro objetivo es reemplazar un conjunto de parámetros $\mathbf{a}$, que son las variables de las ecuaciones del sistema, por otro relacionado con él mediante una matriz de transformación de coordenadas $\mathbf{T}$ tal que

$$\mathbf{a} = \mathbf{T}\mathbf{b} \tag{1.30}$$

En los casos lineales las ecuaciones del sistema son de la forma

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{f} \tag{1.31}$$

y tras sustituir tenemos

$$\mathbf{K}\mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{r} - \mathbf{f} \tag{1.32}$$

Este nuevo sistema puede multiplicarse por la izquierda por $\mathbf{T}^T$, dando

$$(\mathbf{T}^T\mathbf{K}\mathbf{T})\mathbf{b} = \mathbf{T}^T\mathbf{r} - \mathbf{T}^T\mathbf{f} \tag{1.33}$$

con lo que se mantiene la simetría de las ecuaciones si la matriz $\mathbf{K}$ es simétrica. Sin embargo, a veces la matriz $\mathbf{T}$ no es cuadrada y la expresión (1.30) representa en realidad una *aproximación* en la que hemos *fijado* un mayor número de parámetros $\mathbf{a}$. Es claro que el sistema de la Ec. (1.32) proporciona más parámetros $\mathbf{b}$, y la expresión final (1.33) representa un sistema reducido que de alguna manera se aproxima al sistema original.

Hemos presentado pues el concepto básico de aproximación, que será el tema de los capítulos siguientes en donde conjuntos infinitos de cantidades se reducirán a conjuntos finitos.

Referencias

1. R.V. SOUTHWELL, *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, Clarendon Press, 1946.
2. D.N. de G. ALLEN, *Relaxation Methods*, McGraw-Hill, 1955.
3. S.H. CRANDALL, *Engineering Analysis*, McGraw-Hill, 1956.
4. B.A. FINLAYSON, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, 1972.

5. D. McHENRY, "A lattice analogy for the solution of plane stress problems", *J. Inst. Civ. Eng.*, **21**, 59–82, 1943.
6. A. HRENIKOFF, "Solution of problems in elasticity by the framework method", *J. Appl. Mech.*, **A8**, 169–75, 1941.
7. N.M. NEWMARK, "Numerical methods of analysis in bars plates and elastic bodies", en *Numerical Methods in Analysis in Engineering*, (ed. L.E. Grinter), Macmillan, 1949.
8. J.H. ARGYRIS, *Energy Theorems and Structural Analysis* , Butterworth, 1960 (reproducido de *Aircraft Eng.*, 1954–55).
9. M.J. TURNER, R.W. CLOUGH, H.C. MARTIN y L.J. TOPP, "Stiffness and deflection analysis of complex structures", *J. Aero. Sci.*, **23**, 805–23, 1956.
10. R.W. CLOUGH, "The finite element in plane stress analysis", *Proc. 2nd. A.S.C.E. Conf. on Electronic Computation*, Pittsburg, Pa., Sept. 1960.
11. LORD RAYLEIGH (J.W. STRUTT), "On the theory of resonance", *Trans. Roy. Soc. (London)*, **A 161**, 77–118, 1870.
12. W. RITZ, "Über eine neue Methode zur Lösung gewissen Variations - Probleme der mathematischen Physik", *J. Reine Angew. Math.*, **135**, 1–61, 1909.
13. R. COURANT, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration", *Bull. Am. Math. Soc.*, **49**, 1–23, 1943.
14. W. PRAGER y J.L. SYNGE, "Approximation in elasticity based on the concept of functions space", *Q.J. Appl. Math.*, **5**, 241–69, 1947.
15. L.F. RICHARDSON, "The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems", *Trans. Roy. Soc. (London)*, **A210**, 307–57, 1910.
16. H. LIEBMAN, "Die angenäherte Ermittlung: harmonischen, functionen und konformer Abbildung", *Sitzber. Math. Physik Kl. Bayer Akad. Wiss. München*, **3**, 65–75, 1918.
17. R.S. VARGA, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, 1962.
18. C.F. GAUSS, Véase *Carl Friedrich Gauss Werks*, Vol. VII, Göttingen, 1871.
19. B.G. GALERKIN, "Solución en serie de algunos problemas de equilibrio elástico de barras y placas" (ruso), *Vestn. Inzh. Tech.*, **19**, 897–908, 1915.
20. C.B. BIEZENO y J.J. KOCH, "Over een Nieuwe Methode ter Berekening van Vlokke Platen", *Ing. Grav.*, **38**, 25–36, 1923.
21. N.A. PAYNE y B.M. IRONS, Comunicación particular, 1963.
22. R.K. LIVESLEY, *Matrix Methods in Structural Analysis*, 2nd. ed., Pergamon Press, 1975.
23. J.S. PRZEMIENIECKI, *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, 1968.
24. H.C. MARTIN, *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*, McGraw-Hill, 1966.

Capítulo 2

ELEMENTOS FINITOS DE UN CONTINUO ELÁSTICO. MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS

2.1 Introducción

El proceso de aproximar el comportamiento de un continuo mediante "elementos finitos" que se comportan de una forma similar a los elementos reales, "discretos", descritos en el capítulo anterior, se puede introducir mediante aplicaciones físicas específicas o como un concepto matemático general. Se ha escogido aquí seguir el primer camino, limitando la perspectiva a un conjunto de problemas asociados a la mecánica estructural, que históricamente fueron los primeros a los que se aplicó el método de los elementos finitos. En el Capítulo 9 se generalizarán los conceptos y se mostrará que las ideas básicas son ampliamente aplicables.

Son muchas las facetas de la ingeniería en las que se precisa determinar la distribución de tensiones y deformaciones en un continuo elástico. Los casos particulares de dichos problemas pueden variar desde problemas bidimensionales de tensión o deformación plana, sólidos de revolución y flexión de placas y láminas, hasta el análisis más general de sólidos tridimensionales. En todos los casos, el número de interconexiones entre un "elemento finito" cualquiera rodeado por fronteras imaginarias y los elementos vecinos a él es infinito. Es difícil, por consiguiente, ver a primera vista cómo pueden discretizarse problemas de este tipo de la forma descrita en el capítulo precedente para casos de estructuras más simples. Esta dificultad puede superarse (y efectuarse la aproximación) de la siguiente manera:

1. El continuo se divide, mediante líneas o superficies imaginarias, en un número de "elementos finitos".
2. Se supone que los elementos están conectados entre sí mediante un número discreto de puntos, que llamaremos *nodos*, situados en sus contornos. Los desplazamientos de estos nodos serán las incógnitas fundamentales del problema, tal como ocurre en el análisis simple de estructuras.
3. Se toma un conjunto de funciones que definan de manera única el campo de desplazamientos dentro de cada "elemento finito" en función de los

desplazamientos nodales de dicho elemento.

4. Estas funciones de desplazamientos definirán entonces de manera única el estado de deformación dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales. Estas deformaciones, junto con las deformaciones iniciales y las propiedades constitutivas del material, definirán el estado de tensiones en todo el elemento y, por consiguiente, también en sus contornos.
5. Se determina un sistema de fuerzas concentradas en los nodos, tal que equilibre las tensiones en el contorno y cualesquiera cargas repartidas, resultando así una relación entre fuerzas y desplazamientos de la forma de la Ec. (1.3).

Una vez alcanzado este punto, el procedimiento para encontrar la solución puede seguir el procedimiento general descrito con anterioridad.

Es evidente que hemos introducido una serie de aproximaciones. En primer lugar, no siempre es fácil asegurar que las funciones de desplazamientos escogidas satisfacen las condiciones de continuidad de los desplazamientos entre elementos adyacentes. Por consiguiente, esta condición de compatibilidad puede no cumplirse en el contorno de los elementos (aunque es evidente que dentro de cada elemento sí se cumplirá, a causa de la unicidad de los desplazamientos implicada en el hecho de que los mismos estén representados por funciones continuas). En segundo lugar, al concentrar las fuerzas equivalentes en los nodos, las condiciones de equilibrio sólo se cumplirán para el conjunto del continuo. Normalmente ocurrirá que tales condiciones no se cumplirán en zonas localizadas dentro y en el contorno de cada elemento.

Será misión del ingeniero escoger la forma de los elementos y de las funciones de desplazamiento para cada caso particular, debiendo usar de su ingenio y habilidad, dependiendo el grado de aproximación que se alcance del uso que haga de esas dos facultades.

El procedimiento que acaba de esbozarse se conoce como método de los desplazamientos.[1,2]

Hasta aquí, el procedimiento descrito se justifica sólo intuitivamente, pero de hecho lo que se ha sugerido es equivalente a la minimización de la energía potencial total del sistema, siendo función ésta de un campo de desplazamientos impuesto. Si este campo de desplazamientos se define adecuadamente, deberá producirse convergencia hacia la solución correcta. El proceso es, por consiguiente, equivalente al conocido método de Ritz. Esta equivalencia se demostrará en una sección posterior de este capítulo, en donde se analizarán también los necesarios criterios de convergencia.

El reconocimiento de equivalencias entre el método de los elementos finitos y un proceso de minimización ha sido reciente[2,3]. Sin embargo, Courant en 1943[4]† y Prager y Synge[5] en 1947 propusieron métodos que son en esencia idénticos.

Esta generalización de las bases del método de los elementos finitos permite su ampliación a problemas continuos donde sea posible la formulación variacional, y lo cierto es que ya se dispone de procedimientos generales para discretizar mediante elementos finitos cualquier problema definido por un sistema de ecuaciones diferenciales adecuadamente constituido. Tales generalizaciones se estudiarán en el Capítulo 9, y a lo largo del libro se aplicarán a diversos problemas no pertenecientes al campo de las estructuras. Se verá que los métodos descritos en este capítulo se reducen esencialmente a la aplicación de funciones de prueba y aproximaciones de Galerkin a un caso especial de la mecánica de sólidos.

2.2 Formulación directa de las características de un elemento finito

Las "recetas" para deducir las características de un elemento finito de un continuo, que fueron esbozadas en líneas generales, serán presentadas ahora bajo una forma matemática más detallada.

Es conveniente obtener los resultados de una forma general aplicable a cualquier situación, pero para evitar la introducción de conceptos más complicados se ilustrarán las expresiones generales con un ejemplo muy sencillo de análisis de una rebanada delgada sometida a tensión plana. Para ello se divide la región en elementos triangulares como se muestra en la Figura 2.1. Se subrayarán las relaciones que tengan carácter general. De nuevo se empleará notación matricial.

2.2.1 *La función de desplazamientos.* Un elemento finito típico, e, se define por sus nodos i, j, m, etc., y por su contorno formado por líneas rectas. Aproximemos los desplazamientos $\mathbf{u}$ de cualquier punto del elemento mediante un vector columna, $\hat{\mathbf{u}}$:

$$\boxed{\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i^e = [\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j, \ldots] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \end{Bmatrix}^e = \mathbf{N}\mathbf{a}^e} \tag{2.1}$$

donde las componentes de $\mathbf{N}$ son en general funciones de posición dadas y $\mathbf{a}^e$ es un vector formado por los desplazamientos nodales del elemento considerado.

† Parece que ya Courant en 1923 anticipó la esencia del método de los elementos finitos de una manera general, y en particular para el caso de un elemento triangular, en un artículo con el título "On a convergence principle in calculus of variations". Kön. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Nachrichten. Berlín, 1923. Afirma: "Imaginamos una malla de triángulos cubriendo el dominio... los criterios de convergencia son válidos para cada dominio triangular".

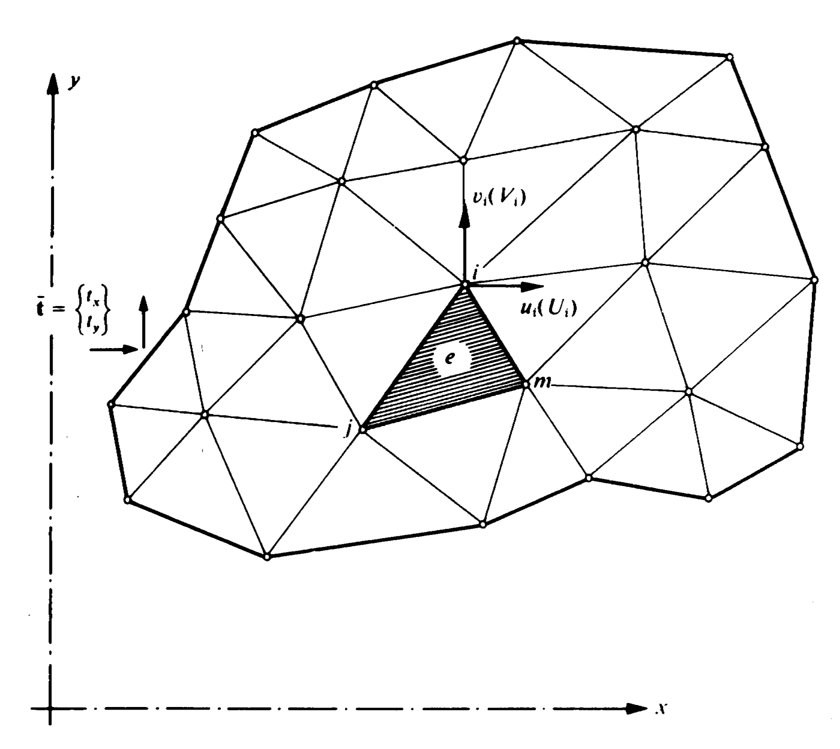


Figura 2.1 Región sometida a tensión plana dividida en elementos finitos.

Por ejemplo, en el caso particular de tensión plana,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix}$$

representa los movimientos horizontal y vertical de un punto cualquiera del elemento, y

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$$

los correspondientes desplazamientos de un nodo i.

Las funciones $\mathbf{N}_i$, $\mathbf{N}_j$, $\mathbf{N}_m$ han de escogerse de manera que al sustituir en la Ec. (2.1) las coordenadas de los nodos se obtengan los correspondientes desplazamientos nodales. Evidentemente, en general,

$$\mathbf{N}_i(x_i, y_i) = \mathbf{I} \quad \text{(matriz unidad)}$$

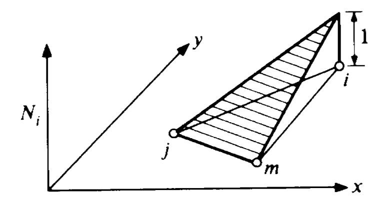


Figura 2.2

mientras que

$$\mathbf{N}_i(x_j, y_j) = \mathbf{N}_i(x_m, y_m) = 0, \qquad \text{etc.}$$

condiciones que cumplen funciones lineales de x e y apropiadas.

Si las dos componentes del desplazamiento se interpolan de la misma manera, podremos escribir

$$\mathbf{N}_i = N_i \mathbf{I}$$

y obtener N_i de la Ec. (2.1), teniendo en cuenta que $N_i = 1$ para x_i e y_i y cero en los otros vértices.

La interpolación lineal más evidente en el caso de un triángulo nos dará formas para N_i como la que se muestra en la Figura 2.2. En el Capítulo 3 se dan expresiones detalladas de este tipo de interpolaciones lineales, pero en el punto en que nos encontramos pueden ser ya fácilmente deducidas por el lector.

Las funciones de prueba $\mathbf{N}$ se llamarán *funciones de forma* y como se verá más adelante juegan un papel decisivo en el análisis por elementos finitos.

2.2.2 *Deformaciones.* Una vez conocidos los desplazamientos para todos los puntos del elemento, pueden determinarse las "deformaciones" en cualquier punto. Éstas darán siempre por resultado una relación que podrá escribirse como sigue en forma matricial

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\mathbf{u}} \tag{2.2}$$

donde $\mathbf{S}$ es un operador lineal apropiado. Mediante la ecuación (2.1), la expresión anterior puede aproximarse como

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a}} \tag{2.3}$$

con

$$\boxed{\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{N}} \tag{2.4}$$

En el caso de tensión plana, las deformaciones más importantes son las que se producen en el plano y se expresan en función de los desplazamientos mediante las conocidas relaciones[6] que definen el operador **S**:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}, & 0 \\ 0, & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}, & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Determinadas ya las funciones de forma $\mathbf{N}_i$, $\mathbf{N}_j$ y $\mathbf{N}_m$, es fácil obtener la matriz **B**. Si adoptamos una expresión lineal para dichas funciones, las deformaciones serán constantes en todo el elemento.

2.2.3 *Tensiones.* En general, el material contenido dentro del contorno del elemento puede estar sujeto a deformaciones iniciales, tales como las debidas a cambios de temperatura, retracciones, cristalización, etc. Si representamos dichas deformaciones por $\boldsymbol{\varepsilon}_0$, las tensiones se deberán a la diferencia entre las deformaciones reales y las iniciales.

Conviene además suponer que al comienzo del análisis el cuerpo puede estar sometido a un sistema conocido de tensiones residuales iniciales $\boldsymbol{\sigma}_0$, que muy bien podrían medirse, pero cuya predicción sería imposible sin un conocimiento completo de la historia del material. Estas tensiones pueden sencillamente añadirse a la ecuación general. Así pues, admitiendo un comportamiento elástico lineal del tipo más general, la relación entre tensiones y deformaciones será lineal y de la forma

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0} \tag{2.5}$$

donde **D** es una matriz de elasticidad que contiene las propiedades del material apropiadas.

Por otra parte, para el caso particular de tensión plana, hemos de considerar tres componentes de tensión que se corresponden con las deformaciones definidas anteriormente. Dichas tensiones, en la notación que ya nos es familiar, son

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

y la matriz **D** se obtendrá sencillamente de la relación usual entre tensiones y deformaciones para un medio isótropo[6]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - (\varepsilon_x)_0 &= \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y \\ \varepsilon_y - (\varepsilon_y)_0 &= -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y \\ \gamma_{xy} - (\gamma_{xy})_0 &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned}$$

y resolviendo el sistema

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

2.2.4 *Fuerzas nodales equivalentes.* Definamos

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i^e \\ \mathbf{q}_j^e \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

como las fuerzas que actúan en los nodos, siendo éstas estáticamente equivalentes a las tensiones en el contorno y a las fuerzas distribuidas que actúan sobre el elemento. Cada una de las fuerzas $\mathbf{q}_i^e$ debe tener el mismo número de componentes que el desplazamiento nodal $\mathbf{a}_i$ correspondiente y debe ordenarse en las direcciones apropiadas.

Las fuerzas distribuidas **b** son por definición las que actúan por unidad de volumen en direcciones correspondientes a las de los desplazamientos **u** de ese punto.

En el caso particular de tensión plana, las fuerzas nodales son

$$\mathbf{q}_i^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}$$

con las componentes U y V en correspondencia con las direcciones de los desplazamientos u y v, y la carga repartida es

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}$$

en la que b_x y b_y son las componentes de la "fuerza másica".

Para establecer la equivalencia estática entre las fuerzas nodales y las tensiones actuantes en el contorno y las fuerzas distribuidas, el procedimiento más sencillo es imponer un desplazamiento arbitrario (virtual) a los nodos e igualar el trabajo exterior realizado por las fuerzas nodales al efectuado anteriormente por las tensiones y fuerzas distribuidas durante dicho desplazamiento.

Sea $\delta \mathbf{a}^e$ un desplazamiento virtual de los nodos. Éste origina, según las Ecs. (2.1) y (2.2), desplazamientos y deformaciones dentro del elemento iguales, respectivamente, a

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N}\, \delta \mathbf{a}^e \qquad \text{y} \qquad \delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\, \delta \mathbf{a}^e \tag{2.6}$$

El trabajo efectuado por las fuerzas nodales es igual a la suma de los productos de las componentes de cada una de las fuerzas por sus correspondientes desplazamientos, es decir, en lenguaje matricial

$$\delta \mathbf{a}^{eT} \mathbf{q}^e \tag{2.7}$$

Análogamente, el trabajo interno por unidad de volumen efectuado por las tensiones y fuerzas distribuidas es

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \tag{2.8}$$

o†

$$\delta \mathbf{a}^T (\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{N}^T \mathbf{b}) \tag{2.9}$$

Igualando el trabajo externo con el trabajo interno total obtenido al integrar sobre el volumen del elemento, V^e, se obtiene

$$\delta \mathbf{a}^{eT} \mathbf{q}^e = \delta \mathbf{a}^{eT} \left(\int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}\, d(\mathrm{vol}) - \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b}\, d(\mathrm{vol}) \right) \tag{2.10}$$

Como esta relación es válida para cualquier desplazamiento virtual, podemos igualar los multiplicandos. Así pues,

$$\boxed{\mathbf{q}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}\, d(\mathrm{vol}) - \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b}\, d(\mathrm{vol})} \tag{2.11}$$

Esta expresión es válida con carácter general cualesquiera que sean las relaciones entre tensiones y deformaciones. En el caso de la ley lineal expresada por la Ec. (2.5), podemos escribir la Ec. (2.11) como

$$\boxed{\mathbf{q}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e + \mathbf{f}^e} \tag{2.12}$$

donde

† Adviértase que, según las reglas del álgebra matricial, la traspuesta de un producto de matrices verifica

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

$$\boxed{\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}\, d(\mathrm{vol})} \tag{2.13a}$$

y

$$\boxed{\mathbf{f}^e = -\int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b}\, d(\mathrm{vol}) - \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0\, d(\mathrm{vol}) + \int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0\, d(\mathrm{vol})} \tag{2.13b}$$

En la última ecuación, los tres términos representan las fuerzas debidas respectivamente a las fuerzas másicas, las deformaciones iniciales y las tensiones iniciales. Estas relaciones presentan características similares a las que se obtuvieron usando los elementos estructurales discretos que se describen en el Capítulo 1.

Si las tensiones iniciales forman un sistema en equilibrio, como puede ser el caso de tensiones residuales, las fuerzas obtenidas del término correspondiente de la Ec. (2.13b) serán idénticamente nulas tras el ensamblaje. Por consiguiente, con frecuencia se omite la evaluación de dichas fuerzas. Sin embargo, como ejemplo, cuando se fabrica una pieza a partir del material en bruto en el que se encuentran presentes tensiones residuales, o si se hace una excavación en roca en la que existan tensiones tectónicas conocidas, la eliminación de material producirá la aparición de fuerzas no compensadas que son resultado del término en cuestión.

Para el caso particular del elemento triangular bajo tensión plana, estas relaciones se obtendrán con la apropiada sustitución. Ya hemos señalado que la matriz $\mathbf{B}$, en este caso, es independiente de las coordenadas, por lo que la integración resultará especialmente sencilla.

La interconexión y solución del conjunto de los elementos sigue los sencillos procedimientos de análisis de estructuras expuestos en el Capítulo 1. En general, podrá haber fuerzas externas concentradas actuando en los nodos y habrá de añadirse el vector

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{Bmatrix} \tag{2.14}$$

al considerar el equilibrio de los nodos.

Hemos de hacer aquí una observación relativa a los elementos cercanos al contorno. Si se especifican los desplazamientos en el contorno, no se suscita problema particular alguno. Sin embargo, supongamos el contorno sometido a una carga exterior $\bar{\mathbf{t}}$ distribuida por unidad de superficie. Entonces tendremos que añadir un término adicional a las fuerzas nodales del elemento cuyo contorno posee una superficie A^e. Considerando el trabajo virtual, este término será simplemente

$$- \int_{A^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, d(\text{área}) \tag{2.15}$$

con la integración extendida a la superficie del contorno del elemento. Se advertirá que $\bar{\mathbf{t}}$ debe tener el mismo número de componentes que $\mathbf{u}$ para que la expresión anterior sea válida.

En la Figura 2.1 se muestra dicho elemento de contorno siempre para el caso particular de tensión plana. Las integrales de este tipo no se calculan explícitamente. Con frecuencia, el analista siguiendo su "intuición física", sustituye la carga que actúa en el contorno por cargas concentradas en los nodos, calculando éstas directamente mediante consideraciones de estática. En el caso particular considerado, los resultados son idénticos.

Una vez obtenidos los desplazamientos nodales por resolución de las ecuaciones globales del tipo "estructural", se pueden calcular las tensiones en cualquier punto del elemento utilizando las Ecs. (2.3) y (2.5), y obtener

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{a}^e - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\sigma}_0 \tag{2.16}$$

en la cual se reconocerán inmediatamente los términos típicos que aparecen en la Ec. (1.4), siendo la matriz de tensiones del elemento

$$\mathbf{S}^e = \mathbf{D}\mathbf{B} \tag{2.17}$$

A esta expresión hemos de añadir las tensiones

$$\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon_0} = -\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\sigma}_0 \tag{2.18}$$

Es necesario un comentario para aclarar la ausencia del término correspondiente a tensiones originadas por cargas distribuidas $\boldsymbol{\sigma}_p^e$. Ello se debe al hecho de que no se ha considerado el equilibrio interno dentro de cada elemento, y sólo se han establecido las condiciones de equilibrio globales.

2.2.5 *Concepto generalizado de desplazamientos, deformaciones y tensiones.* El significado de desplazamientos, deformaciones y tensiones en el caso presentado de tensión plana es obvio. En muchas otras aplicaciones, que en este libro se expondrán más adelante, esta terminología puede aplicarse a otras cantidades menos evidentes. Por ejemplo, si consideramos los elementos de una placa, el "desplazamiento" puede estar caracterizado por la flecha y las componentes del giro en un punto particular de la placa. Las "deformaciones" se definirán entonces como las curvaturas de la superficie media y las "tensiones" como los correspondientes momentos flectores.

Todas las expresiones deducidas aquí tienen validez general con la condición de que la suma de los productos de los desplazamientos y las fuerzas correspondientes represente realmente el trabajo exterior efectuado, y la de

los productos de las "deformaciones" y las correspondientes "tensiones" sea el trabajo interno total.

2.3 Generalización al dominio completo. Abandono del concepto de fuerza nodal

En la sección precedente se aplicó el principio de los trabajos virtuales a un elemento aislado, y se mantuvo el concepto de fuerza nodal equivalente. Por ello, al método convencional de establecer directamente el equilibrio seguía la aplicación del principio del ensamblaje.

La idea de sustituir la interacción continua por fuerzas nodales aportadas por los elementos constituye una dificultad conceptual, aunque resulte considerablemente atractiva para los ingenieros "prácticos" y a veces permita una interpretación que de otra forma no resultaría evidente para los matemáticos, generalmente más rigurosos. Sin embargo, no hay necesidad de considerar cada elemento por separado y el razonamiento de la sección anterior puede aplicarse directamente al continuo completo.

La ecuación (2.1) puede interpretarse como válida para toda la estructura, es decir,

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{N}}\mathbf{a} \tag{2.19}$$

en la que $\mathbf{a}$ representa todos los puntos nodales, y

$$\overline{\mathbf{N}}_i = \mathbf{N}_i^e \tag{2.20}$$

cuando el punto en cuestión esté dentro de un elemento particular e y siendo i un punto asociado a dicho elemento. Si el punto i no está dentro del elemento,

$$\overline{\mathbf{N}}_i = 0 \tag{2.21}$$

La matriz $\overline{\mathbf{B}}$ se puede definir similarmente y suprimiremos el índice de barra suponiendo simplemente que las funciones de forma, etc., están definidas en toda la región V.

Podemos ahora escribir que para cualquier desplazamiento virtual $\delta\mathbf{a}$ la suma del trabajo interno y externo para todo el dominio es

$$-\delta\mathbf{a}^T\mathbf{r} = \int_V \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\, dV + \int_A \delta\mathbf{u}^T\bar{\mathbf{t}}\, dA - \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\, dV \tag{2.22}$$

En la ecuación anterior $\delta\mathbf{a}$, $\delta\mathbf{u}$, $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ pueden ser completamente arbitrarios, siempre que provengan de la suposición de un campo continuo de desplazamientos. Si suponemos, por conveniencia, que son simples variaciones ligadas por las relaciones (2.19) y (2.23), y sustituyendo la relación constitutiva (2.5), se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas

$$\boxed{\mathbf{Ka} + \mathbf{f} = \mathbf{r}} \tag{2.23}$$

donde

$$\boxed{\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dV} \tag{2.24a}$$

y

$$\boxed{\mathbf{f} = -\int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, dV - \int_A \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, dA - \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \, dV + \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \, dV} \tag{2.24b}$$

Las integraciones se extienden a todo el volumen V y a toda la superficie A donde se especifican las fuerzas de superficie.

Es inmediatamente evidente de lo anterior, que

$$\boxed{\mathbf{K}_{ij} = \sum \mathbf{K}_{ij}^e} \qquad \boxed{\mathbf{f}_i = \sum \mathbf{f}_i^e} \tag{2.25}$$

en virtud de la propiedad de las integrales definidas, que establece que la integral total es la suma de las integrales de las partes:

$$\int_V (\quad) \, dV = \sum \int_{V^e} (\quad) \, dV \tag{2.26}$$

El mismo razonamiento es evidentemente válido para las integrales de superficie expresadas en la Ec. (2.25). Vemos que el "secreto" para que la aproximación tenga las propiedades del "sistema discreto general del Capítulo 1" reside simplemente en escribir la aproximación en forma integral.

Tanto las reglas para el ensamblaje como el resto de las conclusiones alcanzadas se han obtenido prescindiendo del concepto de "fuerzas entre elementos". En lo que queda de este capítulo se prescindirá del índice de elemento, a menos que se necesite específicamente. Tampoco se hará diferencia entre las funciones de forma para el elemento y para el continuo.

No obstante, se suscita inmediatamente un punto importante. Al considerar el trabajo virtual para el continuo completo [Ec. (2.22)] e igualar éste a la suma de las contribuciones de todos los elementos, se supone implícitamente que no se desarrollan discontinuidades entre elementos adyacentes. Si apareciesen tales discontinuidades, habría que añadir una contribución igual al trabajo efectuado por las tensiones en las separaciones entre elementos.

En otras palabras: se precisa que los términos integrados en la Ec. (2.26) sean finitos. Estos términos provienen de las funciones de forma N_i, usadas para definir el desplazamiento $\mathbf{u}$ [mediante la Ec. (2.14)], y sus derivadas, asociadas a la definición de deformación [viz. Ec. (2.3)]. Si, por ejemplo, las "deformaciones", están definidas por las primeras derivadas de las funciones N, éstas deben ser continuas. En la Figura 2.3 se ve cómo las primeras derivadas de funciones continuas pueden presentar "saltos", para seguir estando acotadas, mientras que las segundas derivadas pueden ser infinitas, Llamamos a tales funciones C_0 continuas.

En algunos problemas la "deformación" en sentido generalizado puede estar definida por derivadas segundas. En tales casos se precisa obviamente que tanto la función N como su pendiente (primera derivada) sean continuas. Tales funciones son más difíciles de derivar, pero se hará uso de ellas en problemas de placas y láminas. A este tipo de funciones se les llama C_1 continuas.

2.4 El método de los desplazamientos como minimización de la energía potencial total

El principio de los trabajos virtuales utilizado en las secciones anteriores asegura el cumplimiento de las condiciones de equilibrio dentro de los límites establecidos por la configuración de desplazamientos supuesta. El equilibrio sólo será completo si la igualdad de los trabajos virtuales se cumple para toda variación arbitraria de los desplazamientos (imponiendo sólo condiciones de contorno).

Si el número de parámetros de $\mathbf{a}$, que define los desplazamientos, se incrementa ilimitadamente, siempre podremos asegurar entonces una mayor aproximación de todas las condiciones de equilibrio.

El principio de los trabajos virtuales establecido en la Ec. (2.22) puede replantearse de manera diferente si las cantidades virtuales $\delta\mathbf{a}$, $\delta\mathbf{u}$ y $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ se consideran como *variaciones* (o diferenciales) de las cantidades reales.

Así, por ejemplo, podemos escribir

$$\delta\left(\mathbf{a}^T\mathbf{r} + \int_V \mathbf{u}^T\mathbf{b} \, dV + \int_A \mathbf{u}^T\bar{\mathbf{t}} \, dA\right) = -\delta W \tag{2.27}$$

para los tres primeros términos de la Ec. (2.22), donde W representa *la energía potencial de las cargas externas*. La expresión anterior es cierta si $\mathbf{r}$, $\mathbf{b}$ y $\bar{\mathbf{t}}$ son conservativas (o independientes de los desplazamientos).

Para ciertos materiales, el último término de la Ec. (2.22) puede escribirse

$$\delta U = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV \tag{2.28}$$

donde U es la "energía de deformación" del sistema. Para el material elástico lineal descrito por la Ec. (2.5), el lector puede verificar que

$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \, dV - \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \, dV + \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \, dV \tag{2.29}$$

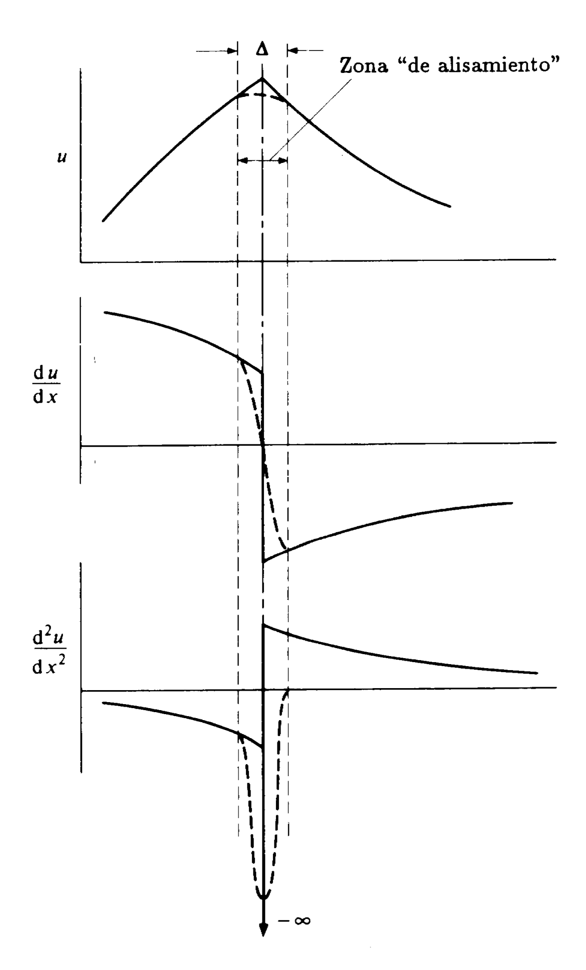


Figura 2.3 Diferenciación de una función con la primera derivada discontinua (continuidad C_0).

proporcionará por diferenciación la expresión correcta, siempre que $\mathbf{D}$ sea una matriz simétrica (realmente, se trata de una condición necesaria para que exista la función unívoca U).

Así, en vez de la Ec. (2.22), podemos escribir simplemente

$$\delta(U+W)=\delta(\Pi)=0 \tag{2.30}$$

donde la cantidad Π recibe el nombre de *energía potencial total.*

La ecuación anterior significa que, para asegurar el equilibrio, la

energía potencial total debe ser estacionaria para las variaciones de los desplazamientos admisibles. Las ecuaciones de elementos finitos deducidas en la sección anterior [Ec. (2.23) y (2.25)] son simplemente la expresión de esta variación con respecto a un número de desplazamientos reducido a un número finito de parámetros $\mathbf{a}$, y podrían escribirse

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{a}}=\left\{\begin{array}{c}\dfrac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{a}_1}\\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{a}_2}\\ \vdots\end{array}\right\}=0 \tag{2.31}$$

Se puede demostrar que en problemas de elasticidad, la energía potencial total no sólo es estacionaria, sino también mínima.[7] *Así pues, el método de los elementos finitos busca dicho mínimo con la condición de que satisfaga una determinada configuración de desplazamientos.*

A mayor número de grados de libertad, tanto más se acercará la solución a la exacta, la cual asegura el equilibrio completo, siempre y cuando los desplazamientos tiendan, en el límite, hacia los desplazamientos verdaderos. Podríamos de esta forma deducir las condiciones necesarias para la convergencia de los procesos de elementos finitos. No obstante, aplazamos este estudio para una sección posterior.

Es interesante observar que, si bien el equilibrio verdadero requiere la minimización completa de la energía potencial total, Π, una solución aproximada mediante elementos finitos proporciona siempre una energía aproximada Π mayor que la correcta. Por consiguiente, *siempre se obtiene una cota superior en el valor de la energía potencial total.*

Si la función Π pudiera especificarse *a priori*, entonces las ecuaciones de elementos finitos se podrían deducir directamente mediante diferenciación tal como se establece en la expresión (2.31).

El conocido método de aproximación de Rayleigh[8]-Ritz[9], utilizado con frecuencia en análisis elástico, sigue precisamente ese procedimiento. Se formula una expresión para la energía potencial y la configuración de desplazamientos se expresa en función de un conjunto finito de parámetros indeterminados. Minimizando la energía potencial total con respecto a esos parámetros se obtiene un conjunto de ecuaciones simultáneas. Así pues, el método de los elementos finitos descrito hasta este punto es idéntico al procedimiento de Rayleigh-Ritz. La única diferencia está en la manera de imponer los desplazamientos. En el método de Ritz utilizado tradicionalmente, éstos se especifican mediante expresiones válidas en toda la región, obteniéndose por consiguiente ecuaciones simultáneas sin forma de banda y la matriz de coeficientes está llena. En los procesos por elementos finitos, dicha especificación se hace parceladamente; cada parámetro nodal influencia sólo a los elementos adyacentes y así se obtiene una matriz de

coeficientes con muchos términos nulos y normalmente en banda.

Por su naturaleza, el método convencional de Ritz queda limitado a porciones de la región total con formas geométricas relativamente sencillas, mientras que en el análisis por elementos finitos esta limitación sólo se da para el elemento en sí. Por consiguiente, empleando elementos de formas relativamente sencillas podemos obtener las configuraciones más complicadas y realistas mediante un ensamblaje adecuado.

Otra diferencia estriba en la usual asociación del parámetro indeterminado a un desplazamiento nodal particular. Esto permite una interpretación física sencilla de gran valor para el ingeniero. Indudablemente, mucha de la gran popularidad del método de los elementos finitos se debe a este hecho.

2.5 Criterios de convergencia

Las funciones de forma supuestas reducen los infinitos grados de libertad del sistema y es posible que nunca obtengamos el verdadero valor mínimo de la energía, independientemente de lo tupida que sea la subdivisión. Para asegurar la convergencia hacia el resultado correcto han de cumplirse determinadas condiciones. Por ejemplo, es obvio que una función de desplazamientos ha de ser capaz de representar la distribución real de los desplazamientos tan aproximadamente como sea posible. Veremos que esto no ocurre cuando las funciones que hayamos elegido sean tales que se produzcan deformaciones en algún elemento cuando éste se someta a los desplazamientos propios de un cuerpo rígido. Así pues, el primer criterio que una función de desplazamientos debe satisfacer es el siguiente:

> *Criterio* 1. La función de desplazamientos debe elegirse de tal forma que no permita deformaciones de un elemento cuando los desplazamientos nodales se deban a un desplazamiento del conjunto como cuerpo rígido.

Esta condición, evidente por sí misma, puede violarse fácilmente si se emplean ciertos tipos de funciones; por consiguiente, ha de ponerse cuidado al elegir las funciones de desplazamientos.

Un segundo criterio se deriva de los mismos razonamientos anteriores. Es evidente que a medida que los elementos se hagan más pequeños tanto más prevalecerán en ellos condiciones de deformación constante. Si de hecho existen dichas condiciones, será pues conveniente escoger el tamaño de los elementos que las reproduzcan exactamente para conseguir un buen grado de aproximación. Se pueden encontrar funciones que satisfagan el primer criterio, pero que requieran al mismo tiempo que las deformaciones varíen dentro del elemento, aún cuando los desplazamientos nodales sean compatibles con un estado de deformación constante. Dichas funciones no convergen bien en general hacia la solución exacta y no pueden, ni en el límite, representar la distribución verdadera de deformaciones. Así pues, el segundo criterio se puede formular como sigue:

> *Criterio* 2. La función de desplazamientos tiene que ser tal que si los desplazamientos nodales son compatibles con un estado de deformación constante se obtenga realmente dicho estado de deformación constante. (El término "deformación" se emplea además en su sentido general.)

Se habrá observado que el Criterio 2 incorpora de hecho las condiciones exigidas por el Criterio 1, ya que los desplazamientos de un cuerpo rígido son casos particulares de deformación constante nula. Este criterio fue establecido originalmente por Bazeley *et al.*[10] en 1965. *Estrictamente, ambos criterios sólo necesitan ser satisfechos en el límite cuando el tamaño del elemento tiende a cero.* Sin embargo, al imponer estos criterios a elementos de tamaño finito se alcanza mayor grado de precisión, aunque en ciertas situaciones (tal como se ilustra en el análisis axial simétrico del Capítulo 4) la imposición del segundo no es posible o esencial.

Finalmente, como ya hemos mencionado en la Sección 2.3, en todos estos razonamientos se ha supuesto que la contribución del trabajo realizado en los contornos de separación entre elementos al trabajo virtual total es nulo. Por consiguiente, para asegurarnos que se cumple esta condición es necesario incluir el criterio siguiente:

> *Criterio* 3. Las funciones de desplazamientos deben elegirse de manera que las deformaciones que se producen en los límites de separación entre elementos sean finitas (aunque puedan ser indeterminadas).

Este criterio implica una cierta continuidad de los desplazamientos entre elementos. Si las deformaciones se definen mediante las derivadas primeras, como en el ejemplo de elasticidad plana citado aquí, sólo deberán ser continuos los desplazamientos. No obstante, si, como ocurre en los problemas de placas y láminas, las "deformaciones" se definen mediante las derivadas segundas de las flechas, deberán ser también continuas las derivadas primeras de éstas.[2]

Matemáticamente, los criterios anteriores forman parte del enunciado de "funcional complejo"; la discusión matemática debe buscarse en otros lugares.[11-16] La demostración "heurística" de las condiciones de convergencia ofrecida aquí es suficiente a efectos prácticos, con excepción de los casos más patológicos. En el Capítulo 9 se generalizarán todos estos criterios.

2.6 Error de discretización e índice de convergencia

En la sección anterior hemos admitido que la aproximación de los desplazamientos representada por la ecuación (2.1) nos proporcionará la solución exacta en el límite, si el tamaño h de los elementos se va haciendo

cada vez más pequeño. Los argumentos para ello son sencillos: puesto que el desarrollo es capaz de reproducir en el límite cualquier distribución de desplazamientos concebible dentro del continuo, y además, como la solución de cada aproximación es única, aquél debe proporcionar en el límite, cuando $h \to 0$, la solución exacta. Y lo cierto es que en algunos casos, dicha solución exacta puede alcanzarse con un número finito de subdivisiones (o incluso con un solo elemento) si el *desarrollo polinómico utilizado para ese elemento puede ajustarse exactamente a la solución correcta*. Así, por ejemplo, si la solución exacta es un polinomio de segundo grado y las funciones de forma incluyen todos los polinomios de ese grado, la aproximación nos proporcionará la solución exacta.

Este último argumento puede ayudarnos a determinar el grado de convergencia del método de los elementos finitos, puesto que la solución exacta puede siempre desarrollarse en serie polinómica en las proximidades de cualquier punto (o nodo) i,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right)_i (x - x_i) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right)_i (y - y_i) + \cdots \tag{2.32}$$

Si en el interior de un elemento de "tamaño" h se emplea un desarrollo polinómico de grado p, éste podrá ajustarse localmente al desarrollo de Taylor hasta dicho grado y, como x e y son del orden de magnitud de h, el error en $\mathbf{u}$ será del orden $O(h^{p+1})$. Así, por ejemplo, en el problema de elasticidad plana discutido anteriormente hemos empleado un desarrollo lineal y $p = 1$; por consiguiente, debemos esperar un grado de *convergencia* del orden $O(h^2)$, lo cual implica que el error en los desplazamientos se reducirá a 1/4 si el tamaño de los elementos de la malla se reduce a la mitad.

Mediante un argumento similar, las deformaciones (o las tensiones) que vienen dadas por las derivadas m-ésimas de los desplazamientos, convergerían con un error de $O(h^{p+1-m})$, y para $m = 1$ en el ejemplo anterior, tendríamos que el error de convergencia sería $O(h)$. La energía de deformación que viene dada por el cuadrado de las tensiones exhibirá un error de $O(h^{2(p+1-m)})$ u $O(h^2)$ para el ejemplo de tensión plana.

Desde el punto de vista matemático, estos argumentos pueden parecer quizás banalidades "heurísticas"; sin embargo, son ciertos[16] y proporcionan correctamente el grado de convergencia. Frecuentemente se han desarrollado análisis matemáticos mucho más profundos no sólo para determinar el grado de convergencia, sino también para establecer el límite superior del error. Ninguno de ellos ha resultado hasta hoy especialmente útil, ya que generalmente vienen expresados en función de cantidades desconocidas *a priori*. Más aún, la simple determinación del grado de convergencia basta a menudo para extrapolar la solución hasta el resultado correcto. Así, por ejemplo, si los desplazamientos convergen con $O(h^2)$ y tenemos dos soluciones aproximadas u^1 y u^2 obtenidas con mallas de tamaños h y $h/2$, podemos

escribir, siendo u la solución exacta,

$$\frac{u^1 - u}{u^2 - u} = \frac{O(h^2)}{O(h/2)^2} = 4 \tag{2.33}$$

y de esta ecuación podemos predecir una solución casi exacta para u. Tal extrapolación fue introducida originalmente por Richardson[17] y es de gran utilidad si la convergencia es monótona.

Volveremos a la importante cuestión de la estimación del error debido al proceso de dicretización en el Capítulo 14 y se mostrará que hoy existen métodos mucho más precisos que los derivados del análisis de convergencia. De hecho, se están introduciendo métodos de refinamiento automático de mallas para conseguir una precisión preespecificada.

El error de discretización no es el único posible en los cálculos por elementos finitos. Además de los errores obvios que se pueden producir cuando se manejan computadores, los debidos al *redondeo* son siempre posibles. Como los computadores operan con números redondeados a un número finito de dígitos, cada vez que tenga lugar una sustracción de dos números "parecidos" se producirá una disminución del grado de precisión. En los procesos de resolución de sistemas de ecuaciones son necesarias muchas sustracciones y la precisión disminuye. También se incluyen aquí los problemas de condicionamiento de la matriz y cuando se emplee el método de los elementos finitos se deberá ser consciente en todo momento de las limitaciones de precisión que impiden alcanzar la solución exacta. Afortunadamente, con los computadores modernos que admiten un gran número de cifras significativas, estos errores con frecuencia son pequeños.

El tema de los errores provenientes de los procesos algebraicos se tratará en el Capítulo 15, que trata de los procesos de cálculo.

2.7 Funciones de desplazamientos discontinuos entre elementos. Elementos no conformes y el test de la parcela

En algunos casos es bastante difícil encontrar funciones de desplazamientos para un elemento que sean automáticamente continuas en todos los puntos del contorno de separación entre elementos adyacentes.

Como ya se ha señalado, la discontinuidad de los desplazamientos originará deformaciones infinitas en los contornos de separación, factor ignorado en la formulación presentada, ya que sólo hemos considerado las contribuciones de energía debida a los elementos en sí.

Sin embargo, si, en el límite, al disminuir el tamaño de las subdivisiones se restaura la continuidad, la formulación ya desarrollada seguirá tendiendo hacia la solución correcta. Esta situación se alcanza siempre si

a) un estado de deformación constante asegura automáticamente la continuidad de los desplazamientos, y

b) se satisface el criterio de deformación constante de la sección precedente.

Para comprobar que dicha continuidad se consigue para cualquier configuración de malla cuando se emplean elementos *no conformes* es necesario imponer, a un número arbitrario de elementos, desplazamientos nodales que correspondan con un estado de deformación constante determinado. Si *alcanzamos simultáneamente el equilibrio en todos los nodos sin necesidad de introducir ninguna fuerza nodal exterior, y se obtiene un estado de tensiones constante, es evidente que no se habrá perdido trabajo exterior a través de las discontinuidades entre elementos.*

Los elementos que cumplan este *test de la parcela* convergerán a la solución exacta, e incluso a veces los elementos no conformes presentan un comportamiento superior a los elementos conformes.

El test de la parcela fue introducido originalmente por Irons[10], y desde entonces ha demostrado ser una condición suficiente de convergencia.[16,18,19] El concepto de test de la parcela puede ser generalizado para dar información sobre la velocidad de convergencia que puede esperarse de un elemento.

En ocasiones encontraremos que el uso de elementos "no conformes" proporciona mejores resultados que aquéllos que satisfacen *a priori* los requisitos de convergencia. Volveremos a este problema con detalle en el Capítulo 11, donde se tratará ampliamente el test de la parcela.

2.8 Límite de la energía de deformación en el método de los desplazamientos

A pesar de que la solución aproximada obtenida mediante elementos finitos por el método de los desplazamientos siempre estima por exceso el valor de la energía potencial total Π (correspondiendo el mínimo a la solución exacta), ello no resulta de utilidad práctica inmediata. No obstante, en casos particulares es posible obtener un límite más útil.

Consideremos en particular el caso en el que no hayan deformaciones ni tensiones "iniciales". Por el principio de conservación de la energía, la energía de deformación será igual al trabajo efectuado por las fuerzas exteriores, el cual aumenta uniformemente desde cero.[20] Este trabajo vale $-\frac{1}{2}W$, donde W es la energía potencial de las fuerzas exteriores.

Así,

$$U + \frac{1}{2}W = 0 \tag{2.34}$$

o

$$\Pi = U + W = -U \tag{2.35}$$

donde se supone un campo de desplazamientos exacto o aproximado.

Así pues, en el caso anterior la solución aproximada siempre *estima por defecto* el valor de U y toda solución obtenida por el método de los desplazamientos suele ser conocida como *solución por defecto.*

Si sólo actúa una fuerza exterior puntual R, el límite de la energía de deformación informa inmediatamente que la deformación bajo dicha carga ha sido subestimada (puesto que $U = -\frac{1}{2}W = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T\mathbf{a}$). En casos de cargas exteriores más complicadas la utilidad de este valor límite es limitada, puesto que no pueden ponerse límites ni a desplazamientos ni a tensiones, que son las magnitudes que realmente interesan al ingeniero.

Es importante recordar que este límite de la energía de deformación sólo es válido si no existen tensiones o deformaciones iniciales.

La expresión de U se puede obtener, en este caso, de la Ec. (2.29) bajo la forma

$$U = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\, d(\text{vol}) \tag{2.36}$$

que utilizando la Ec. (2.2) se transforma simplemente en

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{a}^T\left[\int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\, d(\text{vol})\right]\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{K}\mathbf{a} \tag{2.37}$$

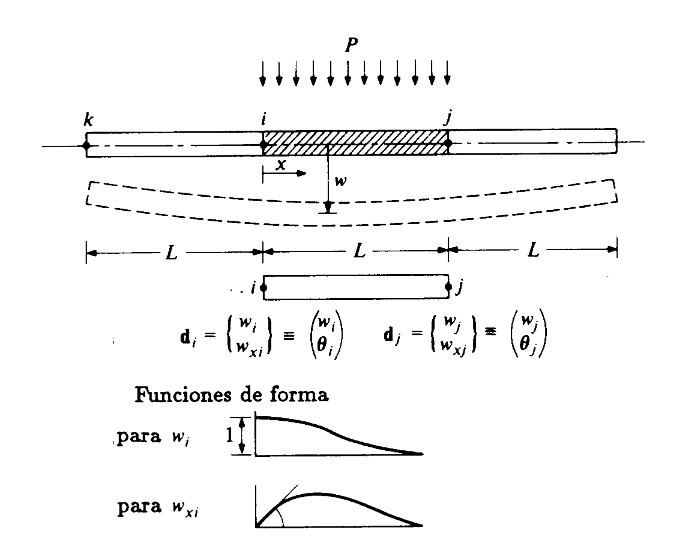
forma matricial "cuadrática" en la cual $\mathbf{K}$ es la matriz de rigidez discutida con anterioridad.

La anterior expresión de la energía es siempre positiva por consideraciones físicas. Se deduce, por consiguiente, que la matriz $\mathbf{K}$ que aparece en todos los ensamblajes de elementos finitos no sólo es simétrica sino que es "definida positiva" (propiedad establecida en realidad por la condición de que la forma cuadrática debe ser siempre mayor o igual a cero).

Esta característica es importante cuando se considera la resolución numérica de las ecuaciones simultáneas implicadas, ya que en el caso de ecuaciones "definidas positivas simétricas" aparecen simplificaciones.

2.9 Minimización directa

El hecho de que la aproximación por elementos finitos se reduce a minimizar la energía potencial total Π, definida en función de un número finito de parámetros nodales, nos lleva a formular el sistema de ecuaciones simultáneas representadas simbólicamente por la Ec. (2.31). Este procedimiento es el más corriente y conveniente, particularmente en los casos de soluciones lineales. Sin embargo, se podrían seguir otros procedimientos, bien conocidos en el campo de la optimización, para estimar el mínimo valor de Π. En este texto seguiremos utilizando el método de las ecuaciones simultáneas, pero el lector interesado puede muy bien tener presente que existen otros procedimientos.[21,22]



$$\mathbf{d}_i = \left\{ \begin{matrix} w_i \\ w_{xi} \end{matrix} \right\} \equiv \begin{pmatrix} w_i \\ \theta_i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{d}_j = \left\{ \begin{matrix} w_j \\ w_{xj} \end{matrix} \right\} \equiv \begin{pmatrix} w_j \\ \theta_j \end{pmatrix}$$

Figura 2.4 Elemento finito de viga y sus funciones de forma.

2.10 Un ejemplo

Los conceptos estudiados y la formulación general citada son un poco abstractos y el lector puede quizás en este punto esforzarse en comprobar si ha captado la esencia de los procedimientos de aproximación desarrollados. Como los cálculos detallados de un sistema de elementos bidimensional será mejor dejarlos para los computadores, podemos efectuar un cálculo manual sencillo para un elemento finito unidimensional de una viga. Además, este ejemplo nos permitirá introducir de manera sencilla los conceptos de tensiones y deformaciones generalizadas.

Consideremos la viga representada en la Figura 2.4. La "deformación" generalizada es aquí la curvatura. Así pues, tenemos:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \kappa = -\frac{d^2w}{dx^2}$$

donde w es la flecha vertical, que es la incógnita fundamental. La tensión generalizada (a falta de la deformación por esfuerzo cortante) será el momento flector M, relacionado con la "deformación" por

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv M = -EI\frac{d^2w}{dx^2}$$

De esta forma tendremos inmediatamente, empleando la notación general de

las secciones anteriores,

$$\mathbf{D} \equiv EI$$

Si se discretiza la flecha, podremos escribir

$$w = \mathbf{N}\mathbf{a}$$

para todo el sistema o para un elemento individual, ij.

En este ejemplo, las deformaciones se expresan como derivadas segundas de la flecha y es necesario asegurar que tanto w como la derivada primera

$$w_x \equiv \frac{dw}{dx} = \theta$$

son continuas entre elementos. Esto se cumple fácilmente si como parámetros nodales se toman los valores de w y del giro, w_x. Así,

$$\mathbf{a}_i = \left\{ \begin{matrix} w \\ w_x \end{matrix} \right\}_i = \left\{ \begin{matrix} w_i \\ \theta_i \end{matrix} \right\}$$

Se deducirán a continuación las funciones de forma. Si para definir la deformada tomamos dos nodos por elemento (o sea, cuatro variables), podemos suponer que ésta viene dada por un polinomio de tercer grado

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

Éste nos definirá las funciones de forma correspondientes a w_i y w_{xi} tomando para cada una un polinomio de tercer grado que valga uno en los puntos apropiados ($x = 0$; L) y cero en cualquier otro punto, tal como se muestra en la Figura 2.4.

Las expresiones de las funciones de forma para el elemento representado pueden escribirse

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_i &= [1 - 3(x/L)^2 + 2(x/L)^3, \quad L(x/L - 2(x/L)^2 + (x/L)^3)] \\ \mathbf{N}_j &= [3(x/L)^2 - 2(x/L)^3, \qquad L(-(x/L)^2 + (x/L)^3)] \end{aligned}$$

Inmediatamente podemos escribir

$$\mathbf{B}_i = -\frac{d^2}{dx^2}\mathbf{N}_i = [6 - 12(x/L), \ (4 - 6(x/L))L]/L^2$$

$$\mathbf{B}_j = -\frac{d^2}{dx^2}\mathbf{N}_j = [-6 + 12(x/L), \ (2 - 6(x/L))L]/L^2$$

y las matrices de rigidez para el elemento pueden escribirse

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \int_0^L \mathbf{B}_i^T \; EI \; \mathbf{B}_j \, dx$$

Dejaremos para el lector el cálculo detallado de ésta y de las "fuerzas" correspondientes a una carga uniformemente distribuida p (supuesta constante en ij y nula en el resto). Se observará que las ecuaciones finales para un nodo i, una vez ensambladas, relacionan entre sí tres flechas nodales i, j, k. Explícitamente estas ecuaciones son para elementos de la misma longitud L.

$$EI\begin{bmatrix} -12/L^3, & -6/L^2 \\ 6/L^2, & 2/L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_k \\ \theta_k \end{Bmatrix} + EI\begin{bmatrix} 24/L^3, & 0 \\ 0, & 8/L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} +$$

$$+EI\begin{bmatrix} -12/L^3, & 6/L^2 \\ -6/L^2, & 2/L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} pL/2 \\ -pL^2/12 \end{Bmatrix} = 0$$

Es interesante comparar éstas con la forma *exacta* representada por las llamadas ecuaciones de "giros y traslaciones de los nudos" que pueden encontrarse en los textos generales.

En este caso se hallará que la aproximación por elementos finitos consigue la solución exacta porque ésta se halla representada por un polinomio de tercer grado para una carga uniforme. Para cualquier otra carga distribuida es fácil ver que la diferencia entre la solución exacta y la aproximada decrece a medida que la longitud de los elementos tiende a cero.

2.11 Observaciones finales

El estudio de sólidos elásticos por el método de "los desplazamientos" sigue siendo, sin duda, el procedimiento más extendido y fácilmente comprensible. En muchos de los capítulos que siguen emplearemos las fórmulas generales desarrolladas en éste, en relación a problemas de elasticidad lineal (Capítulos 3, 4, 5 y 8). Éstos son también aplicables en el contexto del análisis no lineal, donde las principales variaciones son las definiciones de las tensiones, deformaciones generalizadas y demás cantidades asociadas a ellas. Es por ello conveniente resumir las fórmulas esenciales, lo que se hace en el Apéndice 2.

En el Capítulo 9 mostraremos que los procedimientos desarrollados aquí no son sino un caso particular de discretización por elementos finitos, aplicados a las ecuaciones de equilibrio que gobiernan el problema, expresadas en función de los desplazamientos.[23] Obviamente, son posibles otros puntos de partida alternativos. Algunos de éstos se mencionarán en el Capítulo 12.

Referencias

1. R.W. CLOUGH, "The finite element in plane stress analysis", *Proc. 2nd. A.S.C.E. Conf on Electronic Computation*, Pittsburg Pa., Sept. 1960.
2. R.W. CLOUGH, "The finite element method in structural mechanics", Capítulo 7 de *Stress Analysis* (eds. O.C. Zienkiewicz and G.S. Holister), Wiley, 1965.
3. J. SZMELTER, "The energy method of networks of arbitrary shape in problems of the theory of elasticity", *Proc. I.U.T.A.M., Symposium on Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity* (ed. W. Olszak, Pergamon Press, 1959.
4. R. COURANT, "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration", *Bull. Am. Math. Soc.*, **49**, 1–23, 1943.
5. W. PRAGER y J.L. SYNGE, "Approximation in elasticity based on the concept of functions space", *Q.J. Appl. Math.*, **5**, 241–69, 1947.
6. S. TIMOSHENKO y J.N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, 2nd. ed., McGraw-Hill, 1951.
7. K. WASHIZU, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd.* ed., J. Pergamon Press, 1975.
8. J.W. STRUTT (Lord Rayleigh), "On the theory of resonance", *Trans. Roy. Soc. (London)*, **A 161**, 77–118, 1870.
9. W. RITZ, "Über eine neue Methode zur Lösung gewissen Variations - Probleme der mathematischen Physik", *J. Reine angew. Math.*, **135**, 1–61, 1909.
10. G.P. BAZELEY, Y.K. CHEUNG, B.M. IRONS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Triangular elements in bending-conforming and non-conforming solutions", *Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. Tech.*, Wright-Patterson A.F. Base, Ohio, 1965.
11. S.C. MIKHLIN, *The Problem of the Minimum of a Quadratic Functional*, Holden-Day, 1966.
12. M.W. JOHNSON y R.W. McLAY, "Convergence of the finite element method in the theory of elasticity", *J. Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, 274–8, 1968.
13. S.W. KEY, "A convergence investigation of the direct stiffness method", *Ph.D. Thesis*, University of Washington, 1966.
14. T.H.H. PIAN y PING TONG, "The convergence of finite element method in solving linear elastic problems", *Int. J. Solids Struct.*, **3**, 865–80, 1967.
15. E.R. DE ARRANTES OLIVEIRA, "Theoretical foundations of the finite element method", *Int. J. Solids Struct.*, **4**, 929–52, 1968.
16. G. STRANG y G.J. FIX, *An Analysis of the Finite Element Method*, p. 106, Prentice-Hall, 1973.
17. L.F. RICHARDSON, "The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems", *Trans. Roy. Soc. (London)*, **A210**, 307–57, 1910.
18. B.M. IRONS y A. RAZZAQUE, "Experience with the patch test" en *Mathematical Foundations if the Finite Element Method*, 557–87 (ed. A.R. Aziz), Academic Press, 1972.
19. B. FRAEIJS DE VEUBEKE, "Variational principles and the patch test", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **8**, 783–801, 1974.
20. B. FRAEIJS DE VEUBEKE, "Displacement and equilibrium models in the finite element method", Capítulo 9 de *Stress Analysis* (ed. O.C. Zienkiewicz

and G.S. Holister), Wiley, 1965.
21. R.L. FOX y E.L. STANTON, "Developments in structural analysis by direct energy minimization", *J.A.I.A.A.*, **6**, 1036–44, 1968.
22. F.K. BOGNER, R.H. MALLETT, M.D. MINICH y L.A. SCHMIT, "Development and evaluation of energy search methods in non-linear structural analysis", *Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. Tech., Wright-Patterson A.F. Base, Ohio, 1965.
23. O.C. ZIENKIEWICZ y K. MORGAN, *Finite Elements and Approximation*, Wiley, 1983.

Capítulo 3

TENSIÓN Y DEFORMACIÓN PLANA

3.1 Introducción

El método de los elementos finitos obtuvo sus primeros éxitos en su aplicación a problemas bidimensionales.[1,2] En el Capítulo 2 ya se han empleado problemas de ese tipo para aclarar las bases de la formulación por elementos finitos y para deducir las relaciones generales. Estas relaciones básicas están expresadas en las Ec. (2.1) a (2.5), (2.23) y (2.24) y se han resumido en el Apéndice 2 como referencia rápida.

En este capítulo se obtendrán con más detalle las relaciones particulares para el problema en cuestión, acompañadas de ejemplos prácticos, procedimiento éste que seguiremos a lo largo del resto del texto.

Solamente se estudiará a fondo el elemento triangular, que es el más sencillo, pero el procedimiento es totalmente general. Este mismo problema se puede analizar utilizando elementos más elaborados, que se introducen de idéntica forma y que se examinarán en capítulos posteriores.

Se recomienda al lector no familiarizado con los conceptos básicos de elasticidad se dirija a los textos elementales sobre el tema, en particular al libro de Timoshenko y Goodier[3], cuya notación se utiliza ampliamente en este libro.

En ambos problemas de tensión y deformación plana, el campo de desplazamientos viene expresado unívocamente en función de los desplazamientos u y v en las direcciones de los ejes cartesianos ortogonales x e y, respectivamente.

Además, las únicas tensiones y deformaciones que se han de considerar en ambos casos son las tres componentes en el plano xy. En el caso de *tensión plana*, las otras tres componentes de la tensión son nulas por definición y, por consiguiente, no contribuyen al trabajo interno. En la *deformación plana*, la tensión en la dirección perpendicular al plano xy no es nula. Sin embargo, por definición, la deformación en dicha dirección es nula, y por tanto dicha tensión no contribuye al trabajo interno, pero si se desea puede ser evaluada explícitamente al final del cálculo a partir de las tres componentes principales de tensión.

3.2 Características de los elementos

3.2.1 *Funciones de desplazamientos.* La Figura 3.1 muestra el elemento triangular típico considerado, con los nodos i, j, m numerados en sentido antihorario.

Los desplazamientos de un nodo tienen dos componentes:

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \tag{3.1}$$

y las seis componentes de los desplazamientos del elemento se agrupan en un vector

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_m \end{Bmatrix} \tag{3.2}$$

Los desplazamientos interiores a un elemento han de quedar definidos unívocamente por esos seis valores. La representación más sencilla viene dada evidentemente por dos polinomios de primer grado

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \tag{3.3}$$

Se pueden calcular fácilmente las seis constantes α resolviendo los dos sistemas de tres ecuaciones simultáneas que se obtienen al sustituir las

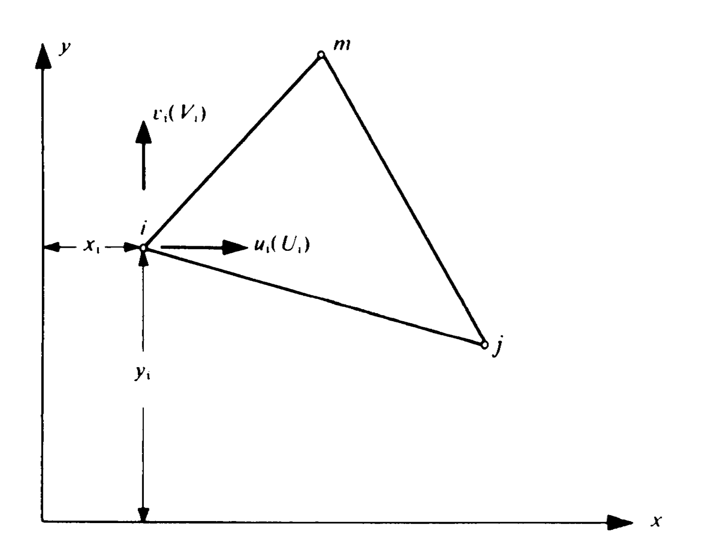


Figura 3.1 Elemento de un medio continuo bajo tensión o deformación plana.

coordenadas de los nodos e igualar las expresiones resultantes a los desplazamientos correspondientes a los nodos. Escribiendo, por ejemplo,

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{aligned} \tag{3.4}$$

podemos calcular fácilmente α_1, α_2 y α_3 en función de los desplazamientos nodales u_i, u_j y u_m para obtener finalmente

$$u = \frac{1}{2\Delta}\left[(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m\right] \tag{3.5a}$$

en la cual

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m = y_{jm} \\ c_i &= x_m - x_j = x_{mj} \end{aligned} \tag{3.5b}$$

obteniéndose los otros coeficientes mediante permutación cíclica de los subíndices i, j, m, y donde†

$$2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2 \times (\text{área del triángulo } ijm) \tag{3.5c}$$

Puesto que las ecuaciones para el desplazamiento vertical son similares, se obtiene igualmente que

$$v = \frac{1}{2\Delta}\left[(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_m + b_m x + c_m y)v_m\right] \tag{3.6}$$

Aunque no sea estrictamente necesario en este momento, podemos expresar las relaciones anteriores (3.5a) y (3.6) en la forma general de la Ec. (2.1):

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{a}^e = [\mathbf{I}N_i, \mathbf{I}N_j, \mathbf{I}N_m]\mathbf{a}^e \tag{3.7}$$

siendo $\mathbf{I}$ una matriz unidad 2×2, y

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta, \qquad \text{etc.} \tag{3.8}$$

La función de desplazamientos elegida garantiza automáticamente la continuidad de desplazamientos entre elementos adyacentes, debido a que

† Nota: si se emplean las coordenadas del centro de gravedad será $x_i + x_j + x_m = y_i + y_j + y_m = 0$ y $a_i = 2\Delta/3 = a_j = a_m$. Véase también el resumen de integrales sobre un triángulo contenido en el Apéndice 4.

los desplazamientos varían linealmente a lo largo de cualquiera de los lados del triángulo y, al imponer los mismos desplazamientos en los nodos para dos elementos contiguos, evidentemente existirá el mismo desplazamiento a lo largo del contorno de separación.

3.2.2 *Deformación (total).* La deformación total en cualquier punto del elemento puede definirse mediante sus tres componentes que contribuyen al trabajo interno. Así,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}, & 0 \\ 0, & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}, & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{u} \tag{3.9}$$

Sustituyendo la expresión (3.7), tenemos

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a}^e = [\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j, \mathbf{B}_m] \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_m \end{Bmatrix} \tag{3.10a}$$

siendo $\mathbf{B}_i$ una matriz típica, dada por

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{S}N_i = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x}, & 0 \\ 0, & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y}, & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i, & 0 \\ 0, & c_i \\ c_i, & b_i \end{bmatrix} \tag{3.10b}$$

Con lo cual, la matriz $\mathbf{B}$ de la Ec. (2.2) queda definida explícitamente.

Se advertirá que en este caso la matriz $\mathbf{B}$ es independiente de la posición del punto dentro del elemento y, por consiguiente, las deformaciones son constantes en todo el mismo. Es evidente que las funciones de forma satisfacen el criterio de deformación constante mencionado en el Capítulo 2.

3.2.3 *Deformación inicial (deformación térmica).* Las deformaciones "iniciales", o sea, las deformaciones independientes de las tensiones, pueden deberse a muchas causas: retracción, cristalización, o con más frecuencia, a cambios de temperatura, y en general darán por resultado un vector de deformación inicial:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \tag{3.11}$$

Aunque esta deformación inicial puede ser, en general, función de la posición dentro del elemento, normalmente se definirá por su valor medio constante en todo el elemento. Esto está de acuerdo con las condiciones de deformación constante impuestas por la función de desplazamientos establecida.

Así, para el caso de *tensión plana* en un elemento de material isótropo sujeto a un incremento de temperatura θ^e, si el coeficiente de dilatación térmica es α, tendremos

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.12}$$

ya que una dilatación térmica no produce deformaciones transversales.

En el caso de la *deformación plana* la situación es más compleja. La hipótesis de deformación plana implica que a causa de la dilatación térmica se desarrollarán tensiones perpendiculares al plano xy, aún cuando *se suponga que las tres tensiones principales son nulas, y consiguientemente* las deformaciones iniciales estarán afectadas por las constantes elásticas.

Se puede demostrar que en este caso

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (1+\nu) \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.13}$$

donde ν es el coeficiente de Poisson.

Los materiales anisótropos presentan problemas particulares ya que el coeficiente de dilatación térmica puede variar con la dirección. Llamemos x' e y' a las direcciones principales del material (Figura 3.2). La deformación inicial debida a la dilatación térmica es, tomando dichos ejes como sistema de referencia, para el caso de tensión plana,

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'0} \\ \varepsilon_{y'0} \\ \gamma_{x'y'0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1\theta^e \\ \alpha_2\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.14}$$

donde α_1 y α_2 son los coeficientes de dilatación referidos a los ejes x' e y', respectivamente.

Para obtener los componentes de la deformación en el sistema xy es necesario emplear la adecuada matriz de transformación de deformaciones $\mathbf{T}$, que nos daría

$$\boldsymbol{\varepsilon}'_0 = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\varepsilon}_0 \tag{3.15}$$

Con β definido como en la Figura 3.2, es fácil comprobar que

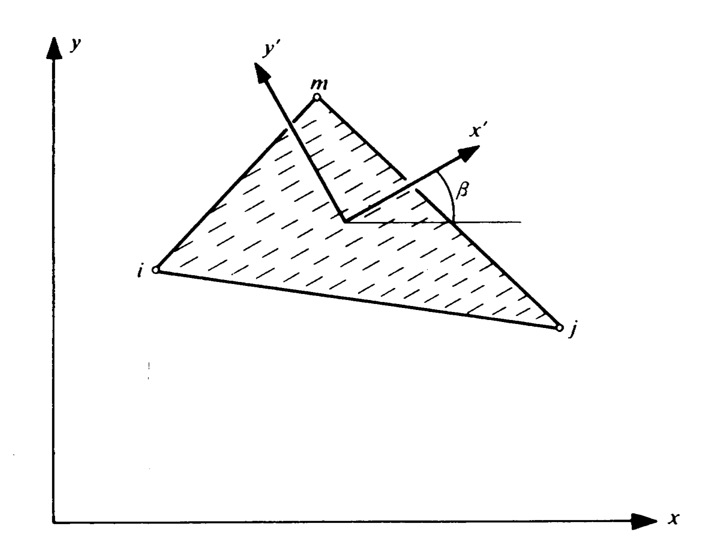


Figura 3.2 Elemento de un material estratificado (con isotropía transversal).

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2\beta & \text{sen}^2\beta & -2\,\text{sen}\,\beta\cos\beta \\ \text{sen}^2\beta & \cos^2\beta & 2\,\text{sen}\,\beta\cos\beta \\ \text{sen}\,\beta\cos\beta & -\text{sen}\,\beta\cos\beta & \cos^2\beta - \text{sen}^2\beta \end{bmatrix}$$

Así pues, $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ puede calcularse fácilmente. Se apreciará que la componente tangencial de la deformación ya no es nula en el sistema de coordenadas xy.

3.2.4 *Matriz de elasticidad.* La matriz **D** de la relación (2.5)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \boldsymbol{\varepsilon}_0\right) \tag{3.16}$$

se puede establecer explícitamente para cualquier material (excluyendo ahora $\boldsymbol{\sigma}_0$, que es simplemente un término aditivo).

Tensión plana en un material isótropo. Para los estudios de tensión plana en los materiales isótropos se tiene, por definición,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} + \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} + \varepsilon_{xy0} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Despejando las tensiones en el sistema anterior, obtenemos la matriz **D**

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

en la cual E es el módulo de elasticidad y ν el coeficiente de Poisson.

Deformación plana de un material isótropo. En este caso la tensión normal σ_z no es nula, debiendo de añadirse a las otras tres componentes de la tensión. Para el caso particular de dilatación térmica isótropa, tenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} + \alpha\theta^e \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} + \alpha\theta^e \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} \end{aligned} \tag{3.19}$$

pero, además

$$\varepsilon_z = 0 = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} + \alpha\theta^e$$

Eliminando σ_z y despejando las tres tensiones restantes obtenemos la expresión ya citada de la deformación inicial Ec. (3.13), y comparando ésta con la Ec. (3.16), la matriz **D** resulta

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/[2(1-\nu)] \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

Materiales anisótropos. Para materiales totalmente anisótropos se necesitan 21 constantes elásticas independientes para definir completamente las relaciones entre tensiones y deformaciones en tres dimensiones.[4,5]

Si ha de ser aplicable un análisis bidimensional, las propiedades del material deben presentar simetría, lo que implica que como máximo podrá haber seis constantes independientes en la matriz **D**. Por consiguiente, siempre se puede escribir

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ & d_{22} & d_{23} \\ (\text{sim}) & & d_{33} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

para describir el comportamiento más general en dos dimensiones. (La necesidad de simetría de la matriz **D** se deduce del teorema de la reciprocidad de Maxwell-Betti, siendo consecuencia de que la energía es un invariante independiente del camino seguido para alcanzar un estado de deformación dado.)

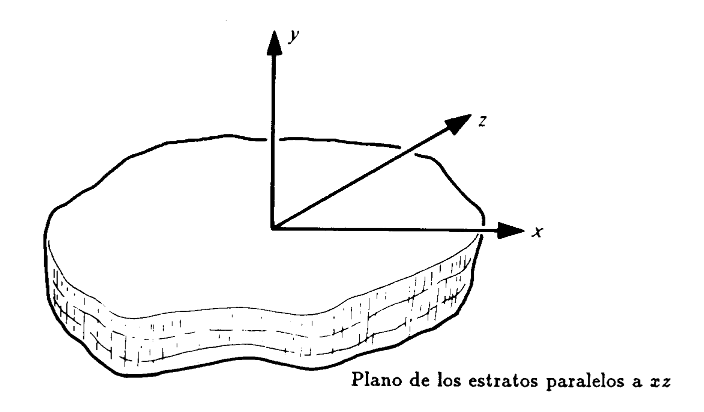


Figura 3.3 Material estratificado (con isotropía transversal).

Un caso de interés práctico especial es el del material "estratificado" o con isotropía transversal, cuyas propiedades presentan una simetría de revolución dentro del plano de cada estrato. Los materiales de este tipo tienen sólo cinco constantes elásticas independientes.

Las relaciones generales entre tensiones y deformaciones son en este caso, siguiendo la notación de Lekhnitskii[4] y tomando el eje y perpendicular a los estratos (despreciando la deformación inicial), según la Figura 3.3:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_1} - \frac{\nu_2\sigma_y}{E_2} - \frac{\nu_1\sigma_x}{E_1} \\
\varepsilon_y &= -\frac{\nu_2\sigma_x}{E_2} + \frac{\sigma_y}{E_2} - \frac{\nu_2\sigma_z}{E_2} \\
\varepsilon_z &= -\frac{\nu_1\sigma_x}{E_1} - \frac{\nu_2\sigma_y}{E_2} + \frac{\sigma_z}{E_1} \\
\gamma_{xz} &= \frac{2(1+\nu_1)}{E_1}\tau_{xz} \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G_2}\tau_{xy} \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G_2}\tau_{yz}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

en las que las constantes E_1 y ν_1 (G_1 es dependiente) están asociadas al comportamiento en el plano de cada estrato, y E_2, G_2 y ν_2 a una dirección normal a éste.

La matriz $\mathbf{D}$ en dos dimensiones se hace ahora, tomando $E_1/E_2 = n$ y $G_2/E_2 = m$,

$$\mathbf{D} = \frac{E_2}{1-n\nu_2^2}\begin{bmatrix} N & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-n\nu_2^2) \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

en el caso de tensión plana, o bien

$$\mathbf{D} = \frac{E_2}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)} \times \\ \times \begin{bmatrix} n(1-n\nu_2^2) & n\nu_2(1+\nu_1) & 0 \\ n\nu_2(1+\nu_1) & (1-\nu_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & m(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2) \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

en el caso de deformación plana.

Cuando, como en la Figura 3.2, la dirección de los estratos está inclinada respecto del eje x, será necesario efectuar una transformación para obtener la matriz $\mathbf{D}$ en el sistema más general de coordenadas. Suponiendo que $\mathbf{D}'$ relacione tensiones y deformaciones en el sistema de coordenadas inclinado (x', y'), es fácil demostrar que

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}'\mathbf{D}'\mathbf{T}^T \tag{3.25}$$

donde $\mathbf{T}$ es la misma que aparece en la Ec. (3.15).

Si los sistemas de tensiones $\boldsymbol{\sigma}'$ y $\boldsymbol{\sigma}$ corresponden a $\boldsymbol{\varepsilon}'$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$, respectivamente, se tiene entonces por la igualdad del trabajo

$$\boldsymbol{\sigma}'^T\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}$$

o bien

$$\boldsymbol{\varepsilon}'^T\mathbf{D}'\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

de donde se deduce la Ec. (3.25) por sustitución de la Ec. (3.15) (ver también Capítulo 1).

3.2.5 *Matriz de rigidez.* La matriz de rigidez del elemento ijm viene definida a partir de la relación general de la Ec. (2.13) mediante los coeficientes

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \int \mathbf{B}_i^T\mathbf{D}\mathbf{B}_j\, t\; dx\, dy \tag{3.26}$$

en la que t es el espesor del elemento y donde la integración se efectúa sobre la superficie del triángulo. Si el espesor del elemento se supone constante, hipótesis que tiende a ser tanto más cierta a medida que disminuye el tamaño

de los elementos, entonces, como ninguna de las matrices contiene a x o y, tendremos sencillamente

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j t \Delta \tag{3.27}$$

donde Δ es el área del triángulo [definido ya en la Ec. (3.5)]. Esta expresión es ya suficientemente explícita para el cálculo dejando para el computador las operaciones matriciales.

3.2.6 *Fuerzas nodales debidas a las deformaciones iniciales.* Vienen dadas directamente por la expresión (2.13), la cual tras integrar, se transforma en

$$(\mathbf{f}_i)_{\varepsilon_0}^e = -\mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 t \Delta, \qquad \text{etc.} \tag{3.28}$$

Estas fuerzas debidas a la "deformación inicial" se reparten entre los nodos de manera desigual y exigen un cálculo preciso. Expresiones similares pueden deducirse para las fuerzas debidas a las tensiones iniciales.

3.2.7 *Fuerzas másicas distribuidas.* En el caso general de tensión o deformación plana, cada elemento de superficie unidad en el plano xy está sujeto a las fuerzas:

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}$$

en la dirección de los ejes correspondientes.

Además, según la Ec. (2.13), la contribución de dichas fuerzas a las que actúan en cada nodo del elemento viene dada por

$$\mathbf{f}_i^e = -\int \mathbf{N}_i \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}$$

o bien, según la Ec. (3.7),

$$\mathbf{f}_i^e = -\begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \int N_i \, dx \, dy, \qquad \text{etc.} \tag{3.29}$$

si las fuerzas másicas b_x y b_y son constantes. Como N_i ya no es constante la integración se ha de efectuar explícitamente. En el Apéndice 3 se dan algunas formas generales de integración relativas a los triángulos.

En este caso particular, los cálculos se simplifican si situamos el origen de coordenadas en el centro de gravedad del elemento. Entonces

$$\int x \, dx \, dy = \int y \, dx \, dy = 0$$

y haciendo uso de la Ec. (3.8)

$$\mathbf{f}_i^e = -\begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \int \frac{a_i \, dx \, dy}{2\Delta} = -\begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \frac{a_i}{2} = -\begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \frac{\Delta}{3} \tag{3.30}$$

según las relaciones (3.5a), (b), (c).

Explícitamente, para todo el elemento

$$\mathbf{f}^e = \begin{Bmatrix} f_i^e \\ f_j^e \\ f_m^e \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_x \\ b_y \\ b_x \\ b_y \end{Bmatrix} \frac{\Delta}{3} \tag{3.31}$$

lo que significa simplemente que el sistema de fuerzas que actúan en las direcciones x e y debidas a las fuerzas másicas se distribuyen entre los nodos en tres partes iguales. Este hecho se corresponde con lo que se intuye físicamente y con frecuencia ha sido supuesto implícitamente.

3.2.8 *Potencial de fuerzas másicas.* En muchos casos, las fuerzas másicas se definen en función de un potencial de fuerzas másicas ϕ, tal que

$$b_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad b_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{3.32}$$

y es este potencial, más que los valores de b_x y b_y, lo que conocemos en toda la región, estando especificado en los puntos nodales. Si $\boldsymbol{\phi}^e$ representa los tres valores del potencial asociado a los nodos del elemento, es decir, si

$$\boldsymbol{\phi}^e = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{Bmatrix} \tag{3.33}$$

y debe corresponder a valores constantes de b_x y b_y, ϕ deberá variar linealmente dentro del elemento. La "función de forma" de esta variación deberá venir dada evidentemente por un procedimiento análogo al seguido para deducir las Ecs. (3.4) a (3.6), obteniéndose

$$\phi = [N_i, \; N_j, \; N_m] \boldsymbol{\phi}^e \tag{3.34}$$

Así pues,

$$b_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -[b_i, \; b_j, \; b_m] \boldsymbol{\phi}^e / 2\Delta$$

y

$$b_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -[c_i, \; c_j, \; c_m] \boldsymbol{\phi}^e / 2\Delta \tag{3.35}$$

El vector de las fuerzas nodales debidas al potencial de fuerzas másicas reemplazará ahora la expresión (3.31) por

$$\mathbf{f}^e = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} b_i, & b_j, & b_m \\ c_i, & c_j, & c_m \\ b_i, & b_j, & b_m \\ c_i, & c_j, & c_m \\ b_i, & b_j, & b_m \\ c_i, & c_j, & c_m \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^e \qquad (3.36)$$

3.2.9 *Cálculo de las tensiones.* Las fórmulas obtenidas nos permiten ensamblar la matriz de rigidez completa de la estructura y obtener los valores de los desplazamientos.

La matriz de tensiones expresada en forma general en la Ec. (2.16) se obtiene haciendo las sustituciones adecuadas para cada elemento.

Según la hipótesis básica, las tensiones son constantes dentro del elemento. Es corriente suponer que éstas actúan en el centro de gravedad del elemento, siguiéndose este criterio en la mayoría de los ejemplos de este Capítulo. Otra posibilidad consiste en obtener el valor de las tensiones de los nodos como media de los valores en los elementos adyacentes. Con esta idea se han empleado diferentes métodos de "ponderación" basados en consideraciones empíricas, pero las ventajas obtenidas no parecen muy considerables.

Es habitual preparar el trabajo para que el computador calcule las tensiones y direcciones principales de cada elemento.

3.3 Ejemplos. Estimación de la precisión

No hay duda de que la solución de problemas de elasticidad plana, tal como se han formulado en la Sección 3.2 es, en el límite de las subdivisiones, una solución exacta. Y, por supuesto, para cualesquiera subdivisiones existe una solución aproximada similar a, digamos, una solución por series de Fourier de la que se toma un número limitado de términos.

Como ya se ha explicado en el Capítulo 2, la energía total de deformación que se obtiene durante un estado de aproximación cualquiera es menor que la energía de deformación verdadera correspondiente a la solución exacta. En la práctica significa que los valores de los desplazamientos, y por consiguiente también de las tensiones, proporcionados por la aproximación, serán *en conjunto* inferiores a los reales. Sin embargo, debe hacerse hincapié en que esto no es necesariamente cierto para cada punto individual del continuo, y por tanto la importancia práctica de este límite no es muy grande.

Lo importante para el ingeniero es conocer el grado de precisión alcanzable en los problemas más corrientes para una subdivisión dada. En cada caso particular, se puede estimar el error por comparación con soluciones exactas conocidas o mediante el estudio de la convergencia, utilizando dos o más tamaños de subdivisión.

Utilizando su experiencia, el ingeniero puede estimar *a priori* el grado

de aproximación implicado en un problema específico para una subdivisión dada. Parte de esta experiencia podría quizás adquirirse con los ejemplos que se consideran en este libro.

Dirigiremos nuestra atención en primer lugar hacia algunos problemas sencillos para los cuales existen soluciones exactas.

3.3.1 *Campo de tensiones uniforme.* Si la solución exacta es en realidad un campo de tensiones uniforme, la solución obtenida por elementos finitos

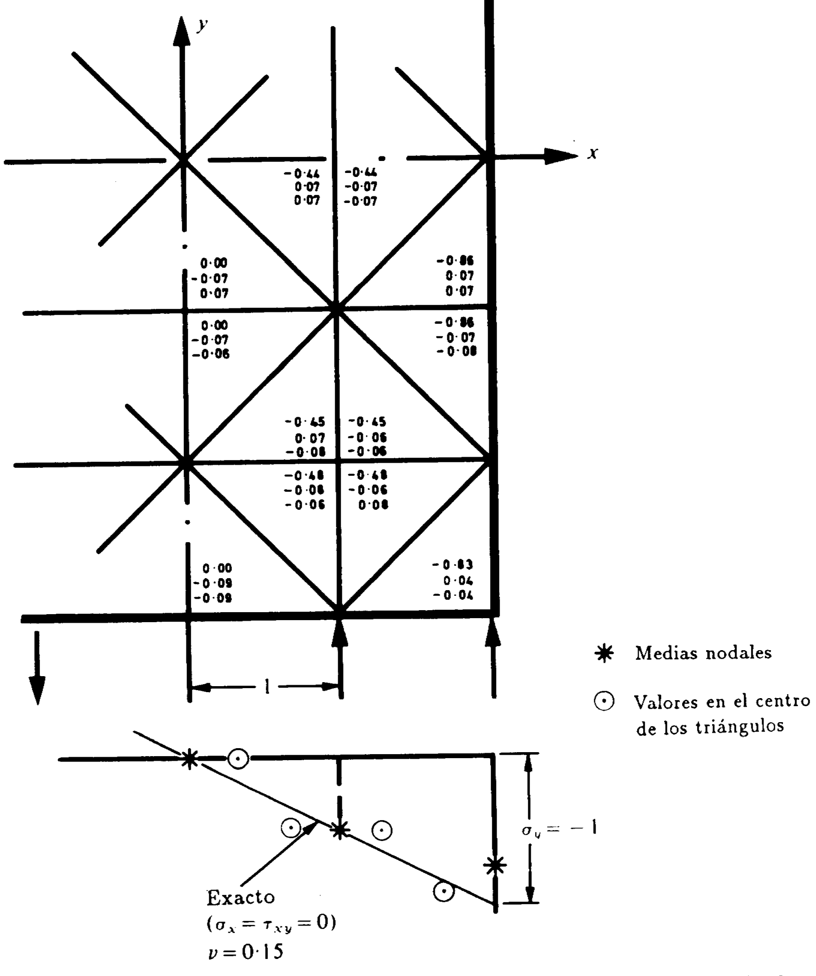


Figura 3.4 Flexión pura de una viga resuelta mediante una malla no tupida de elementos triangulares (se reseñan los valores de σ_y, σ_x y τ_{xy} por este orden).

coincidirá con la exacta, sea cualquiera la subdivisión utilizada. Esto es un corolario obvio de la formulación, siendo no obstante muy útil como primera comprobación de los programas escritos para computador.

3.3.2 *Campo de tensiones variable linealmente.* Evidentemente, en este caso la hipótesis básica de tensión constante dentro de cada elemento implica que la solución será sólo aproximada. En la Figura 3.4 se muestra el ejemplo sencillo de una viga sometida a un momento flector constante, con una subdivisión medianamente grosera. Se ve en seguida que las tensiones axiales (σ_y) dadas por el elemento se aproximan a los valores exactos, y de hecho si cada uno de los valores constantes de la tensión se asocia al centro de gravedad de cada elemento y se representan gráficamente, la línea que mejor "se ajusta" a dichos valores representa la distribución exacta de tensiones. (En el Capítulo 12 se trata de los puntos óptimos para cálculo de tensiones.)

Las componentes horizontal y tangencial de la tensión difieren también de los valores exactos (que son simplemente cero). Sin embargo, advirtamos por otra parte que sus valores oscilan alrededor de los valores exactos, según pequeñas variaciones de igual valor.

En los nodos interiores, si tomamos el valor medio de las tensiones de los elementos adyacentes, encontramos representadas con gran aproximación las tensiones exactas. En las caras exteriores dicho valor medio no da, sin embargo, resultados tan buenos. En la práctica se usa frecuentemente la representación de las tensiones por los valores medios nodales para mejorar la aproximación, como se muestra en la Figura 3.4, obteniéndose una mejor representación de conjunto.

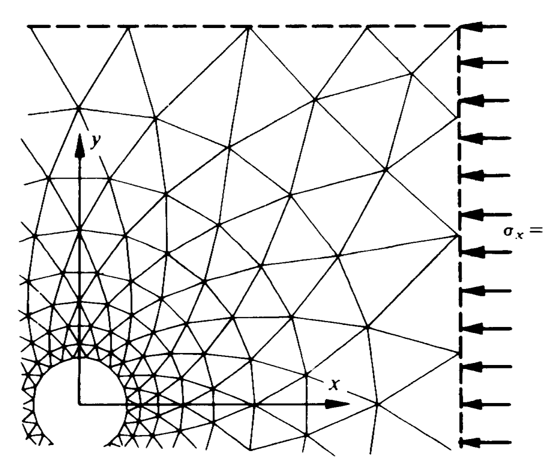


Figura 3.5 Orificio circular en un campo de tensiones uniforme: (*a*) Material isótropo. (*b*) Material estratificado ortótropo; $E_x = E_1 = 1$, $E_y = E_2 = 3$, $\nu_1 = 0.1$, $\nu_2 = 0$, $G_{xy} = 0.42$.

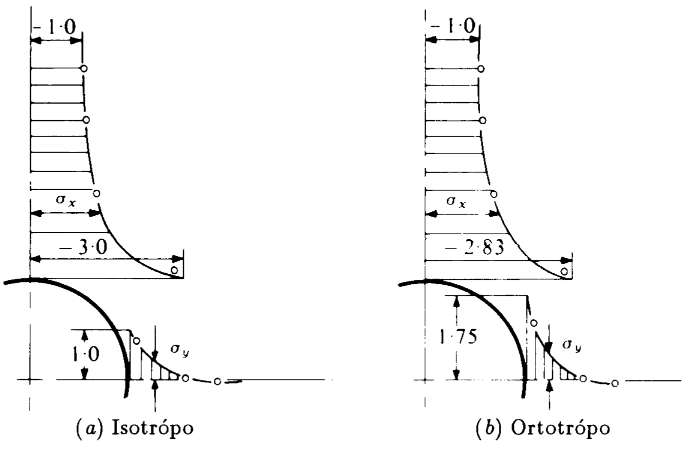


Figura 3.6 Comparación de los resultados teóricos y mediante elementos finitos para los casos (*a*) y (*b*) de la Figura 3.5.

Para afinar los resultados se puede seguir además un proceso de ponderación de los valores medios en las proximidades de las caras de la estructura. Sin dogmatizar sobre este punto, parece preferible, cuando la precisión requiere seguir este procedimiento, utilizar una malla más tupida. El problema de refinar una malla de forma lógica para llegar a la precisión deseada se discutirá en el Capítulo 14.

3.3.3 *Concentración de tensiones.* En las Figuras 3.5 y 3.6 se representa un ejemplo más real. Aquí se considera la distribución de tensiones alrededor de un orificio circular en un material isótropo y en otro anisótropo estratificado, para condiciones de tensión uniforme.[6] Se ha utilizado una división en elementos gradual, que permite un estudio más detallado en la región donde se esperan gradientes de tensión elevados. En la Figura 3.6 se puede comprobar el alto grado de precisión alcanzable, comparándose algunos de los resultados con las soluciones exactas.[3,7]

En capítulos posteriores veremos que pueden obtenerse resultados aún más precisos utilizando elementos más elaborados; sin embargo, los fundamentos del análisis permanecen iguales.

3.4 Algunas aplicaciones prácticas

Evidentemente, las aplicaciones prácticas del método no tienen límite y el método de los elementos finitos ha reemplazado a las técnicas experimentales para problemas planos debido a su gran precisión, bajo coste y versatilidad. La facilidad para tratar problemas de anisotropía, tensiones térmicas o de

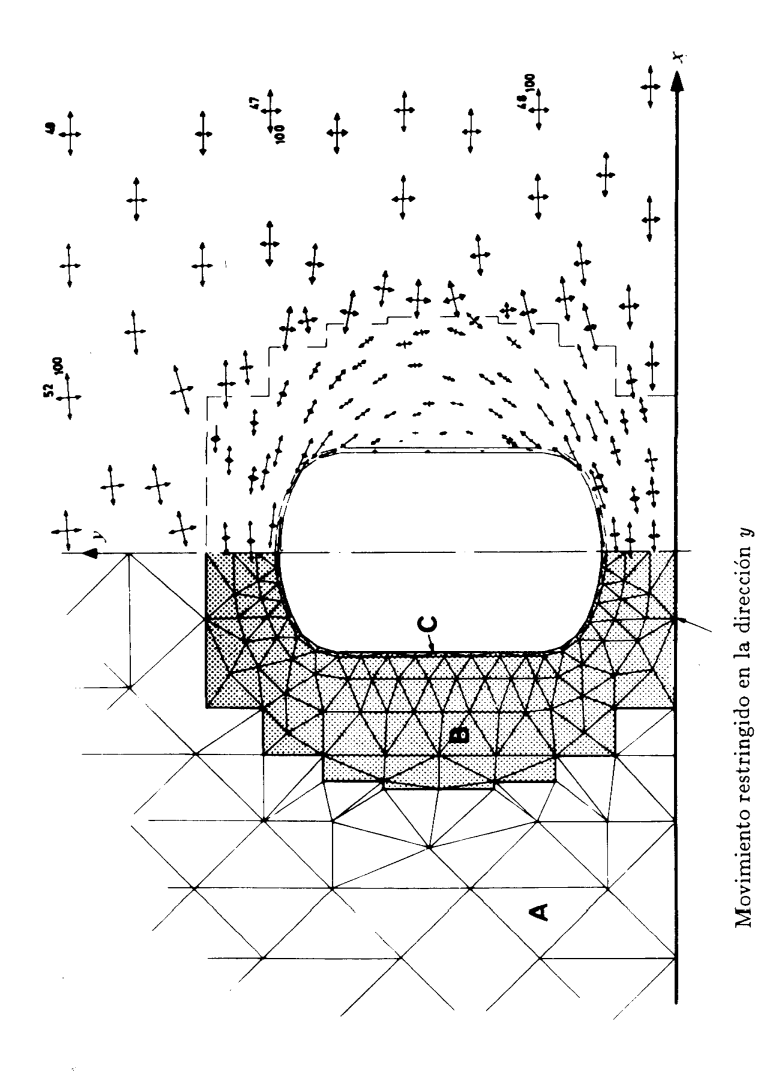


Figura 3.7 Abertura reforzada en una placa. Campo de tensiones uniforme lejos de la abertura: $\sigma_x = 100$, $\sigma_y = 50$. Los espesores de las zonas A, B y C de la placa están en la relación de 1:3:23.

fuerzas distribuidas se suma a sus ventajas.

Daremos ahora algunos ejemplos de aplicación real a problemas técnicos complicados.

3.4.1 *Distribución de tensiones en torno de un orificio reforzado* (Figura 3.7). En vasijas de presión de acero o en los fuselajes de aviones se han de practicar orificios en revestimientos sometidos a tensiones. El conducto que penetra proporciona en sí un cierto refuerzo alrededor del borde y, además, el espesor del mismo revestimiento se aumenta para reducir las tensiones debidas a los efectos de concentración.

El análisis de este tipo de problemas como casos de tensión plana no presenta dificultad. Los elementos se escogen de manera que sigan la variación del espesor, asignando a éste valores convenientes.

La estrecha zona de material grueso alrededor del borde se puede representar por elementos especiales tipo viga, o más fácilmente en un programa general mediante elementos triangulares muy delgados del tipo usual, a los que se asignan los espesores convenientes. Este último procedimiento es el seguido en el problema representado en la Figura 3.7, que da algunas de las tensiones que aparecen en las proximidades de la abertura. Nótese la extensión más bien grande de la región introducida en el análisis y la disminución gradual del tamaño de los elementos de la malla.

3.4.2 *Valle anisótropo sujeto a tensiones tectónicas*[6] (Figura 3.8). Se considera un valle simétrico sujeto a tensiones horizontales uniformes. El material está estratificado, o sea, presenta "isotropía transversal", y la dirección de los estratos varía de punto a punto.

El gráfico de tensiones muestra el desarrollo de la zona sometida a tracciones. Este fenómeno es de gran interés para geólogos e ingenieros relacionados con la mecánica de rocas.

3.4.3 *Presa sometida a presiones hidrostáticas internas y externas*[8,9] (Figura 3.9). Se analiza aquí una presa de contrafuertes cimentada sobre una masa rocosa algo compleja. La región heterogénea que comprende la cimentación está sometida a condiciones de deformación plana, mientras que la presa en sí se considera como una placa (tensión plana) de espesor variable.

Con relación al efecto de las cargas exteriores o al del peso propio, no surge ningún problema de análisis particular, aunque quizás deba mencionarse que se encontró ventajoso "automatizar" el cálculo de las fuerzas nodales debidas al peso propio.

Cuando se consideran las presiones intersticiales, la situación requiere, quizás, ciertas explicaciones.

Es bien conocido que en un material poroso la presión del agua se transmite a la estructura como una *fuerza másica* de valor

$$b_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad b_y = -\frac{\partial p}{\partial y} \tag{3.37}$$

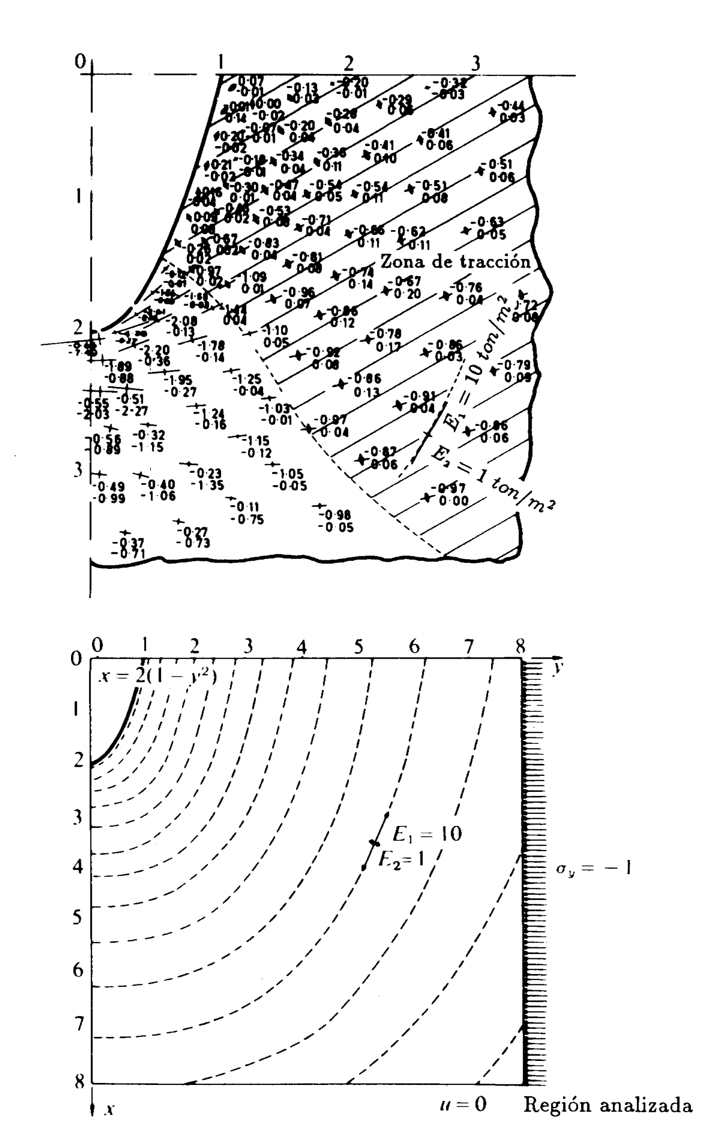
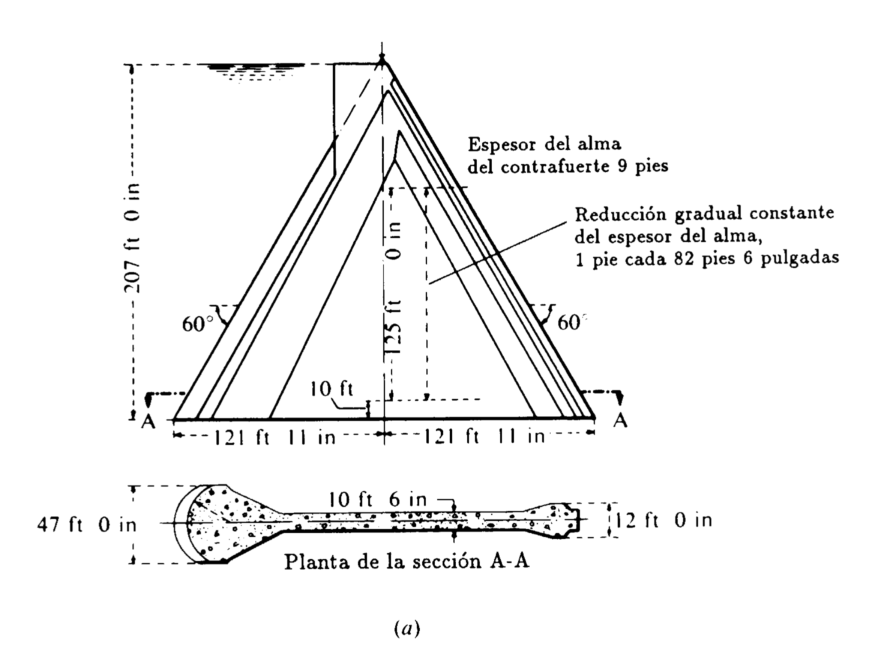


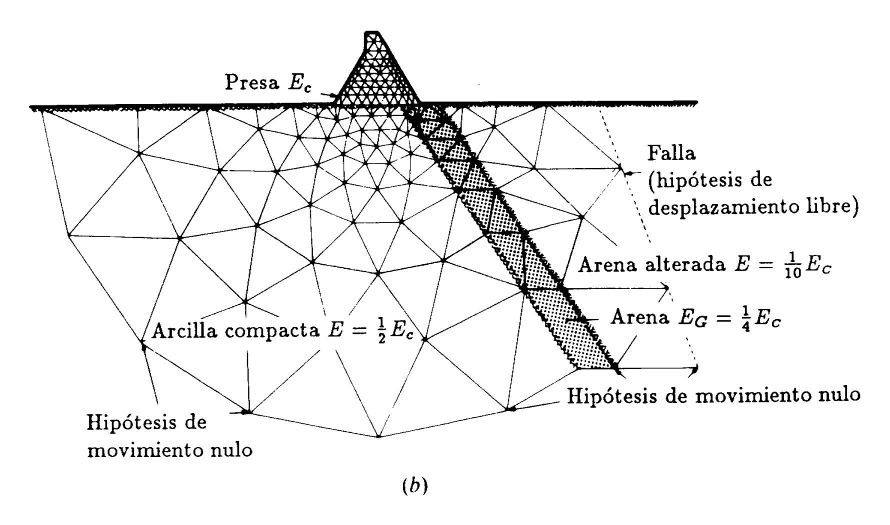
Figura 3.8 Valle con estratos curvos sometido a tensión tectónica horizontal. (Deformación plana, 170 nodos, 298 elementos.)

y que entonces no es necesario considerar la presión exterior.

La presión intersticial p es ahora, de hecho, un potencial de fuerzas másicas como el definido en las expresiones (3.32). En la Figura 3.9 se muestra la subdivisión en elementos de la región y el croquis de la presa.



(a)



(b)

Figura 3.9 Análisis tensional de una presa de contrafuertes. Hipótesis de tensión plana en la presa y de deformación plana en la cimentación. (a) Sección del contrafuerte analizada. (b) Zona de cimentación considerada y división en elementos finitos.

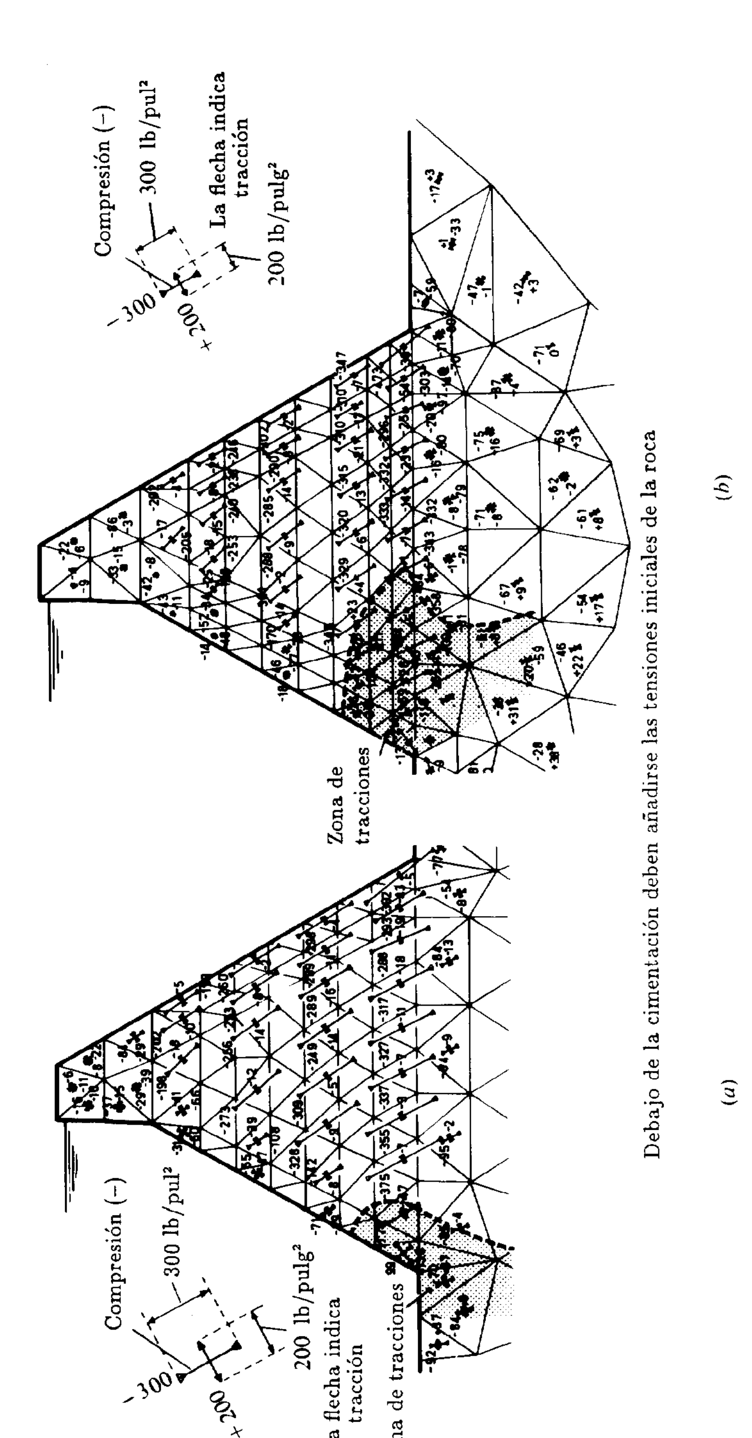


Figura 3.10 Análisis tensional de la presa de contrafuertes de la Figura 3.9. Las tensiones principales debidas al peso propio se combinan con la presión del agua que se supone actúa: (*a*) como fuerza exterior, (*b*) como fuerza másica debida a la presión intersticial.

En las Figuras 3.10 (*a*) y (*b*) se muestran las tensiones que resultan del efecto del peso propio de la presa y las debidas a la presión del agua, suponiendo que actúa como carga exterior o, alternativamente, como presión intersticial interna. Ambas soluciones indican grandes zonas de tracción, pero el incremento de tensiones debido a la segunda hipótesis es importante.

Las tensiones calculadas aquí son las llamadas tensiones "efectivas". Éstas representan las fuerzas de interacción entre las partículas sólidas y se definen como sigue en función de las tensiones *totales* $\boldsymbol{\sigma}$ y de las presiones insterticiales p,

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{m}p \qquad \mathbf{m}^T = [1, 1, 0] \tag{3.38}$$

o sea, suprimiendo simplemente de la tensión *total* la componente debida a la presión hidrostática.[10]

La tensión efectiva es de especial importancia en la mecánica de los medios porosos, como ocurre en el estudio de suelos, rocas u hormigón. La hipótesis fundamental para obtener las fuerzas másicas de la Ec. (3.37) es que en la deformación de la fase sólida sólo tiene importancia la tensión efectiva. Esto conduce inmediatamente a otra posibilidad de formulación.[11] Si examinamos la condición de equilibrio de la Ec. (2.10), advertimos que la misma está escrita en función de las tensiones totales. Expresando la ecuación constitutiva (2.5) en función de las tensiones efectivas, es decir,

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}'(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \sigma_0' \tag{3.39}$$

y sustituyendo ésta en la ecuación de equilibrio [Ec. (2.10)] encontramos que se obtiene de nuevo la Ec. (2.12), empleando la matriz $\mathbf{D}'$ en la matriz de rigidez y aumentando los términos de fuerzas de la Ec. (2.13b) con la fuerza adicional

$$-\int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{m} p \, d(\text{vol}) \tag{3.40}$$

o, si p se interpola mediante funciones de forma N_i', la fuerza se convierte en

$$-\int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N}' \, d(\text{vol}) \bar{\mathbf{p}}^e \tag{3.41}$$

Esta otra forma de introducir los efectos de la presión intersticial permite utilizar interpolación discontinua para p [puesto que no existen derivadas en la Ec. (3.40)] y es empleada en la actualidad muy frecuentemente en la práctica.

3.4.4 *Fisuración*. Las tracciones que se originan en el anterior ejemplo de la presa causarán sin duda fisuración en la roca. Si la situación que se produce cuando la fisura se propague es estable, podrá considerarse que la presa es segura.

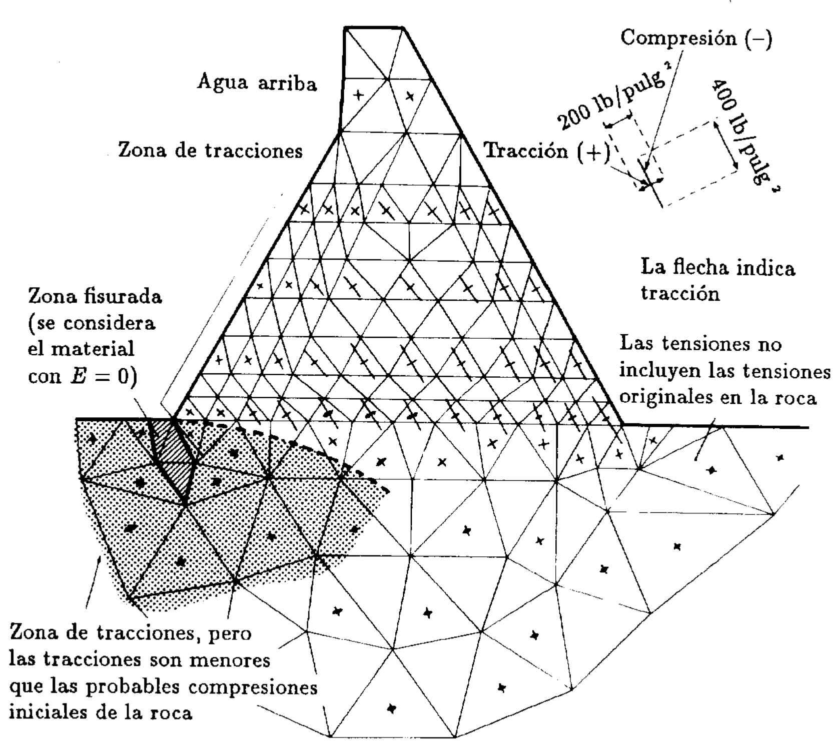


Figura 3.11 Tensiones en una presa de contrafuertes. La introducción de una "fisura" modifica la distribución de tensiones [mismo estado de cargas que en la Figura 3.10(*b*)].

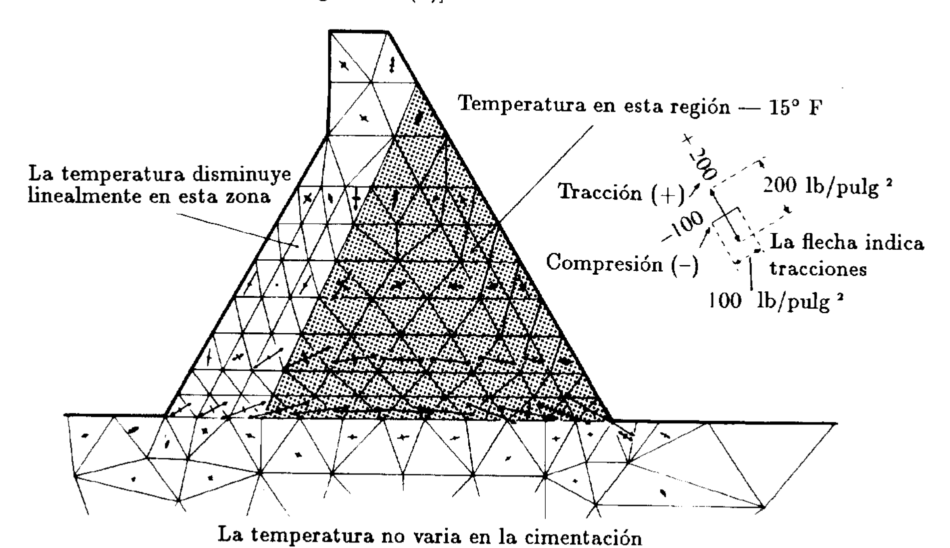


Figura 3.12 Análisis tensional de una presa de contrafuertes. Tensiones térmicas debidas a un descenso de temperatura de 15° F en la zona sombreada. ($E = 3 \times 10^6$ lb/pulg.², $\alpha = 6 \times 10^{-6}$/°F).

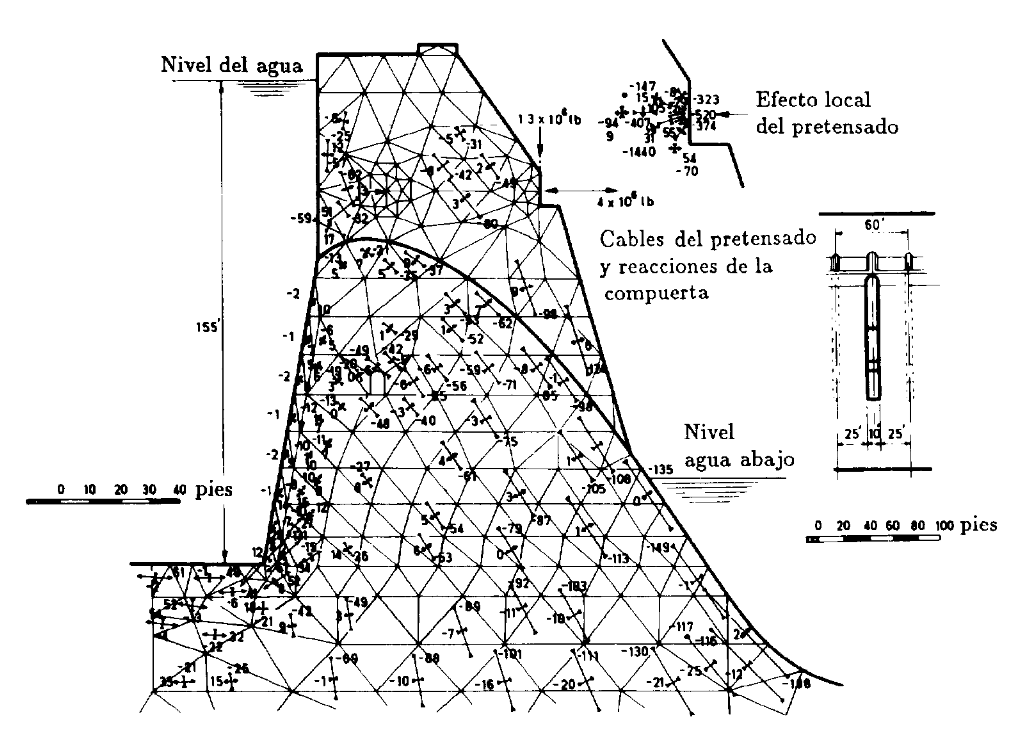


Figura 3.13 Presa con aliviadero y cables pretensados.

Se puede introducir muy fácilmente el efecto de las fisuras en el análisis asignando valores nulos al módulo de elasticidad de ciertos elementos escogidos. En la Figura 3.11 se muestra el análisis para una amplia cuña fisurada, pudiendo observarse que la amplitud de la zona agrietada no origina tensiones dentro del cuerpo de la presa.

Se puede desarrollar un procedimiento más elaborado para seguir la propagación de fisuras y la redistribución de tensiones resultante.[12]

3.4.5 *Tensiones térmicas*. Como ejemplo de cálculo de tensiones térmicas se representa la misma presa bajo la hipótesis de una distribución de temperatura sencilla. En la Figura 3.12 se dan los resultados de este análisis.

3.4.6 *Presas de gravedad*. La presa de contrafuertes es un ejemplo natural de la aplicación del método de los elementos finitos. Otros tipos, como presas de gravedad con o sin aliviadero u otros accesorios, pueden también tratarse con gran sencillez. La Figura 3.13 muestra el análisis de una presa de gran tamaño con aliviadero y compuertas en coronación.

Es evidente que este caso implica una aproximación consistente en adoptar un análisis bidimensional en las proximidades del cambio brusco de sección que se produce en las zonas donde el aliviadero se une al cuerpo

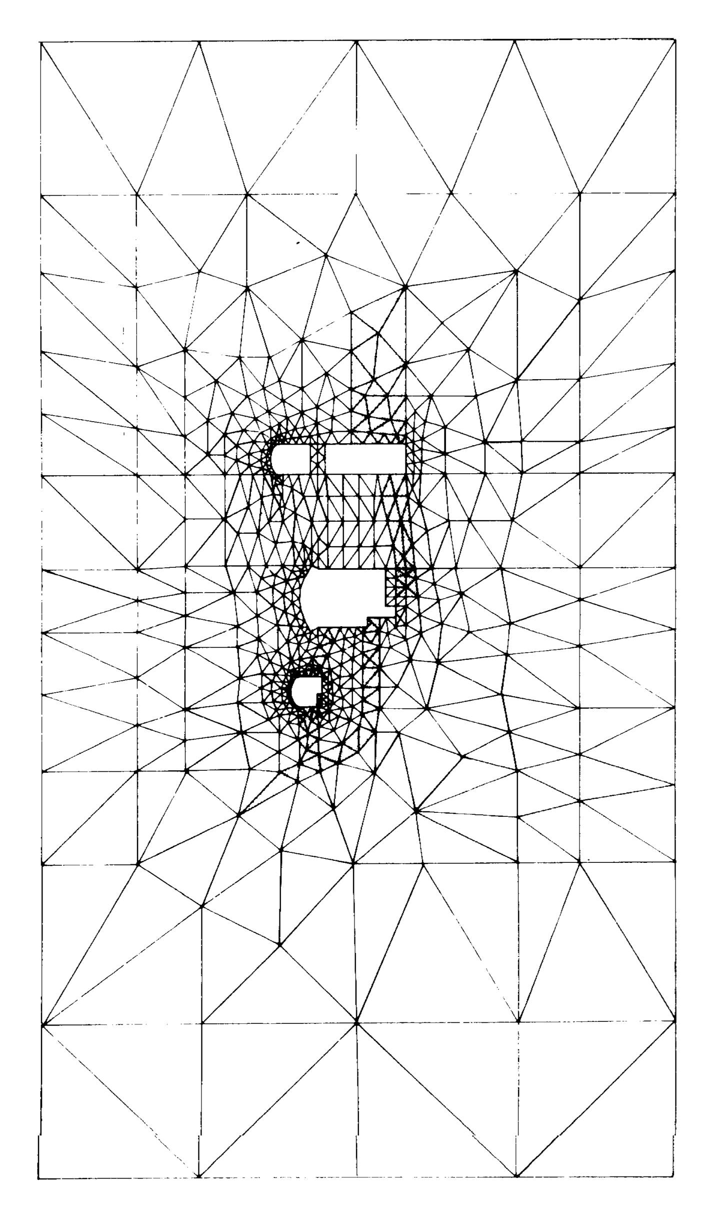
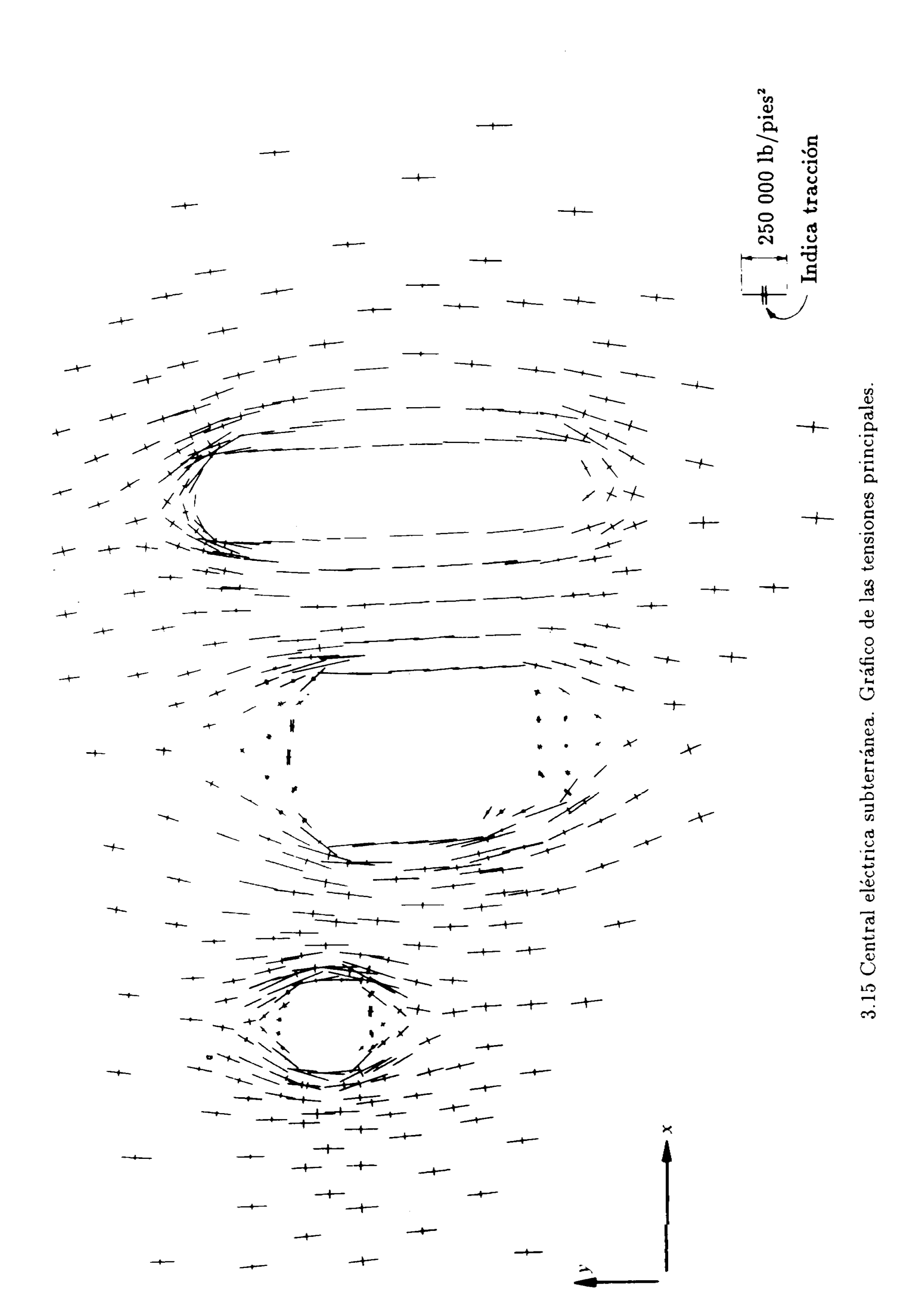


Figura 3.14 Central eléctrica subterránea. Malla usada para el análisis.



3.15 Central eléctrica subterránea. Gráfico de las tensiones principales.

principal de la presa, pero esto conduce sólo a errores localizados.

Es importante hacer notar aquí que, en uno de los casos se usó una malla de tamaños gradualmente variables para estudiar la concentración de tensiones en la presa y el comportamiento de la cimentación. La variación lineal entre los tamaños de los elementos más grandes y los más pequeños es del orden de 30 a 1 (los elementos mayores se encuentran en la cimentación y no aparecen en la figura).

3.4.7 *Central eléctrica subterránea.* Este último ejemplo, ilustrado en las Figuras 3.14 y 3.15, muestra una aplicación a gran escala muy interesante. En este caso, las tensiones principales están representadas gráficamente de forma automática. Para el análisis se emplearon numerosos valores de la tensión inicial $\boldsymbol{\sigma}_0$ muy diferentes entre sí, debido a la incertidumbre en el conocimiento de las condiciones geológicas. La rapidez en la solución y en la representación gráfica de las tensiones permitió encontrar los límites de variación de éstas y tomar una decisión técnicamente adecuada. En este ejemplo, los contornos exteriores se tomaron suficientemente alejados y fijos ($\bar{u} = \bar{v} = 0$). Sin embargo, se podía haber hecho un mejor tratamiento usando elementos infinitos, como se describe en la Sección 8.13.

3.5 Tratamiento particular de la deformación plana en los materiales incompresibles

Se habrá apreciado que la relación (3.20) que define la matriz de elasticidad **D** de un material isótropo pierde sentido cuando el coeficiente de Poisson toma el valor 0.5 puesto que el factor entre paréntesis se hace infinito. Una manera sencilla de sortear esta dificultad es emplear valores del coeficiente de Poisson cercanos a 0.5 pero no iguales a éste. La experiencia muestra, no obstante, que si se hace esto la solución se deteriora, a menos que se sigan formulaciones especiales como las que se exponen en el Capítulo 12. Herrmann[13] ha sugerido otro procedimiento que implica la utilización de una formulación variacional diferente y que será examinada en los Capítulos 12 y 13.

3.6 Observación final

En los siguientes capítulos se introducirán elementos que proporcionan mucha mejor precisión para el mismo número de grados de libertad en un problema particular. Esto ha llevado a creer que el sencillo triángulo usado aquí está completamente obsoleto. Sin embargo, en los últimos años, su extrema simplicidad lo ha llevado a ser de nuevo usado en la práctica.

Referencias

1. M.J. TURNER, R.W. CLOUGH, H.C. MARTIN y L.J. TOPP, "Stiffness and deflection analysis of complex structures", *J. Aero. Sci.*, **23**, 805–23, 1956.

2. R.W. CLOUGH, "The finite element in plane stress analysis", *Proc. 2nd. ASCE. Conf. on Electronic Computation*, Pittsburg, Pa., Sept. 1960.
3. S. TIMOSHENKO y J.N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1951.
4. S.G. LEKHNITSKII, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, (Traducido del ruso por P.Fern), Holden Day, San Francisco, 1963.
5. R.F.S. HEARMON, *An Introduction to Applied Anisotropic Elasticity*, Oxford Univ. Press, 1961.
6. O.C. ZIENKIEWICZ, Y.K. CHEUNG y K.G. STAGG, "Stresses in anisotropic media with particular reference to problems of rock mechanics", *J. Strain Analysis*, **1**, 172–82, 1966.
7. G.N. SAVIN, *Stress Concentration Around Holes* (Traducido del ruso), Pergamon Press, 1961.
8. O.C. ZIENKIEWICZ y Y.K. CHEUNG, "Buttress dams on complex rock foundations", *Water Power*, **16**, 193, 1964.
9. O.C. ZIENKIEWICZ y Y.K. CHEUNG, "Stresses in buttress dams", *Water Power*, **17**, 69, 1965.
10. K. TERZHAGI, *Theoretical Soil Mechanics*, Wiley, 1943.
11. O.C. ZIENKIEWICZ, C. HUMPHESON y R.W. LEWIS, "A unified approach to soil mechanics problems, including plasticity and visco-plasticity", *Int. Symp. on Numerical Methods in Soil and Rock Mechanics*, Karlsruhe, 1975. Ver también Capítulo 4 de *Finite Elements en Geomechanics* (ed. G. Gudehus), 151–78, Wiley, 1977.
12. O.C Zienkiewicz, *Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1977.
13. L.R. HERRMANN, "Elasticity equations for incompressible, or nearly incompressible materials by a variational theorem", *JAIAA.*, **3**, 1896, 1965.

Capítulo 4

ANÁLISIS DE TENSIONES EN CUERPOS DE REVOLUCIÓN

4.1 Introducción

El problema de la distribución de tensiones en cuerpos de revolución (sólidos axisimétricos) sometidos a cargas de revolución es de considerable interés práctico. Los problemas matemáticos que se presentan son muy similares a los de tensión y deformación plana ya que, una vez más, el problema es bidimensional.[1,2] Por simetría, el estado de deformación, y por consiguiente también el de tensión, de una sección plana cualquiera perpendicular al eje de simetría del cuerpo viene definido completamente por las dos componentes de los desplazamientos. En la Figura 4.1 se muestra una de tales secciones. Si r y z representan respectivamente las coordenadas radial y axial de un punto, siendo u y v los desplazamientos correspondientes, es fácil ver que se pueden usar precisamente las mismas funciones de desplazamientos utilizadas en el Capítulo 3 para definir los desplazamientos dentro del elemento triangular i, j, m que se muestra en la figura.

El volumen de material asociado a un "elemento" es ahora el de un sólido de revolución como el de la Figura 4.1, y a él hemos de referir todas las integraciones.

De nuevo emplearemos el elemento triangular a efectos ilustrativos, poseyendo las relaciones que se obtengan un carácter completamente general.

Se ha demostrado ya que en los problemas de tensión o deformación planas el trabajo interno está ligado a las tres componentes de la deformación situadas en el plano de coordenadas, no apareciendo la componente de la tensión normal a dicho plano por ser nulos los valores tanto de dicha tensión como de la deformación.

En los problemas de revolución todo desplazamiento radial induce automáticamente una deformación en dirección circunferencial, y como las tensiones en esa dirección son ciertamente distintas de cero, habría de considerarse esta cuarta componente de la deformación y la de tensión asociada a ella. Este es el punto clave que marca la diferencia esencial en el tratamiento de los problemas de revolución.

Encontrará el lector que el álgebra implicada en este capítulo es algo más tediosa que la del anterior, pero en esencia las operaciones a efectuar vuelven a ser las mismas, siguiendo la formulación general del Capítulo 2.

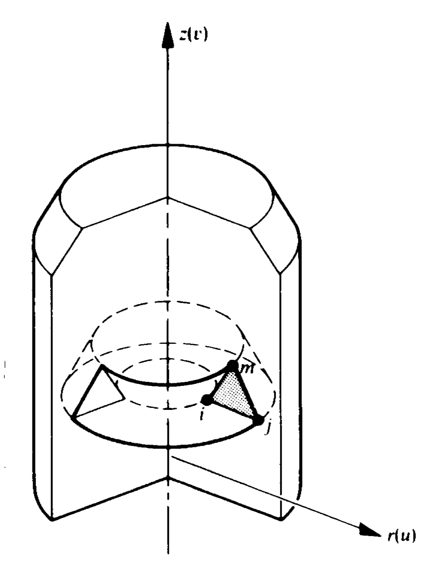


Figura 4.1 Elemento finito de un sólido de revolución.

4.2 Características de los elementos

4.2.1 *Función de desplazamientos.* Utilizando elementos de forma triangular (Figura 4.1) con los nodos i, j, m numerados en sentido contrario al de las agujas del reloj, definimos como sigue los desplazamientos nodales por sus dos componentes

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \tag{4.1}$$

y los desplazamientos de cada elemento por el vector

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_m \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

Evidentemente, tal como se hizo en la Sección 3.2.1, se puede emplear un polinomio lineal para definir de manera única los desplazamientos dentro del elemento. Puesto que el álgebra a desarrollar es idéntica a la del Capítulo 4, no se repetirá de nuevo. El campo de desplazamientos viene nuevamente dado por la Ec. (3.7).

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\mathbf{I}N_i,\ \mathbf{I}N_j,\ \mathbf{I}N_m]\mathbf{a}^e \tag{4.3}$$

con

$$N_i = \frac{a_i + b_i r + c_i z}{2\Delta}, \qquad \text{etc.}$$

siendo $\mathbf{I}$ una matriz unitaria 2×2. En la expresión anterior,

$$\begin{aligned} a_i &= r_j z_m - r_m z_j \\ b_i &= z_j - z_m = z_{jm} \\ c_i &= r_m - r_j = r_{mj} \end{aligned} \tag{4.4}$$

etc., siguiendo un orden cíclico. De nuevo Δ es el área del triángulo.

4.2.2 *Deformación (total).* Como se dijo anteriormente, aquí hemos de considerar cuatro componentes de la deformación. Estas son, en realidad, todas las componentes de la deformación no nulas posibles en un sólido de revolución. En la Figura 4.2 se muestran y definen dichas deformaciones y las tensiones asociadas.

El vector deformación que se define a continuación agrupa las componentes de la deformación a considerar, definiéndolas en función de los desplazamientos de un punto. Las expresiones empleadas son casi evidentes por sí mismas y no se deducirán aquí. El lector interesado puede consultar cualquier texto de elasticidad general[3] donde hallará la demostración de todas estas relaciones. Así pues, tenemos

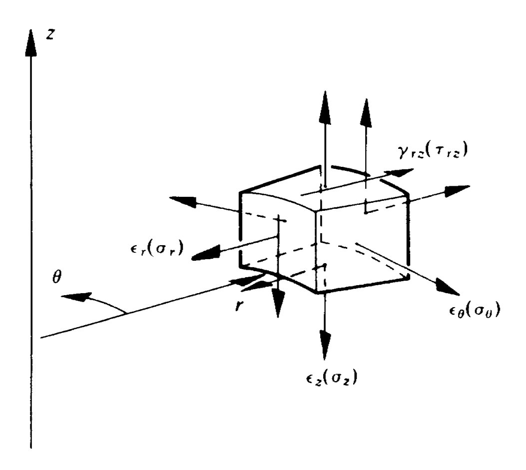


Figura 4.2 Deformaciones y tensiones que intervienen en el análisis de sólidos de revolución.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{u}{r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial r} \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{u} \tag{4.5}$$

Haciendo uso de las funciones de desplazamiento definidas en las Ecs. (4.3) y (4.4) obtenemos

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a}^e = [\mathbf{B}_i,\ \mathbf{B}_j,\ \mathbf{B}_m]\mathbf{a}^e$$

donde

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & , & \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial r} & , & 0 \\ \dfrac{1}{r}N_i & , & 0 \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} & , & \dfrac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} 0, & c_i \\ b_i, & 0 \\ \dfrac{a_i}{r} + b_i + \dfrac{c_i z}{r}, & 0 \\ c_i, & b_i \end{bmatrix}, \qquad \text{etc.} \tag{4.6}$$

Debido a que en la matriz $\mathbf{B}$ figurarán las coordenadas r y z, las deformaciones ya no son constantes dentro de cada elemento como en los casos de tensión o deformación plana. Esta variación de la deformación se debe al término ε_θ. Si los desplazamientos que se imponen son tales que u es proporcional a r, todas las deformaciones serán entonces constantes. Como éste es el único estado de desplazamiento que coincide con la deformación constante, está claro que la función de desplazamientos satisface el criterio básico del Capítulo 2.

4.2.3 *Deformación inicial (deformación térmica).* En general, se tendrán cuatro componentes independientes para el vector de deformaciones iniciales:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{z0} \\ \varepsilon_{r0} \\ \varepsilon_{\theta 0} \\ \gamma_{rz0} \end{Bmatrix} \tag{4.7}$$

Y aunque éste, generalmente, puede variar dentro del elemento, será conveniente tomar allí la deformación inicial como constante.

El caso más frecuente de deformaciones iniciales es el debido a dilatación térmica. Para un material isótropo tendremos entonces

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.8}$$

donde θ^e es el incremento medio de temperatura en un elemento y α es el coeficiente de dilatación térmica.

No es necesario considerar el caso general de anisotropía puesto que sería imposible alcanzar simetría axial en esas circunstancias. Un caso de cierto interés práctico es el de un material "estratificado", similar al estudiado en el Capítulo 4, cuyo plano de isotropía sea perpendicular al eje de simetría (Figura 4.3). Son posibles aquí dos coeficientes de dilatación diferentes: uno en la dirección del eje α_z y otro en el plano normal al mismo, α_r.

En tal caso, la deformación térmica inicial es

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \alpha_z\theta^e \\ \alpha_r\theta^e \\ \alpha_r\theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.9}$$

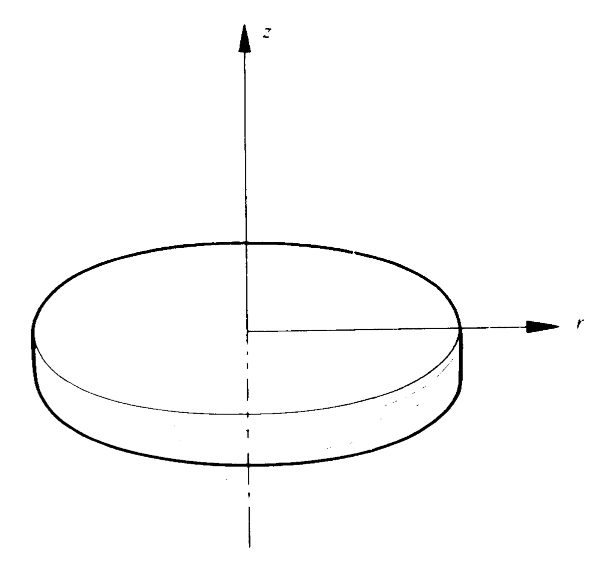


Figura 4.3 Material estratificado con simetría de revolución.

Casos prácticos de tal anisotropía "estratificada" se dan frecuentemente en la construcción de piezas laminadas o de fibra de vidrio.

4.2.4 *Matriz de elasticidad.* La matriz de elasticidad $\mathbf{D}$ relaciona las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ y las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ mediante la expresión general [Ec. (2.5)]

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0$$

Se considerará en primer lugar el material anisótropo "estratificado", ya que el caso de material isótropo puede considerarse sencillamente como caso particular del anterior.

Material anisótropo estratificado (Figura 4.3). Si el eje z representa la normal a los planos de los estratos, podemos escribir nuevamente las ecuaciones (4.22) (prescindiendo además por comodidad de las deformaciones iniciales) como sigue:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E_2} - \frac{\nu_2\sigma_r}{E_2} - \frac{\nu_2\sigma_\theta}{E_2} \\ \varepsilon_r &= -\frac{\nu_2\sigma_z}{E_2} + \frac{\sigma_r}{E_1} - \frac{\nu_1\sigma_\theta}{E_1} \\ \varepsilon_\theta &= -\frac{\nu_2\sigma_z}{E_2} - \frac{\nu_1\sigma_r}{E_1} + \frac{\sigma_\theta}{E_1} \\ \gamma_{zr} &= \frac{\tau_{zr}}{G_2} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Escribiendo además

$$\frac{E_1}{E_2} = n \qquad \text{y} \qquad \frac{G_2}{E_2} = m$$

tenemos, despejando las tensiones, que

$$\mathbf{D} = \frac{E_2}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} 1-\nu_1^2 & n\nu_2(1+\nu_1) \ , & n\nu_2(1+\nu_1) \ , & 0 \\ & n(1-n\nu_2^2) \ , & (\nu_1+n\nu_2^2)n \ , & 0 \\ & & n(1-n\nu_2^2) \ , & 0 \\ \text{simétrica} & & & m(1+\nu_1)\times(1-\nu_1-2n\nu_2^2) \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

Material isótropo. Para un material isótropo, podemos obtener la matriz $\mathbf{D}$ tomando

$$E_1 = E_2 = E \qquad \text{o} \qquad n = 1$$

y

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu$$

y empleando la conocida relación entre las constantes elásticas isótropas

$$\frac{G_2}{E_2} = \frac{G}{E} = m = \frac{1}{2(1+\nu)}$$

Sustituimos en la expresión (4.11) y obtenemos ahora

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1, & \frac{\nu}{1-\nu}, & \frac{\nu}{1-\nu}, & 0 \\ & 1\ , & \frac{\nu}{1-\nu}, & 0 \\ & & 1\ , & 0 \\ \text{simétrica} & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

4.2.5 *La matriz de rigidez.* La matriz de rigidez del elemento ijm puede calcularse ahora a partir de la relación general Ec. (2.13). Recordando que la integral de volumen ha de extenderse a todo el anillo de material, tenemos

$$\mathbf{K}_{ij}^e = 2\pi \int \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j \, r \, dr \, dz \tag{4.13}$$

viniendo $\mathbf{B}$ expresada por la Ec. (4.6) y $\mathbf{D}$ por la Ec. (4.11) o la Ec. (4.12), dependiendo del material.

No se puede efectuar la integración tan sencillamente como en el caso de tensión plana porque la matriz $\mathbf{B}$ es función de las coordenadas. Hay dos alternativas: la primera es una integración numérica; la segunda, una multiplicación explícita y una integración término a término.

El procedimiento aproximado más sencillo es evaluar $\overline{\mathbf{B}}$ en el centro de gravedad

$$\bar{r} = \frac{r_i + r_j + r_m}{3}$$

y

$$\bar{z} = \frac{z_i + z_j + z_m}{3}$$

En este caso, se obtiene como primera aproximación

$$\mathbf{K}_{ij}^e = 2\pi \overline{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{D} \overline{\mathbf{B}}_j \bar{r} \Delta \tag{4.14}$$

siendo Δ el área del triángulo.

Se podría seguir procedimientos de integración numérica más elaborados calculando el valor del integrando en varios puntos del triángulo. Dichos métodos se estudiarán con detalle en el Capítulo 8. Sin embargo, puede demostrarse que si la integración numérica es de un orden tal que permite determinar exactamente el volumen del elemento, entonces la solución converge hacia la solución exacta cuando aumenta indefinidamente el número de elementos[4]. La integración "en un solo punto" sugerida aquí pertenece a esta categoría, ya que es bien conocido que el volumen de un cuerpo de revolución viene dado exactamente por el producto entre el área y la trayectoria descrita por su centroide. Con el elemento triangular sencillo utilizado aquí se necesita en cualquier caso una subdivisión en elementos bastante tupida, y en la práctica la mayoría de los programas hacen uso de esta sencilla aproximación, que sorprendentemente es a veces superior, de hecho, a la integración exacta (véase Capítulo 11). Una razón para ello es la aparición de términos logarítmicos en la formulación exacta que implican cocientes del tipo r_i/r_m y, cuando el elemento se encuentra a una distancia grande del eje, tienden a la unidad siendo impreciso el cálculo de su logaritmo.

4.2.6 *Fuerzas nodales exteriores.* En el caso de problemas bidimensionales como los estudiados en el capítulo anterior, el reparto de cargas exteriores era tan evidente que no necesitaba ningún comentario aclaratorio. En el caso presente, sin embargo, es importante comprender que las fuerzas nodales representan un efecto combinado de la fuerza actuante a lo largo de la circunferencia del círculo que forma el "nodo" del elemento. Ya se tuvo en cuenta esto al calcular las integrales de las expresiones que aparecían en la matriz de rigidez del elemento, efectúandose dichas integraciones sobre el anillo completo.

Así, si $\overline{R}$ representa la componente radial de la fuerza por unidad de longitud de la circunferencia de un nodo o de un radio r, la "fuerza exterior" que habrá que introducir en el cálculo será

$$2\pi r\overline{R}$$

Análogamente, en la dirección del eje el efecto combinado de las fuerzas axiles vendrá representado por

$$2\pi r\overline{Z}$$

4.2.7 *Fuerzas nodales debidas a las deformaciones iniciales.* De nuevo, según la Ec. (2.13),

$$\mathbf{f}^e = -2\pi \int \mathbf{B}^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \, r \, dr \, dz \tag{4.15}$$

o sea, separando términos y advirtiendo que $\boldsymbol{\varepsilon}$ es constante

$$\mathbf{f}_i^e = -2\pi \left(\int \mathbf{B}_i^T \, r \, dr \, dz \right) \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \tag{4.16}$$

Se puede efectuar la integración de manera similar a la seguida para determinar la rigidez.

Se observa inmediatamente que se puede emplear otra vez una expresión aproximada mediante valores en el centro de gravedad

$$\mathbf{f}_i^e = -2\pi \overline{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \bar{r} \Delta \tag{4.17}$$

Las fuerzas debidas a las tensiones iniciales se calcularían de manera idéntica.

4.2.8 *Fuerzas másicas distribuidas.* En problemas de revolución se presentan con frecuencia fuerzas másicas distribuidas, como las debidas a la gravedad (si actúa en la dirección del eje z), a la fuerza centrífuga en miembros de máquinas rotatorias, o a la presión intersticial.

Representemos esas fuerzas por

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_r \\ b_z \end{Bmatrix} \tag{4.18}$$

por unidad de volumen de material en las direcciones de r y z, respectivamente. Mediante la ecuación general (2.13), obtenemos

$$\mathbf{f}_i^e = -2\pi \int \mathbf{I} N_i \begin{Bmatrix} b_r \\ b_z \end{Bmatrix} r \, dr \, dz \tag{4.19}$$

Empleando un sistema de coordenadas similar al de la Sección 3.2.7 se demuestra fácilmente que la primera aproximación, si las fuerzas másicas son constantes, da por resultado

$$\mathbf{f}_i^e = -2\pi \begin{Bmatrix} b_r \\ b_z \end{Bmatrix} \bar{r}\Delta/3 \tag{4.20}$$

Aunque estas expresiones no son exactas, se encontrará que el término que expresa el error decrece al reducirse el tamaño de los elementos y, puesto que éstas están en equilibrio, no se introducirán grandes inexactitudes. Además, tal como se verá en el Capítulo 11, la velocidad de convergencia se mantiene inalterada.

Si las fuerzas másicas vienen dadas por un potencial similar al definido en la Sección 3.2.8, o sea,

$$b_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad b_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{4.21}$$

y si dicho potencial está definido linealmente por sus valores nodales, se puede emplear de nuevo una expresión equivalente a la Ec. (4.36) con el mismo grado de aproximación.

En muchos problemas las fuerzas másicas varían proporcionalmente a r. Por ejemplo, en máquinas rotatorias las fuerzas centrífugas son

$$b_r = \omega^2 \rho r \tag{4.22}$$

donde ω es la velocidad angular y ρ la densidad del material.

4.2.9 *Cálculo de las tensiones.* Como se habrá advertido en las Ecs. (4.5) y (4.6), las tensiones varían ahora a través del elemento. Conviene, pues, determinar la tensión media en el centro del elemento. La matriz de tensiones resultante de las Ec. (4.6) y (2.3) nos proporciona aquí, como siempre

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^e = \mathbf{D}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{a}^e - \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\sigma}_0 \tag{4.23}$$

Se encontrará que los valores de las tensiones entre elementos oscilan ligeramente, pudiéndose alcanzar una mejor aproximación calculando el valor medio de las tensiones nodales.

4.3 Algunos ejemplos de comprobación

Los ejemplos de comprobación como los de un cilindro bajo tensión axial o radial constante dan, como era de esperar, soluciones que se corresponden con las exactas. Esto es además un corolario evidente de la capacidad de la función de desplazamientos para reproducir condiciones de deformación constantes.

Un problema para el que existe una solución exacta y en el que los gradientes de tensiones son prácticamente lineales es el de una esfera sometida a presión interior. En la Figura 4.4(a) se muestran las tensiones en el centro de gravedad obtenidas mediante una malla bastante grosera; nótese la oscilación de las tensiones alrededor de los valores exactos. (Esta oscilación se hace aún más pronunciada para valores más altos del coeficiente de Poisson, aunque la solución exacta es independiente del mismo). En la Figura 4.4(b) se muestra cómo la aproximación es mucho mejor si se toman los valores medios de las tensiones en los nodos, y en la Figura 4.4(c) se consigue una mejora aún mayor tomando los valores medios por elementos. Una muestra de la precisión que es posible alcanzar es la proximidad a la solución exacta que muestran los resultados incluso cuando se usa una malla grosera. En la Figura 4.5 se comparan con la solución exacta los desplazamientos en los nodos.

En la Figura 4.6 se han calculado las tensiones térmicas en la misma esfera para la variación estacionaria de temperatura que se muestra. Nuevamente, queda de manifiesto la excelente precisión al comparar con la solución exacta.

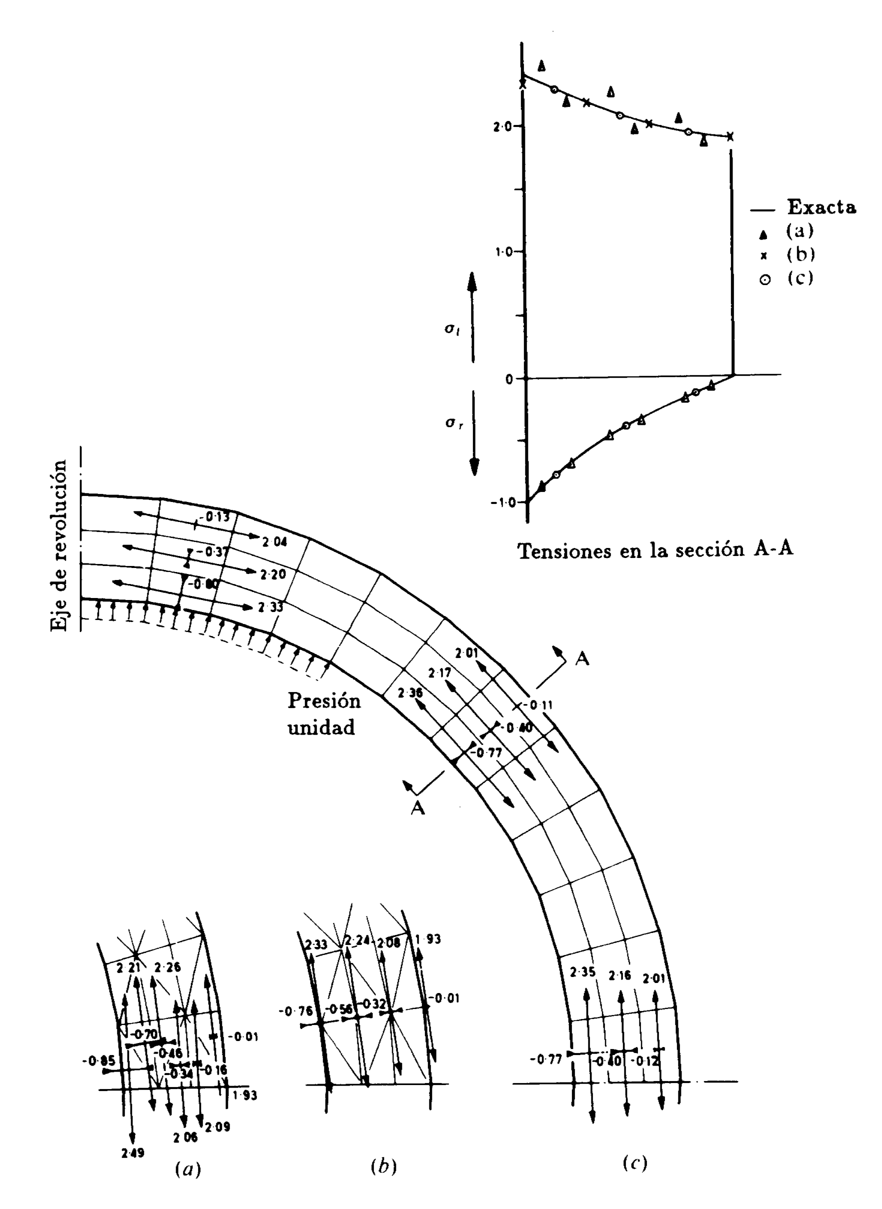


Figura 4.4 Tensiones en una esfera sometida a presión interior. (Coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$): (a) malla triangular –valores en el centro de los triángulos. (b) malla triangular –valores medios nodales. (c) malla cuadrilateral obtenida tomando la media de los valores en triángulos adyacentes.

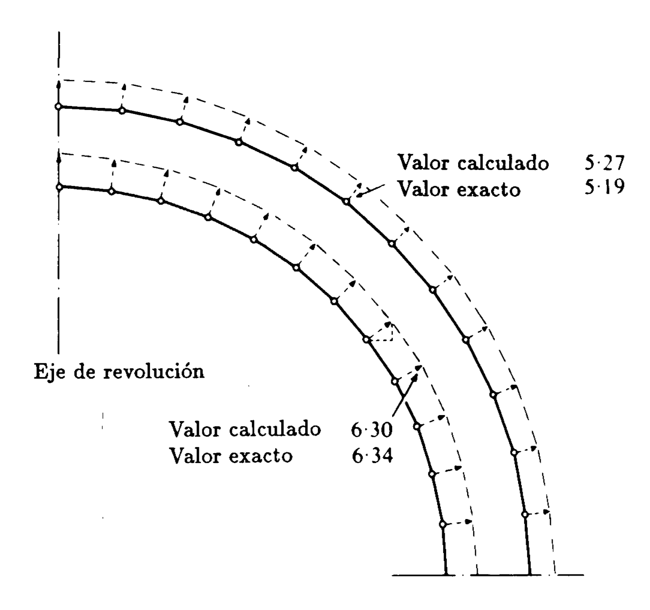


Figura 4.5 Desplazamientos de las superficies interior y exterior de la esfera sometida a las cargas de la Figura 4.4.

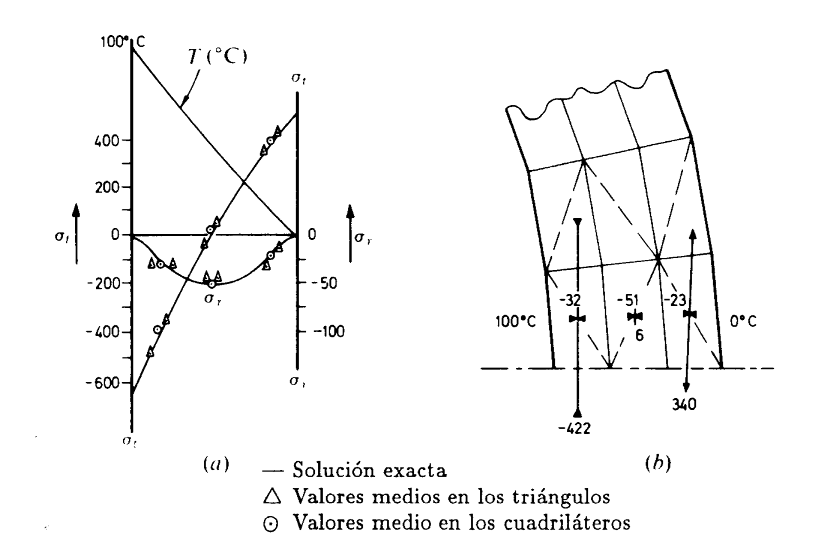


Figura 4.6 Esfera sometida a un flujo térmico estacionario. (Temperatura interior 100°C, temperatura exterior 0° C): (*a*) variación de la temperatura y de las tensiones en una sección radial; (*b*) valores medios en los 'cuadriláteros'.

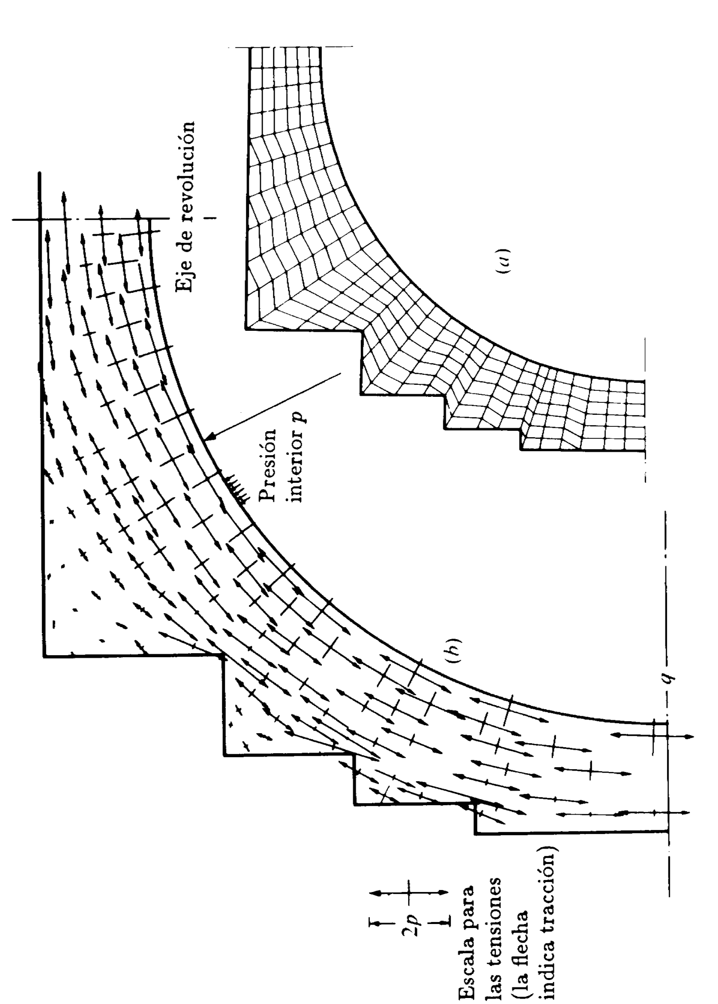


Figura 4.7 Vasija de presión de un reactor: (*a*) Malla "cuadrilateral" empleada para el análisis que fue generada automáticamente por el computador. (*b*) tensiones debidas a una presión interior uniforme (dibujadas de forma automática por el computador). Solución basada en los valores medios en los cuadriláteros. (Coeficiente de Poisson $\nu = 0.15$).

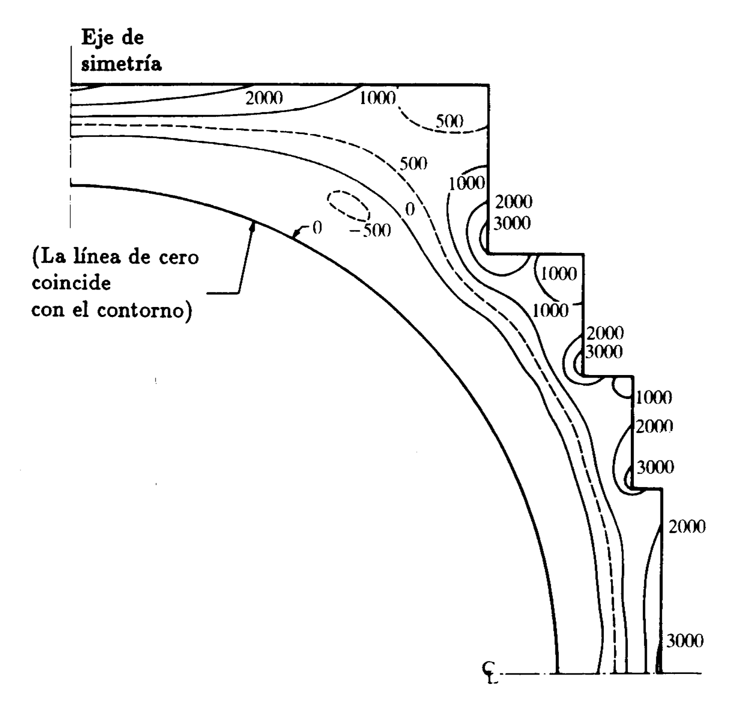


Figura 4.8 Vasija de presión de un reactor. Tensiones térmicas debidas a una transmisión estacionaria de calor. Líneas isostáticas en lb/pulg.[2] (Temperatura interior 400°C, temperatura exterior $0°C$, $\alpha = 5 \times 10^{-6}$/°C, $E = 2,58 \times 10^{6}$ lb/pulg²., $\nu = 0.15$).

4.4 Aplicaciones prácticas

Se ofrecen ahora dos ejemplos de aplicación práctica de programas existentes para distribución de tensiones en sólidos de revolución.

4.4.1 *Vasija de presión de un reactor de hormigón pretensado.* En la Figura 4.7 se muestra la distribución tensional en un prototipo de vasija de presión relativamente sencillo. Debido a la simetría, sólo se analiza la mitad del recipiente y los resultados que se dan aquí se refieren a las componentes de las tensiones originadas por una presión interior. Se pueden obtener fácilmente resultados similares debidos al efecto de los cables de pretensado introduciendo las cargas nodales producidas por dichos cables.

En la Figura 4.8 se representan las líneas isostáticas debidas a la temperatura. El estado térmico es producido por una transmisión estacionaria de calor, y el mismo se determinó siguiendo el método de los elementos finitos de la manera descrita en el Capítulo 10.

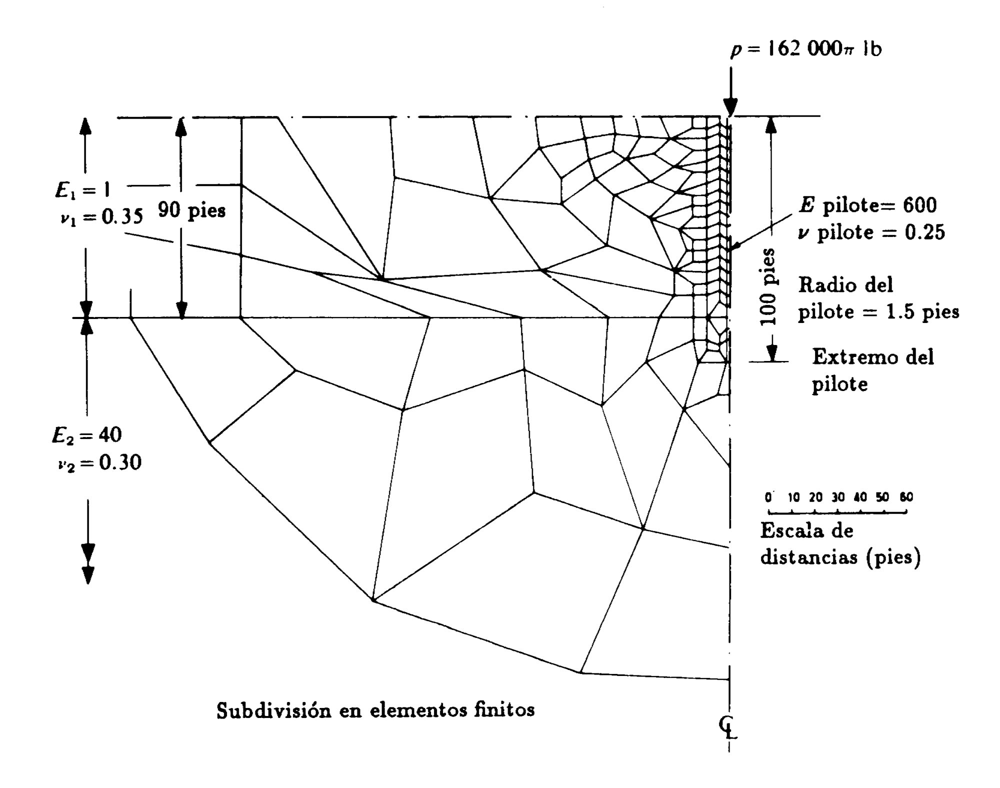


Figura 4.9 (*a*) Pilote en terreno estratificado. Malla irregular y datos del problema.

4.4.2 *Pilote de cimentación.* En la Figura 4.9 se representa la distribución de las tensiones alrededor de un pilote de cimentación que atraviesa dos estratos diferentes. Este problema, aunque no es homogéneo, no presenta ninguna dificultad y se ha tratado con el programa general.

4.5 Cargas asimétricas

El método descrito en este capítulo puede ampliarse para incluir los casos de cargas asimétricas. Si se expresa la variación de la carga a lo largo de la circunferencia en función de armónicos circulares, seguirá siendo posible dirigir la atención sobre una sección axial aunque el número de grados de libertad aumente ahora a tres.

Algunos detalles de este proceso de describen en las referencias 5 y 6.

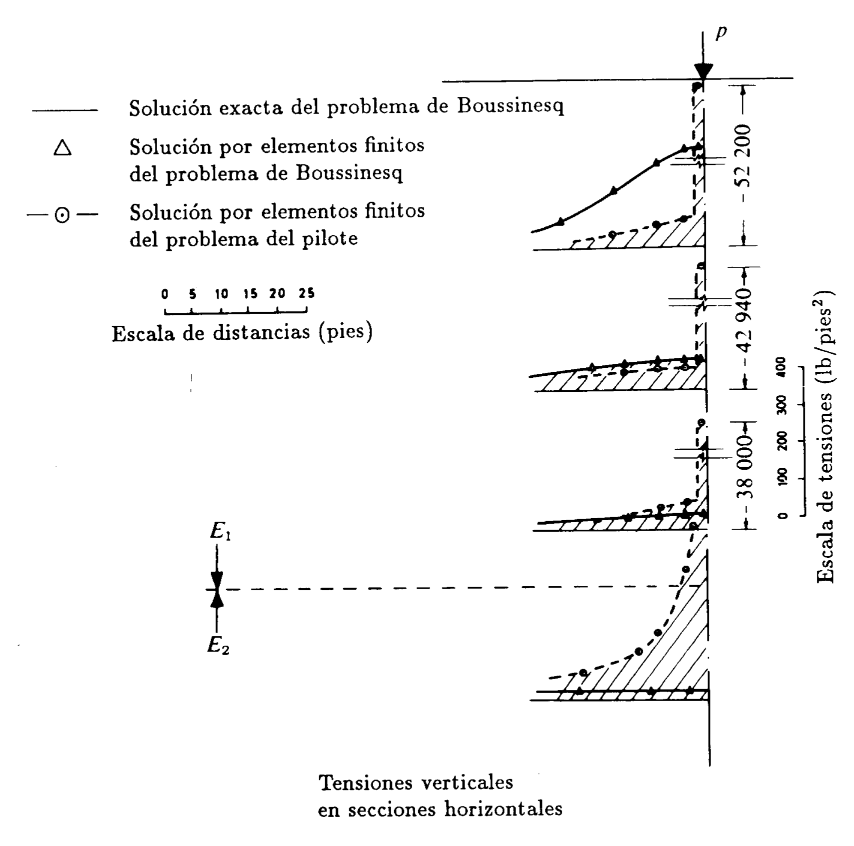


Figura 4.9 (*b*) Pilote en terreno estratificado. Gráfico de las tensiones verticales en secciones horizontales. Gráfico también de la solución para el problema de Boussinesq obtenida haciendo $E_1 = E_2 = E_{\text{pilote}}$ y comparación de ésta con los valores exactos.

4.6 Simetría de revolución, deformación plana y tensión plana

Hemos visto en el capítulo anterior que el análisis de la tensión y deformación plana se hace en función de tres componentes de tensión y de deformación y, además, cómo ambos casos se incorporaban generalmente en un programa único con un indicador para efectuar los cambios de constantes correspondientes en la matriz **D**. En la deformación plana se pierde de vista la componente σ_z que ha de ser calculada separadamente. Aún más, hubo que emplear expresiones especiales [véase la Ec. (3.13)] para introducir las deformaciones iniciales. Esto es un inconveniente (particularmente cuando las leyes constitutivas no son lineales), por lo que se recomienda encarecidamente el empleo de una forma alternativa de escribir el caso de deformación plana en función de cuatro componentes de tensión y de deformación como caso particular de análisis de revolución.

Si examinamos la definición de deformación de revolución, expresada en la Ec. (4.5), observamos que $r = \infty$ da $\varepsilon_0 \equiv 0$. Así pues, se obtienen las condiciones de deformación plana. Si reemplazamos las coordenadas

$$r \text{ y } z \quad \text{por} \quad x \text{ e } y$$

y cambiamos además en la expresión de la matriz de rigidez el volumen de integración

$$2\pi r \quad \text{por} \quad 1$$

de la formulación de revolución puede obtenerse directamente la correspondiente a la de deformación plana.

Similarmente podemos incorporar las condiciones de tensión plana, lo que además requiere la substitución de la matriz de revolución **D** por las Ecs. (3.18) o (3.23), aumentada convenientemente con una fila y una columna de ceros. Así pues, con el simple coste extra de un almacenamiento podemos incluir todos los casos considerados en un formato único.

Referencias

1. R.W. CLOUGH, Capítulo 7, *Stress Analysis*, (eds. O.C. Zienkiewicz y G.S. Holister), Wiley, 1965.
2. R.W. CLOUGH y Y.R. RASHID, "Finite element analysis of axi-symmetric solids", *Proc. A.S.C.E.*, **91**, EM.1, 71, 1965.
3. S. TIMOSHENKO y J.N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, 2nd. ed., McGraw-Hill, 1951.
4. B.M. IRONS, "Comment on Stiffness matrices for section element de I.R. Raju y A.K. Rao", *J.A.I.A.A.*, **7**, pp. 156–7, 1969.
5. E. L. WILSON, "Structural analysis of axisymmetric solids", *J.A.I.A.A.*, **3**, pp. 2269–74, 1965.
6. O.C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method*, 3rd. ed., McGraw-Hill, 1977.

Capítulo 5

ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL DE TENSIONES

5.1 Introducción

Habrá advertido el lector que llegados a este punto no queda sino un paso más para aplicar el método general de los elementos finitos a los problemas de análisis de tensiones en cuerpos tridimensionales. Tales problemas abarcan evidentemente todos los casos prácticos, aunque en algunos casos puede obtenerse un "modelo" adecuado y más económico utilizando distintas aproximaciones bidimensionales.

El elemento continuo bidimensional más sencillo es el triángulo. Su equivalente tridimensional es el tetraedro, que tiene cuatro nodos, uno en cada vértice, y sobre cuya formulación básica tratará este capítulo. Inmediatamente nos encontramos con una dificultad no aparecida antes, que es ordenar la numeración de los nodos y, de hecho, la de representar adecuadamente un cuerpo dividido en elementos como los mencionados.

Parece que fueron Gallagher *et al.*[1] y Melosh[2] los que inicialmente sugirieron el uso de elementos tetraédricos sencillos. Argyris[3,4] profundizó más en el tema y Rashid y Rockenhauser[5] han demostrado que haciendo uso de los computadores modernos de mayor capacidad se puede emplear dicha formulación para resolver problemas reales.

Es obvio inmediatamente, sin embargo, que el número de elementos tetraédricos que es preciso utilizar para obtener un orden de aproximación determinado ha de ser muy grande. En los problemas prácticos, ello dará por resultado un número elevado de ecuaciones simultáneas que pueden limitar gravemente la aplicación práctica del método. Más aún, el ancho de banda del sistema de ecuaciones resultante se hace muy grande, lo que lleva a la necesidad de disponer de computadores de gran capacidad de almacenamiento.

Para adquirir una idea del orden de magnitud de los problemas que se presentan supongamos que la precisión de un triángulo en análisis bidimensional sea comparable a la de un tetraedro en tres dimensiones. Si un análisis de tensiones correcto de una región cuadrada en dos dimensiones requiere una malla de unos $20 \times 20 = 400$ nodos, el número total de ecuaciones simultáneas es aproximadamente 800, suponiendo dos variables de desplazamiento por nodo. (Esta es una cifra bastante real.) El ancho de

banda de la matriz afecta a 20 nodos (véase el Capítulo 15), o sea, unas 40 variables.

Una región tridimensional equivalente sería la de un cubo de $20\times20\times20 =$ 8.000 nodos. El número total de ecuaciones simultáneas sería así de unas 24.000, ya que se han de especificar tres variables de desplazamiento. Y más aún, el ancho de banda relaciona ahora las interconexiones entre unos $20 \times 20 = 400$ nodos, o sea 1.200 variables.

Dado que con los procedimientos habituales de resolución el esfuerzo de cálculo es aproximadamente proporcional al número de ecuaciones y al cuadrado del ancho de banda, podrá apreciarse la magnitud de los problemas. No es, por tanto, sorprendente que en el campo del análisis tridimensional se hayan realizado los mayores esfuerzos para mejorar la precisión utilizando elementos complejos de muchos grados de libertad.[6–10] El empleo y las aplicaciones prácticas de dichos elementos se describirán en los capítulos siguientes. Sin embargo, lo que se presenta en este capítulo proporciona todos los ingredientes necesarios para la formulación de problemas de elasticidad tridimensional como continuación directa de los problemas analizados previamente. La ampliación a elementos más elaborados se hará evidente por sí sola.

5.2 Características de los elementos tetraédricos

5.2.1 *Funciones de desplazamientos.* En la Figura 5.1 se representa un elemento tetraédrico i, j, m, p en el espacio definido por las coordenadas x, y y z.

El desplazamiento de un punto queda definido por tres componentes u, v y w en las direcciones de los ejes cartesianos x, y y z. Por tanto

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \tag{5.1}$$

Al igual que en un triángulo plano los tres valores nodales definían la variación lineal de una cantidad, aquí una variación lineal vendrá definida por cuatro valores nodales. Como en el caso de la Ec. (3.3) podemos escribir, por ejemplo, que

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \tag{5.2}$$

Igualando los valores de los desplazamientos en los nodos, tenemos cuatro ecuaciones del tipo

$$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i, \qquad \text{etc.} \tag{5.3}$$

de donde podemos calcular desde α_1 a α_4.

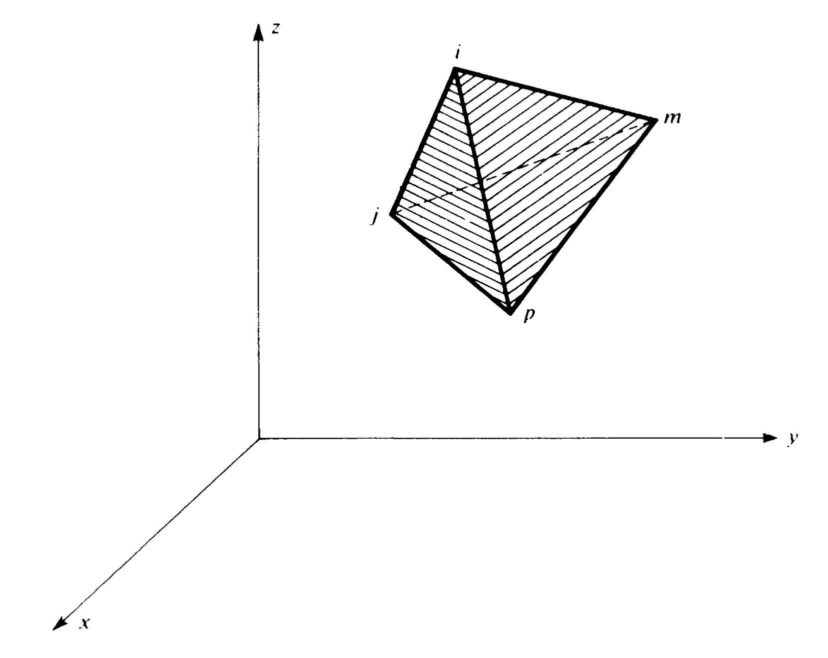


Figura 5.1 Volumen tetraédrico. (Utilizar siempre un mismo orden lógico para la numeración; por ejemplo, comenzando en p, numerar los otros nodos en sentido antihorario mirando desde p – $pijm$ o $mipj$, etc.)

Además se puede escribir esta solución de manera similar a la Ec. (3.5) empleando el determinante, o sea

$$u = \frac{1}{6V}\{(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)u_i + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z)u_j + \\ + (a_m + b_m x + c_m y + d_m z)u_m + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z)u_p\} \tag{5.4}$$

siendo

$$6V = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \tag{5.5a}$$

en la que observamos que el valor de V representa el volumen del tetraedro. Desarrollando los otros determinantes por cofactores, obtendremos

$$a_i = \det \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} \qquad b_i = -\det \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_m & z_m \\ 1 & y_p & z_p \end{vmatrix}$$
$$c_i = -\det \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_m & 1 & z_m \\ x_p & 1 & z_p \end{vmatrix} \qquad d_i = -\det \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_m & y_m & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} \tag{5.5b}$$

obteniéndose el resto de las constantes mediante permutación cíclica de los subíndices p, i, j, m.

La ordenación de los números nodales p, i, j, m, debe seguir "la regla de la mano derecha" como se deduce claramente de la Figura 5.1. Los tres primeros nodos se han numerado en ésta siguiendo un orden contrario al sentido de las agujas del reloj, mirando desde el último nodo (véase Apéndice 4).

El vector de desplazamientos del elemento viene definido como sigue por las doce componentes de desplazamientos de los nodos

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{a}_j \\ \mathbf{a}_m \\ \mathbf{a}_p \end{Bmatrix} \tag{5.6}$$

siendo

$$\mathbf{a}_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}, \qquad \text{etc.}$$

Podemos escribir el desplazamiento de un punto cualquiera así

$$\mathbf{u} = [\mathbf{I}N_i,\ \mathbf{I}N_j,\ \mathbf{I}N_m,\ \mathbf{I}N_p]\mathbf{a}^e \tag{5.7}$$

con funciones de forma definidas por

$$N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{6V}, \qquad \text{etc.} \tag{5.8}$$

y siendo $\mathbf{I}$ una matriz unitaria 3×3.

De nuevo, las funciones de desplazamientos utilizadas satisfarán obviamente las condiciones de continuidad en los contornos de separación entre elementos. Este hecho es consecuencia directa de la naturaleza lineal de la varición de los desplazamientos.

5.2.2 *Matriz de deformaciones*. En un análisis tridimensional completo, el vector deformación en un punto tiene seis componentes. La matriz de deformaciones se puede ahora definir siguiendo la notación general del texto de elasticidad de Timoshenko, como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{u} \tag{5.9}$$

Empleando las Ec. (5.4) a (5.7) se comprueba fácilmente que

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a}^e = [\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j, \mathbf{B}_m, \mathbf{B}_p]\mathbf{a}^e \tag{5.10}$$

en la cual

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x}, & 0, & 0 \\ 0, & \dfrac{\partial N_i}{\partial y}, & 0 \\ 0, & 0, & \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y}, & \dfrac{\partial N_i}{\partial x}, & 0 \\ 0, & \dfrac{\partial N_i}{\partial z}, & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z}, & 0, & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i, & 0, & 0 \\ 0, & c_i, & 0 \\ 0, & 0, & d_i \\ c_i, & b_i, & 0 \\ 0, & d_i, & c_i \\ d_i, & 0, & b_i \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

obteniéndose las restantes submatrices de manera similar, permutando simplemente los subíndices.

Las deformaciones iniciales, tales como las debidas a dilatación térmica, pueden escribirse de la forma habitual como vector de seis componentes que, por ejemplo, en una dilatación térmica isótropa serían sencillamente

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ \alpha\theta^e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.12}$$

siendo α el coeficiente de dilatación y θ^e el incremento medio de temperatura en el elemento.

5.2.3 *Matriz de elasticidad.* Si existe anisotropía completa, la matriz $\mathbf{D}$ que relaciona las seis componentes de la tensión con las componentes de la deformación puede contener 21 constantes independientes (véase la Sección 3.2.4).

Así pues, en general,

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \tag{5.13}$$

Aunque el cálculo no presenta en sí gran dificultad cuando se trata con estos materiales, ya que la multiplicación nunca se efectúa explícitamente, es conveniente recoger aquí la matriz $\mathbf{D}$ para un material isótropo. Se puede escribir ésta en función de las constantes elásticas usuales E (módulo de Young) y ν (coeficiente de Poisson),

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \begin{bmatrix} 1, & \frac{\nu}{(1-\nu)}, & \frac{\nu}{(1-\nu)}, & 0, & 0, & 0 \\ & 1, & \frac{\nu}{(1-\nu)}, & 0, & 0, & 0 \\ & & 1, & 0, & 0, & 0 \\ & \text{simétrica} & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, & 0, & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}, & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

5.2.4 *Matrices de rigidez, de tensiones y de cargas.* La matriz de rigidez definida por la Ec. (2.10) puede ahora integrarse explícitamente, ya que las componentes de la deformación y de la tensión son constantes dentro de cada elemento.

La submatriz ij general de la matriz de rigidez será una matriz 3×3 definida como:

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j V^e \tag{5.15}$$

donde V^e representa el volumen del tetraedro elemental.

Las fuerzas nodales debidas a las deformaciones iniciales se convierten, similarmente a la Ec. (3.28), en

$$\mathbf{f}_i^e = -\mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 V^e \tag{5.16}$$

teniendo una expresión similar las fuerzas debidas a las tensiones iniciales.

La similitud con las expresiones y resultados del Capítulo 3 es de hecho tan clara que es innecesaria una formulación más explícita. Los pasos necesarios para formular un programa de computador pueden repetirse sin ninguna dificultad por el lector.

Se pueden expresar de nuevo las fuerzas másicas en función de sus componentes b_x, b_y, b_z, o en función del potencial de fuerzas másicas. De nuevo se encontrará sin sorpresa que, si las fuerzas másicas son constantes, las componentes nodales de la resultante total se distribuyen en cuatro partes iguales [véase la Ec. (3.30)].

5.3 Elementos compuestos de ocho nodos

La división de un volumen en tetraedros presenta a veces dificultades de visualización y podría conducir fácilmente a errores en la numeración de los nodos, etc., a menos que se utilice un programa totalmente automático. Una subdivisión más cómoda del espacio es la de elementos paralelepípedicos de ocho vértices (del tipo "ladrillo"). Seccionando un cuerpo tridimensional pueden dibujarse secciones paralelas y, mediante la subdivisión de cada una en cuadriláteros, se puede disponer de una forma sistemática para definir los elementos como se indica en la Figura 5.2.

Dichos elementos podrían obtenerse automáticamente por ensamblaje de varios tetraedros, dejando el proceso de creación de éstos a un sencillo programa lógico. Por ejemplo, en la Figura 5.3 se muestra cómo puede dividirse un típico "ladrillo" en cinco tetraedros de dos (y solamente dos) maneras distintas. Además, calculando la media de los dos tipos de

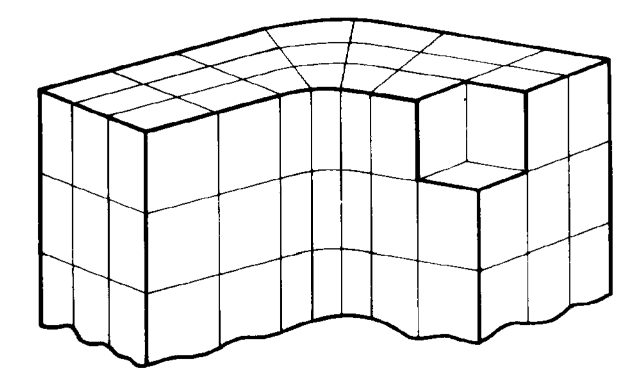


Figura 5.2 División sistemática de un volumen tridimensional en elementos de tipo "ladrillo".

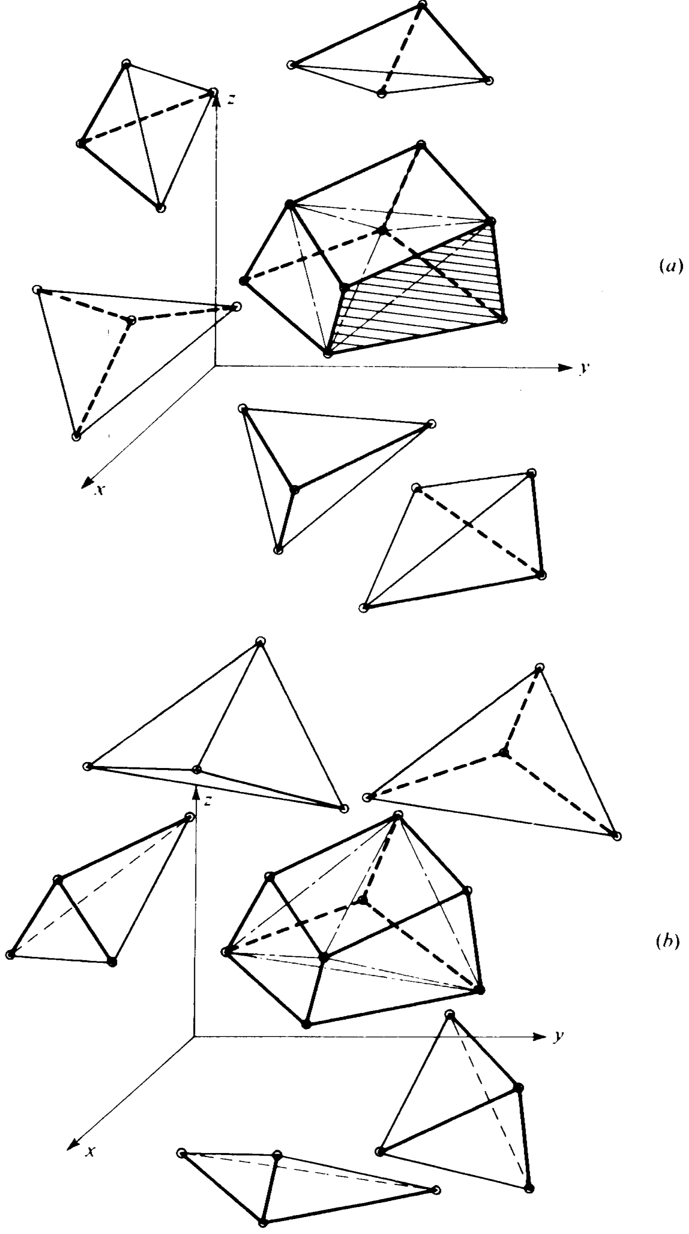


Figura 5.3 Elementos compuestos de ocho nodos y su subdivisión en cinco tetraedros mediante las alternativas (a) o (b).

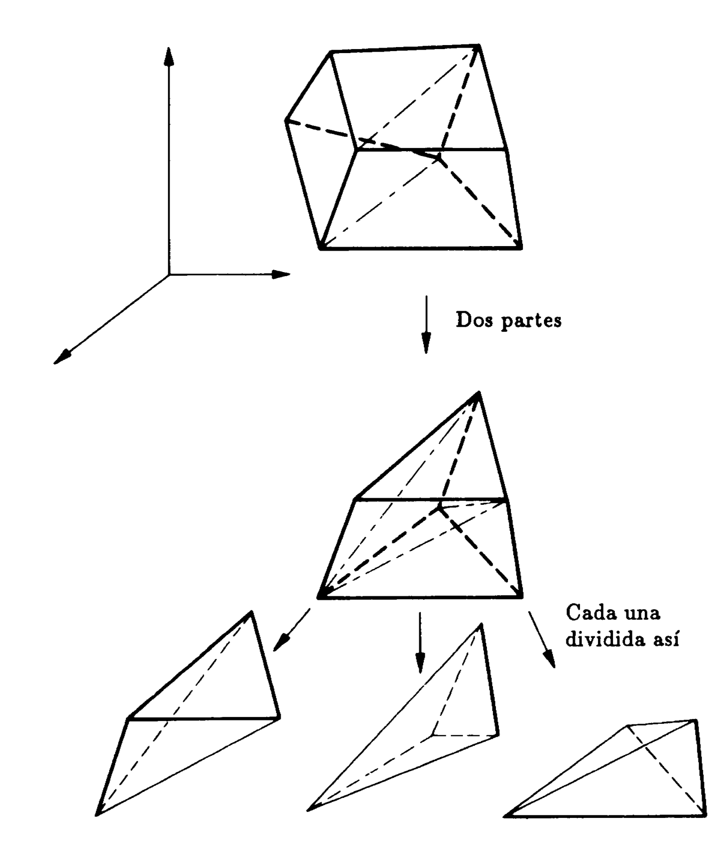


Figura 5.4 División sistemática de un elemento tipo "ladrillo" de ocho vértices en seis tetraedros.

subdivisión distintos puede obtenerse una ligera mejora en la precisión de los resultados. Para un elemento del tipo "ladrillo", las tensiones podrían muy bien representarse por el valor medio del conjunto.

En la Figura 5.4 se representa una subdivisión alternativa de un "ladrillo" en seis tetraedros. Es evidente que en este caso el número de alternativas es muy grande.

En capítulos posteriores se verá cómo los "ladrillos" básicos se pueden obtener directamente mediante funciones de forma más complejas.

5.4 Ejemplos y observaciones finales

En las Figuras 5.5 y 5.6 se representa un ejemplo sencillo de aplicación de elementos tetraédricos, en el que el conocido problema de Boussinesq de

análisis de un semiespacio elástico con una carga puntual se enfoca estudiando un volumen cúbico. Para reducir la envergadura del problema se hace uso de la simetría y los desplazamientos del contorno se establecen de la forma indicada en la Figura 5.6[11]. Puesto que se impusieron desplazamientos nulos a una distancia finita por debajo de la carga, se aplicó una corrección obtenida de la expresión exacta antes de dibujar los gráficos que se muestran en la Figura 5.5. Aunque la división sea muy grosera, se apreciará que la comparación de resultados tanto para tensiones como para desplazamientos parece razonable. Sin embargo, incluso un problema trivial como éste implica la solución de unas 375 ecuaciones. En las referencias 5 y 11 se exponen algunos problemas más ambiciosos que han sido tratados con simples tetraedros. La Figura 5.7, tomada de la primera, ilustra el análisis de una complicada vasija de presión. En este análisis aparecieron unos 10.000 grados de libertad. En el Capítulo 8 se verá cómo el uso de elementos más complicados permite efectuar un análisis suficientemente preciso para un problema muy similar mediante un número total de grados de libertad mucho más pequeño.

Aunque se ha enfatizado en este capítulo la fácil visualización de una malla de tetraedros haciendo uso de una división en "ladrillos", es posible generar automáticamente mallas arbitrarias de tetaedros de gran complejidad

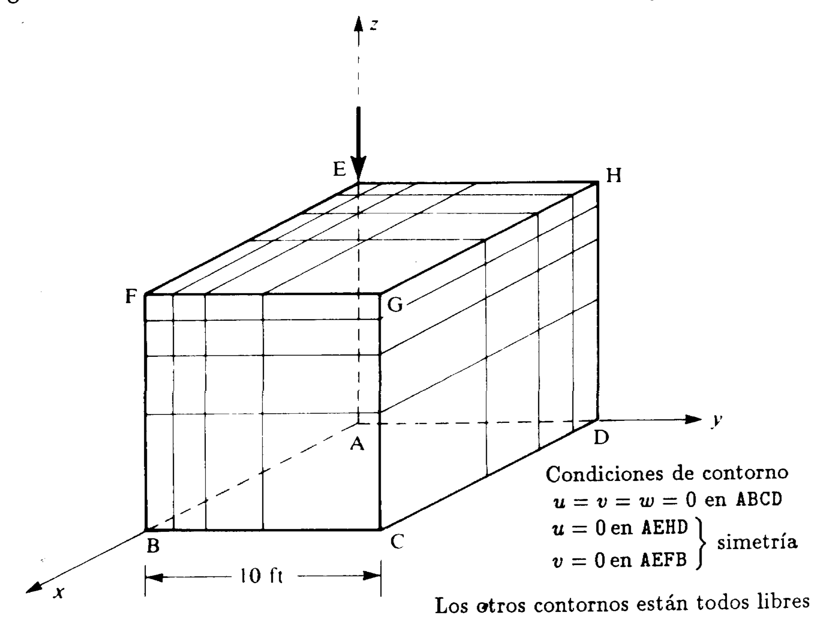
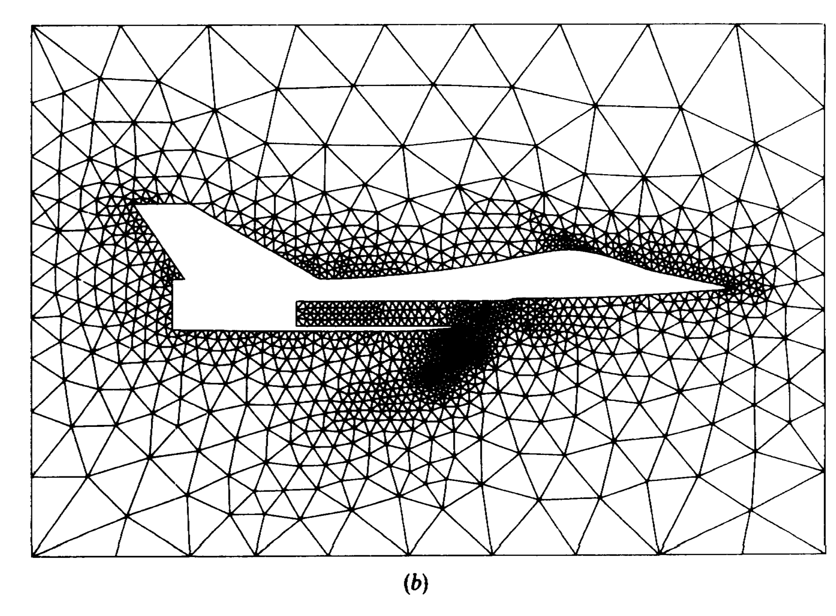


Figura 5.5 El problema de Boussinesq como caso de análisis tridimensional de tensiones.

Figura 5.6 El problema de Boussinesq: (*a*) tensiones verticales (σ_z); (*b*) desplazamientos verticales (w).

Figura 5.7 Análisis de una vasija de presión de un reactor nuclear mediante elementos tetraédricos sencillos[5]. Geometría, subdivisión y algunos valores de las tensiones.

(*a*)



(*b*)

Figura 5.8 (*a*) **Malla de tetraedros en la región exterior generada automáticamente especificando la densidad de mallado y** (*b*) **intersección de la malla con el plano central del avión.**

con cualquier densidad deseada. Los procedimientos siguen la pauta general de la generación automática de triángulos[12], a la que nos referimos en el Capítulo 14 al tratar de mallas eficientes, construídas de forma adaptable, pero naturalmente, la complejidad es mucho mayor en tres dimensiones. Algunos detalles de tales generadores los describen Peraire *et al.*[1], y la Figura 5.8 ilustra la intersección de una malla generada automáticamente con el perfil de un avión. No es posible mostrar el dibujo completo de la malla, que tiene más de 30.000 nodos. El punto importante a resaltar es que tales mallas pueden generarse automáticamente para cualquier configuración que pueda ser descrita geométricamente. Aunque este ejemplo tiene que ver con aerodinámica en vez de elasticidad, en este contexto se pueden generar mallas similares.

Referencias

[1] R.H. GALLAGHER, J. PADLOG, P.P. BIJLAARD, "Stress analysis of heated complex shapes", *A.R.S. Journal*, 700–7, 1962.
[2] R.J. MELOSH, "Structural analaysis of solids", *Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.*, **S.T.4**, 205–23, Aug. 1963.
[3] J.H. ARGYRIS, "Matrix analysis of three-dimensional elastic media–small and large displacements", *J.A.I.A.A.*, **3**, 45–51, Jan. 1965.
[4] J.H. ARGYRIS, "Three-dimensional anisotropic and inhomegeneous media–matrix analysis for small and large displacements", *Ingenieur Archiv*, **34**, 33–55, 1965.
[5] Y.R. RASHID y W. ROCKENHAUSER, "Pressure vessel analysis by finite element techniques", *Proc. Conf. on Prestressed Concrete Pressure Vessels*, Inst. Civ. Eng., 1968.
[6] J.H. ARGYRIS, "Continua and discontinua", *Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1965.
[7] B.M. IRONS, "Engineering applications of numerical integration in stiffness methods", *J.A.I.A.A.*, **4**, 2035–7, 1965.
[8] J.G. ERGATOUDIS, B.M. IRONS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Three dimensional analysis of arch dams and their foundations", *Proc. Symp. Arch. Dams*, Inst. Civ. Eng., 1968.
[9] J.H. ARGYRIS y J.C. REDSHAW, "Three dimensional analysis of two arch dams by a finite element method", *Proc. Sym. Arc. Dams*, Inst. Civ. Eng., 1968.
[10] S. FJELD, "Three dimensional theory of elastics", *Finite Element Methods in Stress Analysis*, (eds. I. Holand and K. Bell), Tech. Univ. of Norway, Tapir Press, Trondheim, 1969.
[11] J. OLIVEIRA PEDRO, *Thesis*, Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, 1967.
[12] J. PERAIRE, M. VAHDATI, K. MORGAN y O.C. ZIENKIEWICZ, "Adaptive remeshing for compressible flow computations", *J. Comp. Physics*, vol. **72**, 449–66, 1987.
[13] J.PERAIRE, J.PEIRO, L.FORMAGGIA, K.MORGAN y O.C.ZIENKIEWICZ, "Finite element Euler computations in three dimensions", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **26**, 2135–59, 1989.

Capítulo 6

NOTACIÓN TENSORIAL EN LA APROXIMACIÓN DE PROBLEMAS DE ELASTICIDAD

6.1 Introducción

La notación matricial utilizada en los capítulos precedentes para la descripción de cantidades tensoriales tales como tensiones y deformaciones es compacta, y creemos que fácil de entender. Sin embargo, en un programa de ordenador cada cantidad deber ser identificada mediante índices apropiados (viz. Capítulo 15), y esta concisión tiene sus ventajas. Además, muchos lectores están acostumbrados al uso de la notación tensorial indicial, que es una herramienta estándar en elasticidad. Por esta razón vamos a reescribir la formulación de elementos finitos anterior usando dicha notación, que es ampliamente usada en la literatura actual de elementos finitos.

Algunas ventajas de tal reformulación frente a la forma matricial se hacen evidentes al considerar la evaluación de la rigidez de medios isótropos. Aquí, algunas operaciones de multiplicación se vuelven redundantes y se pueden escribir programas complejos de forma más económica.

Si se consideran problemas de elasticidad más complejos, con grandes deformaciones, el uso de la notación tensorial es casi esencial para implementar, con relativa facilidad, los resultados de la extensa literatura relacionada con tales problemas.

Este capítulo añade pocas novedades a las ideas sobre discretización, pero repite con un lenguaje distinto resultados ya presentados.

6.2 Notación indicial

Cuando se escriben las coordenadas cartesianas u otras cantidades *vectoriales* asociadas a éstas es práctico usar subíndices latinos de la forma:

$$x_a, \qquad a = 1,2,3 \tag{6.1}$$

lo que equivale a (x_1, x_2, x_3) o (x, y, z) según la notación anterior. De forma similar, para un desplazamiento se escribe

$$u_a, \qquad a = 1,2,3 \tag{6.2}$$

lo que equivale a (u_1, u_2, u_3) o (u, v, w), usado anteriormente.

Para evitar la confusión con las cantidades *nodales* a las que previamente nos habíamos referido con subíndices, simplemente cambiaremos su posición a supraíndices. Así,

$$u_a^j \quad \text{tiene el mismo significado que} \quad \mathbf{u}_j \tag{6.3}$$

utilizado anteriormente, etc.

Previamente se han utilizado dos subíndices para referirse a un coeficiente de rigidez, pero la submatriz $\mathbf{K}_{ij}$ tenía 2×2 ó 3×3 coeficientes dependiendo de si se consideraban dos o tres componentes de desplazamiento. Ahora el escalar

$$K_{ab}^{ij} \qquad a, b = 1, 2, 3 \tag{6.4}$$

define completamente el coeficiente apropiado, con el término ab indicando la posición relativa de la submatriz (en este caso para un desplazamiento tridimensional).

Nótese que para una matriz simétrica se había requerido previamente que

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{K}_{ji}^T \tag{6.5a}$$

En notación tensorial, la misma simetría implica que

$$K_{ab}^{ij} = K_{ba}^{ji} \tag{6.5b}$$

6.3 Derivadas y relaciones tensoriales

En la notación tensorial la derivada de cualquier cantidad con respecto a una coordenada x_b se escribe como

$$\frac{\partial}{\partial x_b} \equiv (\ \ )_{,b} \tag{6.6}$$

Por tanto, el "gradiente" del vector desplazamiento se puede escribir como

$$u_{a,b} \equiv \frac{\partial u_a}{\partial x_b} \qquad a, b = 1, 2, 3 \tag{6.7}$$

y usando el concepto de que las (pequeñas) deformaciones son la parte simétrica del gradiente del desplazamiento,†

$$\varepsilon_{ab} = \tfrac{1}{2}(u_{a,b} + u_{b,a}) = \varepsilon_{ba} \qquad a, b = 1, 2, 3 \tag{6.8}$$

† Nótese que esta definición es algo distinta de la usada en los Capítulos 2 a 5. Aquí $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$ cuando $i \neq j$.

y las (pequeñas) rotaciones son la parte antisimétrica del gradiente de desplazamiento,

$$\omega_{ab} = \tfrac{1}{2}(u_{a,b} - u_{b,a}) = -\omega_{ba} \qquad a, b = 1, 2, 3 \tag{6.9}$$

Estas expresiones son análogas a las de la Ec. (2.2). Las componentes de ε_{ab} y ω_{ab} se pueden representar en forma matricical. Por ejemplo,

$$\varepsilon_{ab} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \qquad a, b = 1, 2, 3 \tag{6.10}$$

y de la Ec. (6.8) se deduce que esta matriz debe ser simétrica, es decir,

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \quad , \quad etc. \tag{6.11}$$

Introducimos aquí la idea de transformación de coordenadas al escribir

$$x'_{a'} = \sum_{b=1}^{3} \Lambda_{a'b} x_b \qquad a', b = 1, 2, 3 \tag{6.12}$$

donde x'_a es un nuevo conjunto de coordenadas cartesianas y

$$\Lambda_{a'b} = \cos(x'_{a'}, x_b) \tag{6.13}$$

define los cosenos directores de los ejes de forma similar a la Ec. (1.25).

La notación de una suma [ej., ver Ec. (6.12)] se usa a menudo, y se emplea el criterio de que los índices repetidos dentro de cualquier término implican una suma sobre el rango de los índices. Por tanto, en vez de la Ec. (6.12) se puede escribir simplemente

$$x'_{a'} = \Lambda_{a'b} x_b \qquad a', b = 1, 2, 3 \tag{6.14}$$

para expresar

$$x'_{a'} = \Lambda_{a'1} x_1 + \Lambda_{a'2} x_2 + \Lambda_{a'3} x_3 \qquad a' = 1, 2, 3 \tag{6.15}$$

En la Ec. (6.14) a se denomina "índice libre" mientras que a b se le llama "índice mudo", puesto que puede ser reemplazado por cualquier índice no libre sin que varíe el significado del término. El criterio de suma se usa en lo que resta del capítulo y el lector debería asegurarse de que comprende totalmente este concepto antes de proseguir.

Usando el concepto de cosenos directores y la transformación de coordenadas de la Ec. (6.14) se tiene, de forma similar,

$$u'_{a'} = \Lambda_{a'b} u_b \qquad a', b = 1, 2, 3 \tag{6.16}$$

Tras algunas operaciones y utilizando la definición (6.8) se obtiene

$$\varepsilon'_{a'b'} = \Lambda_{a'c}\varepsilon_{cd}\Lambda_{b'd} \quad a', b', c, d = 1, 2, 3 \tag{6.17}$$

Las variables que se transforman según la Ec. (6.16) se llaman *tensores cartesianos de primer orden*, mientras que aquellas que se transforman según la Ec. (6.17) se denominan *tensores cartesianos de segundo orden*. Por tanto, el uso de la notación indicial en el contexto de coordenadas cartesianas rectangulares lleva de forma natural a que cada variable de mecánica estructural esté definida por un tensor cartesiano del rango apropiado.

Los elementos de la tensión se pueden escribir como σ_{ab} con $a, b = 1, 2, 3$ y expresados como una matriz como se hizo en la Ec. (6.10) para las deformaciones.

De esta forma,

$$\sigma_{ab} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad a, b = 1, 2, 3 \tag{6.18}$$

Los elementos de la tensión también se transforman como un tensor cartesiano de segundo orden. La simetría de tensor de tensiones se puede probar sumando momentos (momento angular) respecto de cada uno de los ejes coordenados, y se obtiene

$$\sigma_{ab} = \sigma_{ba} \qquad a, b = 1, 2, 3 \tag{6.19}$$

Si se introduce un vector de fuerzas de volumen

$$b_a = (b_1, b_2, b_3) \qquad a = 1, 2, 3 \tag{6.20}$$

se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio (equilibrio de momento lineal) para un elemento de volumen unitario como

$$\sigma_{ba,b} + b_a = 0 \qquad a, b = 1, 2, 3 \tag{6.21}$$

donde los índices repetidos indican suma sobre el rango del índice; esto es.

$$\sigma_{ba,b} \equiv \sum_{b=1}^{3} \sigma_{ba,b} = \sigma_{1a,1} + \sigma_{2a,2} + \sigma_{3a,3} \tag{6.22}$$

Nótese que el índice libre a debe aparecer en cada término de la ecuación para que ésta tenga sentido.

Como otro ejemplo del criterio de suma considérese un término $\sigma_{ab}\varepsilon_{ba}$, que tiene unidades de trabajo por unidad de volumen. Este término implica una doble suma; por tanto, sumando primero en a se tiene

$$\sigma_{ab}\varepsilon_{ab} = \sigma_{1b}\varepsilon_{1b} + \sigma_{2b}\varepsilon_{2b} + \sigma_{3b}\varepsilon_{3b} \tag{6.23}$$

y luego sumando en b se tiene

$$\sigma_{ab}\varepsilon_{ab} = \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13} + \sigma_{21}\varepsilon_{21} + \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{23}\varepsilon_{23} + \sigma_{31}\varepsilon_{31} + \sigma_{32}\varepsilon_{32} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} \tag{6.24}$$

También se pueden usar las condiciones de simetría en σ_{ab} y ε_{ab} para reducir los nueve términos a seis. De esta forma,

$$\sigma_{ab}\varepsilon_{ab} = \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\varepsilon_{33} + 2(\sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{23}\varepsilon_{23} + \sigma_{31}\varepsilon_{31}) \tag{6.25}$$

Haciendo un desarrollo similar se puede mostrar el significado de la expresión

$$\sigma_{ab}\omega_{ab} \equiv 0 \quad a, b = 1, 2, 3 \tag{6.26}$$

6.4 Materiales elásticos y discretización por elementos finitos

Para un material elástico la relación lineal más general que se puede escribir entre tensiones y deformaciones es

$$\sigma_{ab} = D_{abcd}(\varepsilon_{cd} - \varepsilon^0_{cd}) + \sigma^0_{ab} \tag{6.27}$$

La ecuación (6.27) es la equivalente a la Ec. (2.5) pero escrita ahora en notación tensorial. Nótese que los módulos elásticos que aparecen en la Ec. (6.27) llevan cuatro subíndices. Al escribir la ecuación constitutiva respecto al sistema de coordenadas x'_a y usando la transformación de tensiones y deformaciones se puede establecer que los módulos elásticos son elementos de un tensor cartesiano de cuarto orden. Éste se transforma según

$$D'_{a'b'c'd'} = \Lambda_{a'e}\Lambda_{b'f}\Lambda_{c'g}\Lambda_{d'h}D_{efgh} \tag{6.28}$$

Los módulos elásticos de un material elástico lineal isótropo se pueden escribir como

$$D_{abcd} = \delta_{ab}\delta_{cd}\lambda + (\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc})\mu \tag{6.29}$$

donde λ, μ son las constantes de Lamé y δ_{ab} es la delta de Kronecker, definida como

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases} \tag{6.30}$$

Un material isótropo lineal está, por tanto, caracterizado por dos constantes elásticas independientes. En vez de las constantes de Lamé se pueden usar

el módulo de Young, E, y el coeficiente de Poisson, ν, para caracterizar al material. Las constantes de Lamé se pueden relacionar con el módulo de Young y el coeficiente de Poisson de la forma

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

y (6.31)

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Si se introduce ahora la aproximación de los desplazamientos típica de elementos finitos dada por la Ec. (2.1), se puede escribir para un elemento aislado, y utilizando notación indicial

$$u_a \approx \hat{u}_a = N^i \bar{u}_a^i \qquad a = 1,2,3; \quad i = 1,2,...,n \tag{6.32}$$

donde n es el número total de nodos en el elemento. La deformación aproximada de cada elemento está dada por la definición de la Ec. (6.8) como

$$\hat{\varepsilon}_{ab} = \tfrac{1}{2}[N_{,b}\bar{u}_a^i + N_{,a}^i\bar{u}_b^i] \qquad a,b = 1,2,3; i = 1,2,\cdots,n \tag{6.33}$$

El trabajo virtual interno de un elemento viene dado por

$$\delta U^I = \int_{V^e} \delta\varepsilon_{ab}\sigma_{ab}\, dV \tag{6.34}$$

Utilizando las Ecs. (6.33) y (6.24) y usando las simetrías de D_{abcd} se puede escribir el trabajo virtual interno de un material elástico lineal como

$$\delta U^I = \delta\bar{u}_a^i \left(\int_{V^e} N_{,b}^i D_{abcd} N_{,d}^j\, dV\right) \bar{u}_c^j - \delta\bar{u}_a^i \int_{V^e} N_{,b}^i (D_{abcd}\varepsilon_{cd}^0 - \sigma_{ab}^0)\, dV \tag{6.35}$$

reescribiendo los términos obtenidos en el Capítulo 2 en notación tensorial.

El "tensor" de rigidez está ahora definido como

$$K_{ac}^{ij} = \int_{V^e} N_{,b}^i D_{abcd} N_{,d}^j\, dV \tag{6.36}$$

Cuando las propiedades elásticas son constantes sobre el elemento se puede separar la integración de las propiedades de los materiales definiendo

$$W_{bd}^{ij} = \int_{V^e} N_{,b}^i N_{,d}^j\, dV \tag{6.37}$$

y entonces, haciendo las sumas con los módulos del material

$$K_{ac}^{ij} = W_{bd}^{ij} D_{abcd}$$

En el caso de isotropía se obtiene un resultado particularmente simple,

$$K_{ac}^{ij} = \lambda W_{ac}^{ij} + \mu[W_{ca}^{ij} + \delta_{ac}(W_{bb}^{ij})]$$

Esto permite llevar a cabo la integración usando menos operaciones aritméticas que cuando se usa la forma matricial.

Las ecuaciones finales del sistema se escriben como

$$K_{ac}^{ij} u_c^j - f_a^i = 0 \tag{6.38}$$

y en esta forma "escalar" se identifica fácilmente cada coeficiente. El lector puede, como ejercicio sencillo, completar la derivación de los términos de fuerza debidos a la deformación inicial ε_{ab}^0, a las fuerzas de volumen b_a y las fuerzas de superficie.

La notación tensorial es útil a veces para clarificar los términos individuales, y esta introducción puede ser de ayuda para la lectura de cierta literatura actual.

Capítulo 7

FUNCIONES DE FORMA PARA ELEMENTOS "ESTÁNDAR" Y "JERÁRQUICOS": ALGUNAS FAMILIAS GENERALES DE CONTINUIDAD C_0

7.1 Introducción

En los Capítulos 3, 4 y 5 anteriores se mostró al lector con algún detalle cómo pueden formularse y resolverse problemas de elasticidad lineal utilizando elementos finitos de formas muy simples. Aunque los cálculos se referían sólo a funciones de forma relativas a formas triangulares y tetraédricas, debe ser evidente en el punto en que nos encontramos que muy bien podrían haberse utilizado elementos de formas distintas. Además, una vez determinado el elemento y las funciones de forma correspondientes, las operaciones subsiguientes siguen una pauta general ya establecida, por lo que podrían encomendarse a un experto en álgebra no familiarizado con los aspectos físicos del problema. Se verá más adelante que en realidad es posible programar un computador para que procese una gran variedad de problemas especificando solamente las funciones de forma. La elección de éstas es, sin embargo, un punto en que se ha de aplicar el ingenio y en el que el factor humano es primordial. En este capítulo se presentan algunas reglas para generar distintas familias de elementos uni, bi y tridimensionales.

En los problemas de elasticidad expuestos en los Capítulos 3, 4 y 5, la variable desplazamiento era un vector de dos o tres componentes y las funciones de forma se escribieron en forma matricial. Sin embargo, se dedujeron separadamente para cada componente y en realidad las expresiones matriciales se obtuvieron multiplicando una función escalar por una matriz unidad [ver, por ejemplo, las Ecs. (3.7), (4.3) y (5.7)]. En este capítulo nos concentraremos por tanto en las formas escalares de las funciones de forma, omitiendo el índice prima y designándola simplemente N_i.

Las funciones de forma utilizadas al formular los problemas de elasticidad por el método de los desplazamientos tenían que satisfacer los criterios de convergencia del Capítulo 2:

a) las incógnitas han de presentar continuidad entre elementos (o sea, no se requiere la continuidad de las derivadas primeras), o en terminología matemática, continuidad C_0;

b) la función ha de permitir la representación de cualquier forma lineal, de

manera que se satisfaga el criterio de deformación constante (primera derivada constante).

Las funciones de forma que se describen en este capítulo sólo exigirán la satisfacción de estos dos criterios. Serán, por tanto, aplicables a todos los problemas de los capítulos precedentes y también a otros problemas que sólo requieran el cumplimiento de estas dos condiciones. Por ejemplo, las expresiones que se determinen aquí son válidas para todos los problemas del Capítulo 10. Son además aplicables a cualquier situación donde el funcional Π (ver Capítulo 9) esté definido solamente por derivadas de primer orden.

Las familias de elementos analizados presentarán progresivamente mayor número de grados de libertad. Podría muy bien plantearse la pregunta de si se obtiene ventaja económica o de otra índole al incrementar de esa manera la complejidad de un elemento. La respuesta no es aquí fácil, aunque pueda afirmarse como regla general que para una precisión dada, puede reducirse el número total de incógnitas de un problema aumentando el orden de un elemento. La economía requiere, sin embargo, la reducción de cálculo y de esfuerzo de preparación de datos, y esto no se cumple automáticamente para un número total de variables pequeño ya que, aunque el tiempo necesario para resolver las ecuaciones pueda reducirse, aumenta el tiempo requerido para formular el elemento.

Una notoria ventaja económica para el caso de análisis tridimensional fue ya apuntada en el Capítulo 5.

Ventajas de la misma categoría aparecen ocasionalmente en otros problemas, pero en general el elemento óptimo debe determinarse para cada caso particular.

En la Sección 2.6 del Capítulo 2 hemos demostrado que el orden de error en la aproximación es $O(h^{p+1})$, donde h es el "tamaño" del elemento y p el grado de polinomio completo que aparece en el desarrollo. Evidentemente, al aumentar el grado de las funciones de forma, aumentará también el exponente p y la convergencia hacia la solución exacta se hace más rápida. Mientras que esto nada dice acerca de la magnitud del error para una subdivisión particular, es evidente que deben buscarse funciones de forma que contengan el polinomio completo de mayor grado posible para un número de grados de libertad dado.

7.2 Conceptos de elementos estándar y jerárquico

La esencia del método de los elementos finitos, ya presentada en el Capítulo 2, consiste en aproximar la incógnita (desplazamiento) mediante un desarrollo dado por la Ec.c (2.1). Para una variable escalar u esto se puede escribir como

$$u \approx \hat{u} = \sum_{i=1}^{n} = N_i a_i = \mathbf{Na} \tag{7.1}$$

donde a_i son los parámetros incógnita que deben determinarse.

Hemos escogido explícitamente identificar tales variables con los valores de función incógnita en los nodos del elemento, haciendo

$$u_i = a_i \tag{7.2}$$

Nos referiremos a las funciones de forma así definidas como "estándar", ya que son la base de la mayoría de los programas de elementos finitos. Si se usan desarrollos polinómicos y el elemento satisface el Criterio 1 del Capítulo 2 (que implica que los movimientos de sólido rígido no provoquen deformación), es claro que un valor constante de a_i especificado para todos los nodos debe resultar en un valor constante de $\hat{u}$:

$$\hat{u} = u_i = \text{ constante} \tag{7.3}$$

De la Ec. (7.1) se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = 1 \tag{7.4}$$

en todos los puntos del dominio. La primera parte de este capítulo tratará de tales *funciones de forma estándar*.

Las funciones de forma "estándar" tienen una seria desventaja: cuando se hace un refinamiento de elementos se tienen que generar funciones de forma totalmente nuevas, y por tanto rehacer todos los cálculos. Sería ventajoso evitar esta dificultad considerando la expresión (7.1) como una *serie* en la que la función de forma N_i no depende del número de nodos de la malla n. Esto se consigue con las *funciones de forma jerárquicas*, a las que se dedica la segunda parte de este capítulo.

El concepto jerárquico queda bien ilustrado en el problema unidimensional (barra elástica) de la Figura 7.1. Se tomaron por simplicidad propiedades elásticas constantes ($D = E$) y las fuerzas másicas b varían de tal forma que se obtiene la solución exacta mostrada en la figura (con desplazamiento nulo en ambos extremos).

Se muestran dos mallas y se supone interpolación lineal entre nodos. Tanto para la forma estándar como para la jerárquica, la malla grosera da

$$K_{11}^{c} a_1^{c} = f_1 \tag{7.5}$$

En la malla fina se añaden dos nodos adicionales, y con las funciones de forma estándar las ecuaciones a resolver son

$$\begin{bmatrix} K_{11}^F & K_{12}^F & 0 \\ K_{21}^F & K_{22}^F & K_{23}^F \\ 0 & K_{32}^F & K_{33}^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \tag{7.6}$$

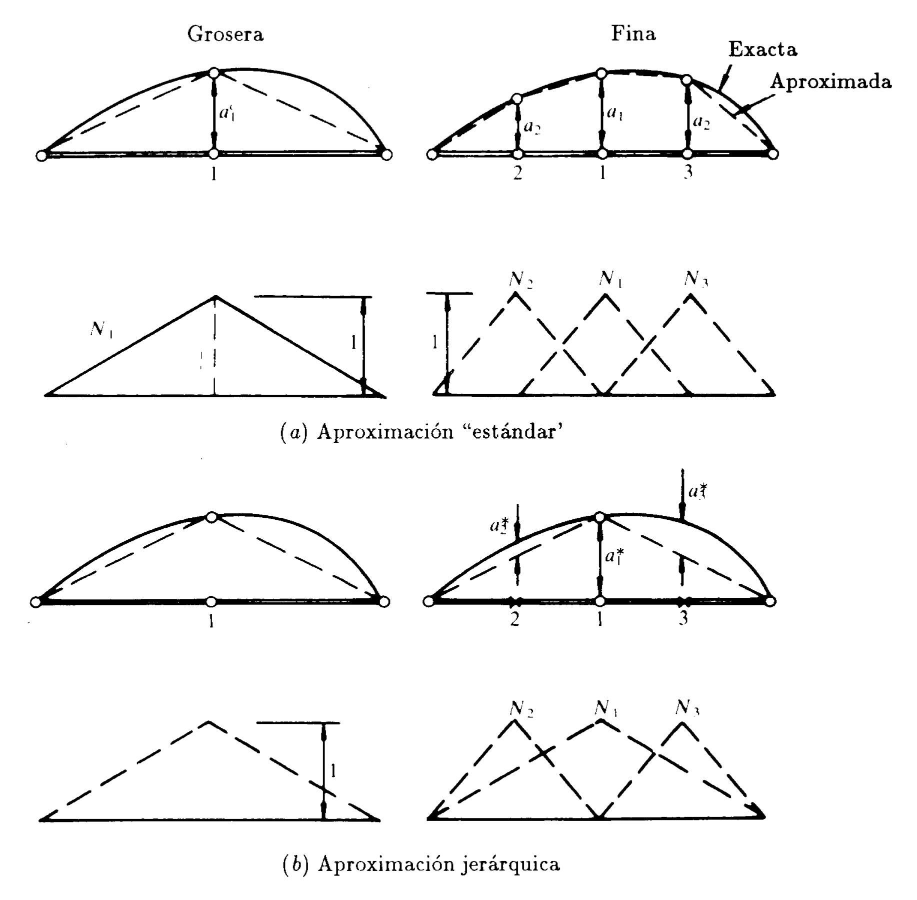


Figura 7.1 Un problema unidimensional de deformación de una barra elástica uniforme mediante fuerzas másicas prescritas.

De esta forma han aparecido automáticamente matrices nulas debido a la interconexión entre elementos, que aquí es obvia. Notemos que, dado que todos los coeficientes han variado, las nuevas ecuaciones deben ser resueltas. [La Ec. (2.13) muestra como se calculan estos coeficientes, y se anima al lector a calcularlos en detalle.]

Con la forma "jerárquica", y utilizando las funciones de forma que se muestran en la figura, aparece un sistema de ecuaciones parecido y se consigue una aproximación idéntica (dada simplemente por una serie de segmentos rectilíneos). La solución *final* es idéntica, pero el significado de los parámetros $a_1 = a_1^*$ es ahora distinto, tal como se muestra en la Figura 7.1.

De forma general,

$$K_{11}^F = K_{11}^c \tag{7.7}$$

ya que se ha usado la misma función de forma para la primera variable. Además, en este caso particular los coeficientes de fuera de la diagonal son cero y las ecuaciones finales para la malla fina son:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^c & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^F & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ a_3^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} \tag{7.8}$$

La "diagonalidad" de este sistema sólo se presenta para problemas undimensionales, pero se encuentra, en general, que las matrices obtenidas utilizando funciones de forma jerárquicas son casi diagonales y esto implica un mejor condicionamiento que en aquéllas en que se usan funciones de forma estándar.

Ahora las variables no tienen interpretación obvia como valores locales de los desplazamientos, pero pueden ser fácilmente transformados a éstos si se desea. Aunque no es usual utilizar funciones jerárquicas en elementos lineales su obtención en forma polinómica es sencilla y muy ventajosa.

En el Capítulo 14 se discuten más ventajas de esta forma de aproximación.

El lector debe notar que con la forma jerárquica es conveniente considerar la malla fina como una mejora de la malla original, añadiendo funciones adicionales de refinamiento.

Las formas jerárquicas proporcionan una conexión con otras soluciones aproximadas por series. Muchos problemas resueltos en la bibliografía clásica mediante desarrollo en series trigonométricas de Fourier son, de hecho, casos particulares de este procedimiento.

Parte 1 Funciones de forma "estándar"

ELEMENTOS BIDIMENSIONALES

7.3 Elementos rectangulares. Algunas consideraciones preliminares

Conceptualmente (en especial si el lector está condicionado por su educación a pensar en el sistema de coordenadas cartesianas), la forma de elemento más sencilla es la de un rectángulo de lados paralelos a los ejes x e y. Consideremos, por ejemplo, un rectángulo como el representado en la Figura 7.2 con puntos nodales numerados de 1 a 8 en las posiciones indicadas, y en donde los valores de la función incógnita u (representando aquí, por

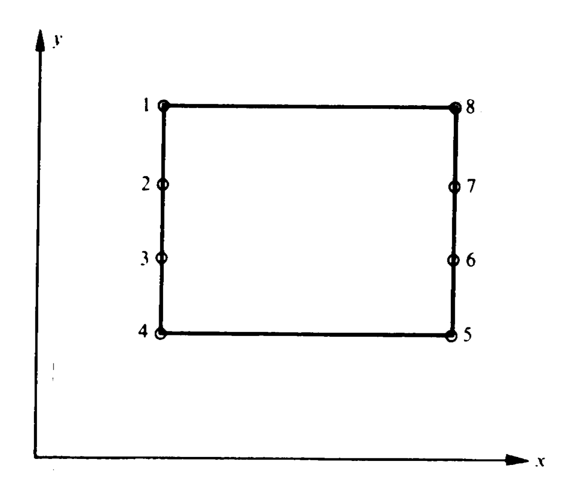


Figura 7.2 Elemento rectangular.

ejemplo, una de las componentes del desplazamiento) forman los parámetros del elemento. ¿ Cómo pueden determinarse funciones de forma adecuadas para este elemento?

Supongamos en primer lugar que u se exprese como forma polinómica en x e y. Para asegurar la continuidad de u entre elementos a lo largo de los lados superior e inferior, la variación debe ser lineal. Los elementos que estén en contacto con el lado superior o inferior tendrán dos puntos comunes con dichos lados, y puesto que dos valores determinan una función lineal de manera única, queda asegurado que a lo largo de dichos lados las funciones correspondientes a elementos continuos serán iguales. Este razonamiento ya se siguió con anterioridad al especificar funciones lineales para el triángulo.

Similarmente, si suponemos que a lo largo de los lados verticales la variación es cúbica, aseguramos la continuidad en los mismos, puesto que cuatro valores determinan un polinomio de tercer grado de manera única. Se han obtenido, pues, las condiciones para que se satisfaga el primer criterio.

Para asegurar la existencia de valores arbitrarios de las derivadas primeras basta con que se conserven todos los términos lineales del desarrollo.

Finalmente, puesto que la variación de la función ha de venir determinada unívocamente por ocho puntos, sólo pueden retenerse ocho coeficientes del desarrollo y, por consiguiente, podemos escribir

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy^2 + \alpha_7 y^3 + \alpha_8 xy^3 \tag{7.9}$$

Generalmente, se puede llevar a cabo la elección de forma unívoca reteniendo los términos del desarrollo del menor grado posible, aunque evidentemente

en este caso no se presenta dicha situación.† El lector comprobará fácilmente que ya se han satisfecho todas las condiciones.

Sustituyendo las coordenadas de los distintos nodos se obtendrá un sistema de ecuaciones simultáneas.

Éste puede escribirse de la misma forma que en el caso del triángulo en la expresión (3.4)

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, x_1, y_1, x_1y_1, y_1^2, x_1y_1^2, y_1^3, x_1y_1^3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \tag{7.10}$$

o simplemente como

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha} \tag{7.11}$$

Formalmente,

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^e \tag{7.12}$$

y podríamos escribir la Ec. (7.9) como

$$u = \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{P}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^e \tag{7.13}$$

en la cual

$$\mathbf{P} = [1, x, y, xy, y^2, xy^2, y^3, xy^3] \tag{7.14}$$

Así pues, las funciones de forma del elemento definidas por

$$u = \mathbf{N}\mathbf{u}^e = [N_1, N_2, \ldots, N_8]\mathbf{u}^e \tag{7.15}$$

se pueden determinar a partir de

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}\mathbf{C}^{-1} \tag{7.16}$$

Este procedimiento, muy utilizado en la práctica ya que no implica mucha ingeniosidad, presenta, sin embargo, algunas desventajas considerables. A veces puede que no exista la inversa de **C**[1,2] y *siempre* se encuentra considerable dificultad algebraica en la obtención de una inversa adecuada, en términos generales, a todas las geometrías del elemento. Vale la pena, por tanto, considerar la posibilidad de escribir directamente las funciones

† Si se retiene un término de mayor grado del desarrollo ignorando uno de menor grado, la aproximación será generalmente más pobre, aunque se mantendrá la convergencia,[1] siempre que se incluyan los términos lineales.

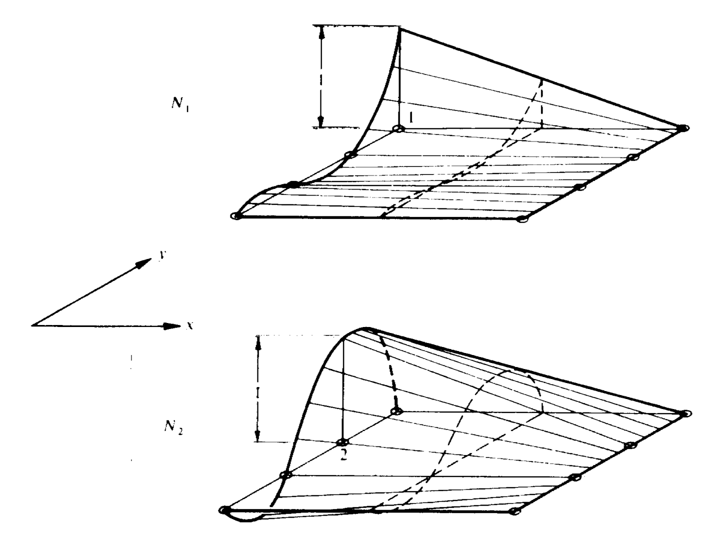


Figura 7.3 Funciones de forma para los elementos de la Figura 7.2.

de forma $N_i(x, y)$. Antes de ello, hemos de mencionar algunas propiedades generales de estas funciones.

Examinando la definición expresada en la Ec. (7.15), observamos en seguida algunas características importantes. Primeramente, puesto que esta expresión es válida para todas las componentes de $\mathbf{u}^e$, será

$$N_i = 1$$

en el nodo i, y nula en todos los demás nodos. Más aún, debe conservarse la forma básica de la variación a lo largo del contorno definida por razones de continuidad (como en el ejemplo anterior, en que era lineal en x y cúbica en y). En la Figura 7.3 se representan isométricamente las funciones de forma de dos nodos típicos de elementos como los considerados. Es evidente que éstas podían haberse escrito directamente como producto de una función lineal en x por una de tercer grado en y adecuadas. No siempre es tan fácil como en este caso encontrar una solución, pero se recomienda, siempre que sea posible, tratar de deducir directamente las funciones de forma.

Será conveniente para los razonamientos que siguen, utilizar coordenadas normalizadas. En la Figura 7.4 se muestran dichas coordenadas normalizadas elegidas de manera que en los lados del rectángulo toman los valores $\pm$ 1:

$$\begin{aligned} \xi &= (x - x_c)/a \qquad d\xi = dx/a \\ \eta &= (y - y_c)/b \qquad d\eta = dy/b \end{aligned} \tag{7.17}$$

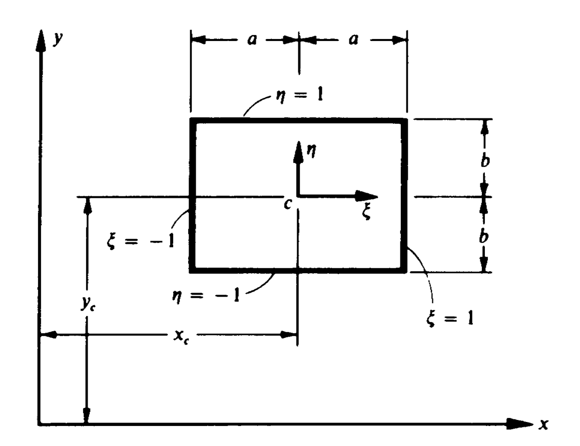


Figura 7.4 Coordenadas normalizadas para un rectángulo.

Una vez conocidas las funciones de forma en coordenadas normalizadas es muy sencillo efectuar el cambio a coordenadas globales, así como transformar las distintas expresiones que aparecen, por ejemplo, en la deducción de la matriz de rigidez.

7.4 Polinomios completos

La función de forma deducida en la sección anterior presenta una forma relativamente particular [véase la Ec. (7.9)]. Sólo permite variación lineal

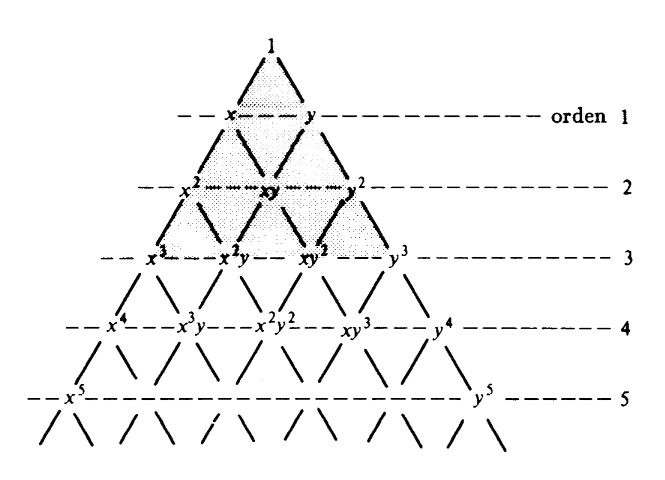


Figura 7.5 Triángulo de Pascal (se ha sombreado el desarrollo cúbico – 10 términos).

según la coordenada x, mientras que para y se tiene una forma de tercer grado completa. El polinomio completo contenido es, por tanto, de primer grado y en general siempre se obtendrá el orden de convergencia correspondiente a una variación lineal aunque se incrementaría el número total de variables. Solamente en los casos donde la variación lineal en x se acerque muchísimo a la solución exacta se dará un orden de convergencia más elevado, y por esta razón los elementos con tales direcciones "preferentes" deben restringirse a casos particulares, como vigas o bandas estrechas. En general, buscaremos funciones que posean el polinomio completo de mayor grado para un número de grados de libertad mínimo. En este contexto es útil recordar el triángulo de Pascal (Figura 7.5), del cual pueden deducirse fácilmente el número de términos que aparecen en un polinomio de dos variables x e y. Por ejemplo, un polinomio de primer grado requiere tres términos, uno de segundo grado seis términos, de tercer grado diez términos, etc.

7.5 Elementos rectangulares. Familia de Lagrange[3-6]

Se puede obtener un método fácil y sistemático para engendrar funciones de forma de cualquier grado mediante el simple producto de los polinomios apropiados en las dos coordenadas. Consideremos un elemento como el mostrado en la Figura 7.6 en el que se disponen una serie de nodos, exteriores e interiores, formando una malla regular. Se desea determinar una función de forma para el punto indicado por el círculo más grande. Evidentemente, el producto de un polinomio de quinto grado en ξ, que tome el valor unidad en los puntos de la segunda columna de nodos y cero en todos los demás, por un polinomio de cuarto grado en η, que tome el valor unidad en la coordenada que corresponde a la fila de nodos superior y cero en todos los demás puntos, satisfará las condiciones de continuidad entre elementos y dará la unidad en el punto nodal en cuestión.

Los polinomios de una variable que presentan esta propiedad se conocen como polinomios de Lagrange y pueden escribirse directamente como sigue

$$l_k^n(\xi) = \frac{(\xi-\xi_0)(\xi-\xi_1)\dots(\xi-\xi_{k-1})(\xi-\xi_{k+1})\dots(\xi-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_0)(\xi_k-\xi_1)\dots(\xi_k-\xi_{k-1})(\xi_k-\xi_{k+1})\dots(\xi_k-\xi_n)} \quad (7.18)$$

dando la unidad en ξ_k y pasando por n puntos.

Por tanto, si en dos dimensiones distinguimos cada nodo por su columna y su número nodal I, J, tenemos

$$N_i \equiv N_{IJ} = l_I^n(\xi) l_J^m(\eta) \quad (7.19)$$

donde n y m representan el número de subdivisiones en cada dirección.

En la Figura 7.7 se muestran algunos miembros de esta ilimitada familia. Aunque fácil de generar, su utilidad es limitada, no sólo debido al gran número de nodos interiores que presenta, sino también a las escasas

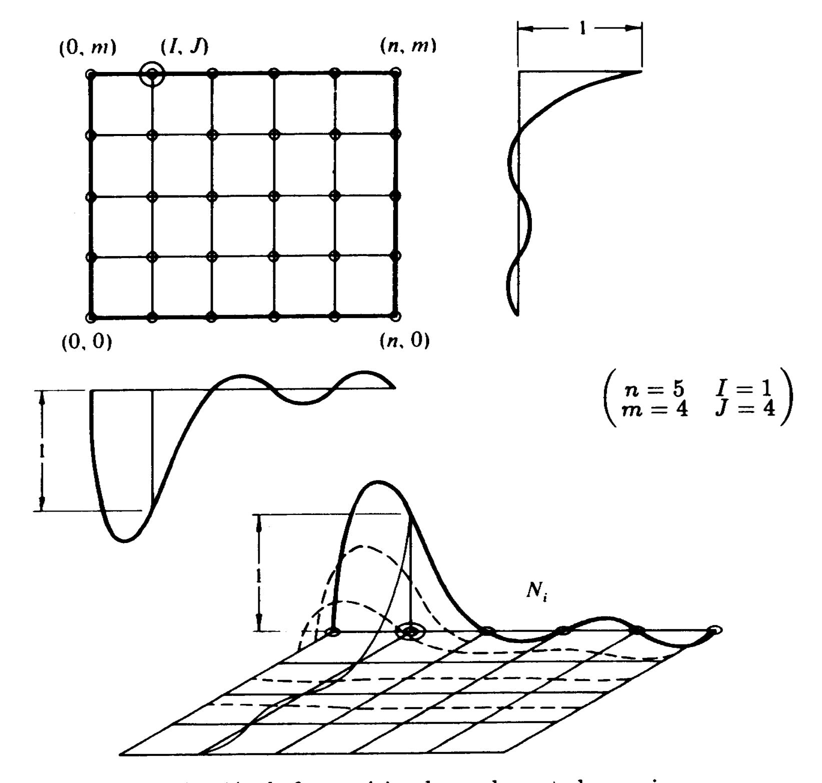


Figura 7.6 Función de forma típica de un elemento lagrangiano.

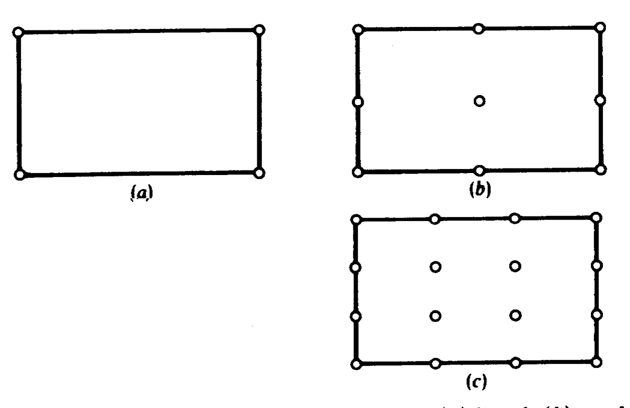


Figura 7.7 Tres elementos de la familia de Lagrange: (a) lineal, (b) cuadrático, y (c) cúbico.

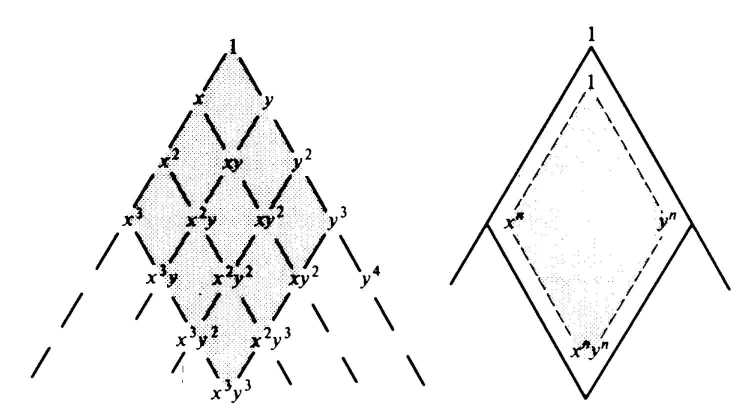


Figura 7.8 Términos generales por un desarrollo de Lagrange de grado 3 × 3 (o $m \times n$). Polinomios completos de grado 3 (o n).

condiciones para ajuste de curvas que ofrecen los polinomios de grados elevados. Se advertirá que las expresiones de las funciones de forma contienen algunos términos de grado muy elevado, mientras que se prescinde de algunos términos de grados inferiores.

Corroborando lo anterior, si examinamos los términos polinómicos presentes en una situación en la que $n = m$, advertimos en la Figura 7.8, basada en el triángulo de Pascal, que interviene un número muy grande de términos polinómicos *excesivos* respecto a los que se precisan para un desarrollo completo. Sin embargo, esta familia presenta algunas ventajas cuando se plantea la transformación de las funciones de forma (Capítulo 8).

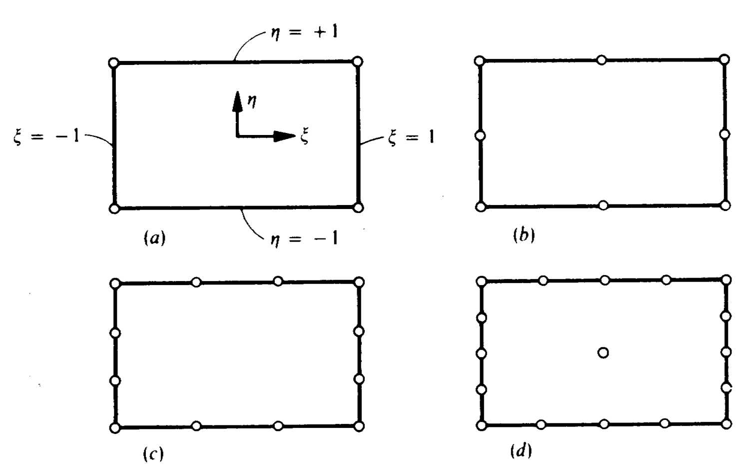


Figura 7.9 Rectángulos de la familia ("serendípita") de nodos en el contorno: (a) lineal, (b) cuadrático, (c) cúbico y (d) cuártico.

7.6 Elementos rectangulares. Familia "serendípita"[3,4]

Es con frecuencia muy conveniente hacer que las funciones dependan de valores nodales situados en el contorno. Consideremos, por ejemplo, los tres primeros elementos de la Figura 7.9. En cada uno, el número de nodos aumenta gradualmente y hay el mismo número de nodos en cada lado. Para asegurar la continuidad, la variación de la función en cada lado es lineal, parabólica y cúbica, respectivamente, según el número creciente de nodos de uno a otro elemento.

Para obtener la función de forma del primer elemento es evidente que un producto de la forma

$$\frac{1}{4}(\xi + 1)(\eta + 1) \tag{7.20}$$

toma el valor uno en el nodo superior derecho, donde $\xi = \eta = 1$, y cero en todos los demás. Además, la función de forma varía linealmene en todos los lados, y por tanto se satisface el criterio de continuidad. Este elemento es idéntico al lagrangiano con $n = 1$.

Introduciendo las nuevas variables,

$$\xi_0 = \xi\xi_i \qquad \eta_0 = \eta\eta_i \tag{7.21}$$

la expresión

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \tag{7.22}$$

permite escribir todas las funciones de forma de manera compacta.

Como una combinación lineal de estas funciones de forma proporciona cualquier variación lineal arbitraria de u, el segundo criterio de convergencia queda satisfecho.

El lector puede verificar que las siguientes funciones satisfacen todos los criterios necesarios para los miembros de segundo y tercer orden de familia.

Elemento "cuadrático"
Nodos de vértice:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1) \tag{7.23}$$

Nodos laterales:

$$\xi_i = 0 \qquad N_i = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)$$

$$\eta_i = 0 \qquad N_i = \frac{1}{2}(1 + \xi_0)(1 - \eta^2)$$

Elemento "cúbico"
Nodos de vértice:

$$N_i = \frac{1}{32}(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)[-10 + 9(\xi^2 + \eta^2)] \tag{7.24}$$

Nodos laterales:

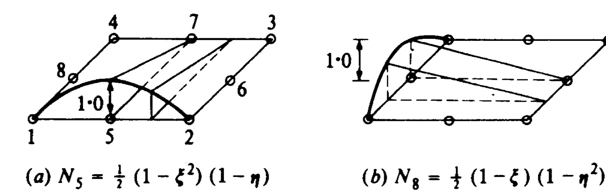
$$\xi_i = \pm 1 \qquad \text{y} \qquad \eta_i = \pm\frac{1}{3}$$

$$N_i = \frac{9}{32}(1+\xi_0)(1-\eta^2)(1+9\eta_0)$$

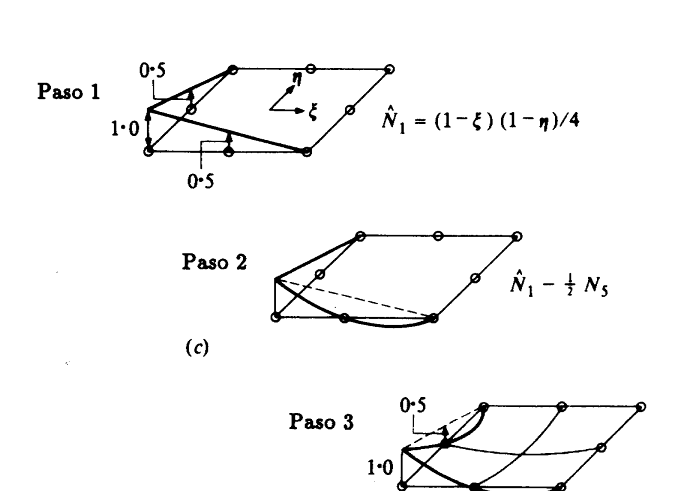
obteniéndose las expresiones para los nodos restantes permutando las variables.

En el miembro siguiente de esta familia,[8] de cuarto orden, se ha añadido un nodo central de manera que se obtengan todos los términos de un polinomio completo de cuarto grado. Este nodo central introduce una función de forma $(1-\xi^2)\,(1-\eta^2)$, que toma el valor cero en todos los contornos exteriores.

Las funciones anteriores fueron deducidas originalmente por mera observación, y su extensión a miembros de orden aún más elevado es difícil y requiere cierto ingenio. Fue, por tanto, apropiado llamar a esta familia "serendípita" por referencia al famoso Príncipe de Serendip, célebre por sus descubrimientos fortuitos (Horacio Walpole, 1754).



(a) $N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$ (b) $N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$



Puede establecerse, sin embargo, un procedimiento bastante sistemático para generar funciones de forma serendípitas, el cual resulta evidente en la Figura 7.10, donde se presenta la generación de una función de forma de segundo grado.[7,9]

Para empezar, observamos que para los nodos *laterales* basta con una interpolación lagrangiana del tipo lineal × 2° grado para determinar N_i en los nodos 5 a 8. N_5 y N_8 se representan en la Figura 7.10 (*a*) y (*b*). Para un nodo de *vértice*, como el de la Figura 7.10 (*c*), comenzamos con una $\hat{N}_1$ bilineal y advertimos inmediatamente que mientras $\hat{N}_1 = 1$ en el nodo 1, es distinta de cero en los nodos 5 u 8 (paso 1). Sustrayendo sucesivamente $\frac{1}{2}N_5$ (paso 2) y $\frac{1}{2}N_8$ (paso 3), aseguramos que se obtiene un valor nulo en dichos nodos. El lector puede verificar que las expresiones obtenidas coinciden con las Ecs. (7.23) y (7.24).

Ciertamente, debería ahora resultar evidente que para todos los elementos de orden más elevado, se pueden generar, siguiendo un proceso idéntico, funciones de forma para nodos *laterales* y de *vértice*. Para

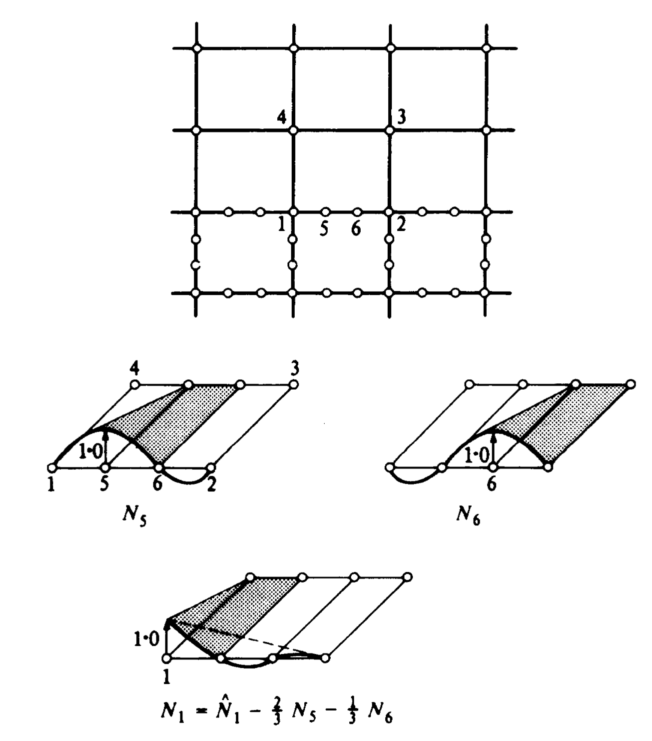


Figura 7.11 Funciones de forma para un elemento "serendípito" de transición cúbico/lineal.

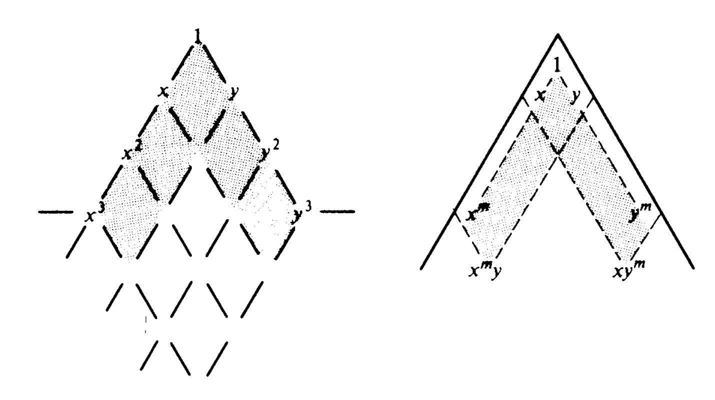


Figura 7.12 Términos generados por funciones de forma de borde en los elementos serendípitos (3×3 y $m \times m$).

las primeras basta con una simple multiplicación de dos interpolaciones lagrangianas de grados m y 1. Para las segundas es necesaria una combinación de funciones bilineales de vértice, junto con las fracciones apropiadas de las funciones de forma de los nodos laterales, para asegurar valores nulos en los nodos correspondientes.

Siguiendo un algoritmo sistemático es, por supuesto, bastante fácil generar funciones de forma para elementos con diferente número de nodos en cada lado. Estos elementos son muy apropiados cuando se desea obtener una transición entre elementos de diferente orden, lo que permite estudiar grados de precisión diferentes en distintas secciones de un problema de grandes dimensiones. En la Figura 7.11 se representan las funciones de forma necesarias para una transición cúbico/lineal. El empleo de tales elementos mixtos se introdujo originalmente según la referencia 9, pero la formulación más sencilla utilizada aquí corresponde a la referencia 7.

Disponiendo ya de un procedimiento para generar las funciones de forma adecuadas a esta clase de elementos, es evidente de inmediato que se necesitarán ahora menos grados de libertad para un polinomio completo dado. En la Figura 7.12 se muestra este hecho para un elemento cúbico, donde sólo aparecen dos términos adicionales (comparados con los seis que aparecían en un elemento lagrangiano del mismo grado).

Se aprecia de inmediato, sin embargo, que las funciones generadas sólo por nodos laterales no generarán polinomios completos de grado superior a tres. Para grados más elevados será necesario complementar el polinomio con nodos interiores (tal como se hizo con el elemento cuártico de la Figura 7.9), o mediante el empleo de variables "anodales" (que se examinarán en la sección siguiente) que contengan los términos polinómicos apropiados.

7.7 Eliminación de variables internas antes del ensamblaje. Subestructuras

Los nodos interiores proporcionan las propiedades del elemento de la manera habitual (Capítulo 2)

$$\frac{\partial \Pi^e}{\partial \mathbf{a}^e} = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e + \mathbf{f}^e \tag{7.25}$$

Como $\mathbf{a}^e$ se puede subdividir en dos partes, una común a otros elementos, $\bar{\mathbf{a}}^e$, y la otra que aparece sólo en el propio elemento, $\bar{\bar{\mathbf{a}}}^e$, podemos pues escribir inmediatamente

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\bar{\mathbf{a}}}^e} = \frac{\partial \Pi^e}{\partial \bar{\bar{\mathbf{a}}}^e} = 0$$

y eliminar $\bar{\bar{\mathbf{a}}}^e$ del resto de las operaciones. Escribiendo (7.25) en forma explícita, tenemos

$$\frac{\partial \Pi^e}{\partial \mathbf{a}^e} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Pi^e}{\partial \bar{\mathbf{a}}^e} \\ \dfrac{\partial \Pi^e}{\partial \bar{\bar{\mathbf{a}}}^e} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}^e & \hat{\mathbf{K}}^e \\ \hat{\mathbf{K}}^{eT} & \bar{\bar{\mathbf{K}}}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{a}}^e \\ \bar{\bar{\mathbf{a}}}^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}}^e \\ \bar{\bar{\mathbf{f}}}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Pi^e}{\partial \bar{\mathbf{a}}^e} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7.26}$$

Del segundo sistema de ecuaciones anterior podemos escribir

$$\bar{\bar{\mathbf{a}}}^e = -(\bar{\bar{\mathbf{K}}}^e)^{-1}(\hat{\mathbf{K}}^{eT}\bar{\mathbf{a}}^e + \bar{\bar{\mathbf{f}}}^e) \tag{7.27}$$

que, tras sustituir, da

$$\frac{\partial \Pi^e}{\partial \bar{\mathbf{a}}^e} = \mathbf{K}^{*e}\bar{\mathbf{a}}^e + \mathbf{f}^{*e} \tag{7.28}$$

en la cual

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{*e} &= \bar{\mathbf{K}}^e - \hat{\mathbf{K}}^e(\bar{\bar{\mathbf{K}}}^e)^{-1}\hat{\mathbf{K}}^{eT} \\ \mathbf{f}^{*e} &= \bar{\mathbf{f}}_e - \hat{\mathbf{K}}^e(\bar{\bar{\mathbf{K}}}^e)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{f}}}^e \end{aligned} \tag{7.29}$$

Se puede ensamblar a continuación toda la región, considerando solamente las variables del contorno de los elementos, obteniendo así una economía considerable en el proceso de resolución de las ecuaciones a expensas de unas cuantas manipulaciones adicionales realizadas a nivel del elemento.

Quizás sea deseable una interpretación estructural de esta eliminación. Lo que de hecho está implicado es la separación de una parte de la estructura del todo que la rodea y la determinación de su solución separadamente para cualesquiera desplazamientos impuestos en los contornos de interconexión.

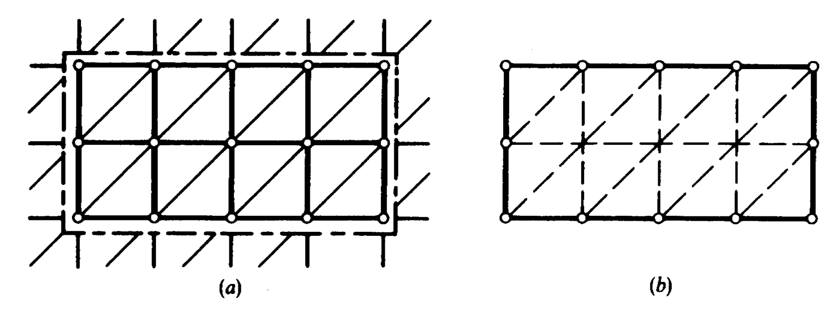


Figura 7.13 Subestructura de un elemento complejo.

$\mathbf{K}^{*e}$ es ahora simplemente la matriz de rigidez global de la estructura separada y $\mathbf{f}^{*e}$ el sistema equivalente de fuerzas nodales.

Si se interpreta la triangulación de la Figura 7.13 como un ensamblaje de barras articuladas, el lector reconocerá en seguida el conocido artificio de "subestructuración" utilizado con frecuencia en el análisis de estructuras.

En realidad, dicha subestructura es simplemente un elemento complejo del cual se han eliminado los grados de libertad interiores.

Se presenta inmediatamente una nueva posibilidad para generar elementos más elaborados y presumiblemente más precisos.

Interpretemos la Figura 7.13(a) como un continuo subdividido en elementos triangulares. La subestructura resulta ser realmente un elemento complejo, con un cierto número de nodos en el contorno que se muestra en la Figura 7.13(b).

La única diferencia con los elementos establecidos en la sección anterior es el hecho de que la incógnita u no está ahora aproximada internamente por un sistema de funciones de forma continuas, sino por una serie de aproximaciones discretas. Esto, presumiblemente, dará por resultado una aproximación ligeramente más pobre, pero puede representar una ventaja económica si se reduce el tiempo total de cálculo para tal ensamblaje.

El uso de subestructuras es un artificio importante en problemas complejos, especialmente cuando aparece repetición de componentes complicados.

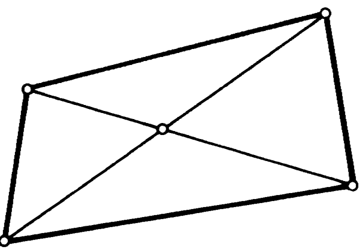


Figura 7.14 Cuadrilátero formado por cuatro triángulos sencillos.

En el análisis simple de elementos finitos a pequeña escala se encontró que el empleo de elementos triangulares sencillos se mejoraba al utilizar subensamblajes simples de triángulos (o, por supuesto, de tetraedros). Por ejemplo, se encontró que un cuadrilátero formado por cuatro triángulos y con la eliminación del nodo central proporciona una ventaja económica sobre el empleo directo de triángulos simples (Figura 7.14). Éste y otros subensamblajes basados en triángulos han sido estudiados con detalle por Doherty *et al.* [10]

7.8 Familia de elementos triangulares

La ventaja de emplear una forma triangular arbitraria para aproximar cualquier contorno ha sido puesta de manifiesto ampliamente en capítulos anteriores. Su evidente superioridad sobre formas rectangulares no necesita de más consideraciones. El tema de la generación de elementos más elaborados necesita de un desarrollo más amplio.

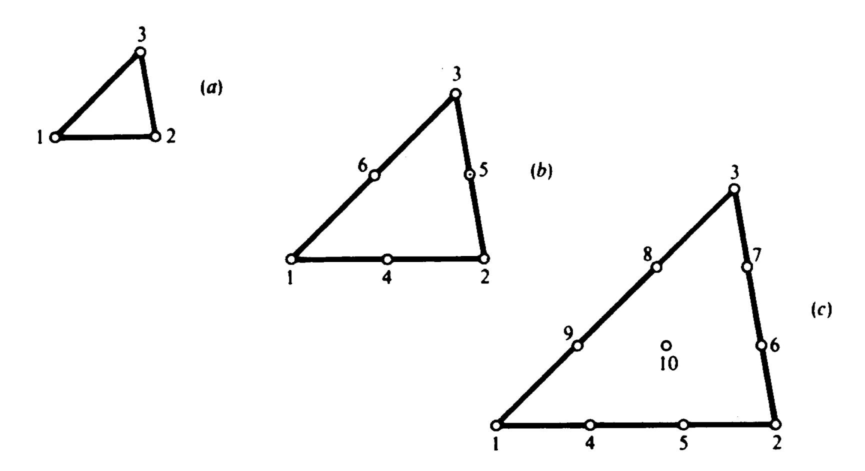


Figura 7.15 Elementos de la familia del triángulo: (a) lineal, (b) cuadrático y (c) cúbico.

Consideremos una serie de triángulos engendrados de la manera que se indica en la Figura 7.15. El número de nodos de cada miembro de la familia es ahora tal que asegura un polinomio completo del grado necesario para la compatibilidad entre elementos. Esto se deduce mediante la comparación con el triángulo de Pascal de la Figura 7.5, en donde se ve que el número de nodos coincide exactamente con el número de términos polinómicos requerido. Esta característica especial coloca a la familia del triángulo en una posición de particular privilegio, en la que siempre existirán las inversas de las matrices $\mathbf{C}$ de la Ec. (7.11)^2. Sin embargo, vuelve a ser preferible la generación directa

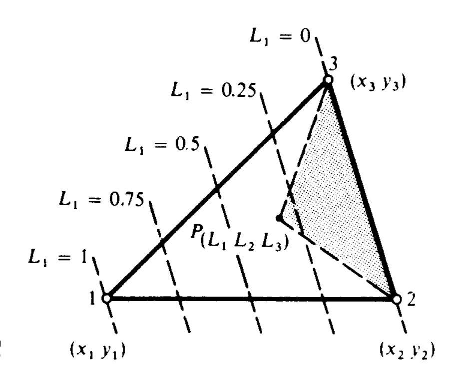


Figura 7.16 Coordenadas de área.

de las funciones de forma, y además se demostrará que resulta especialmente fácil.

Antes de proseguir es conveniente definir un sistema particular de coordenadas normalizadas para el triángulo.

7.8.1 *Coordenadas de área.* Mientras que unos ejes de coordenadas cartesianas paralelos a los lados constituyen la elección natural para deducir las funciones de forma del rectángulo, en el triángulo éstos no resultan cómodos.

Un sistema de coordenadas cómodo, L_1, L_2 y L_3 para un triángulo 1, 2, 3 (Figura 7.16), se define mediante la siguiente relación lineal entre éstas y el sistema cartesiano:

$$\begin{aligned} x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \\ y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 \\ 1 &= L_1 + L_2 + L_3 \end{aligned} \qquad (7.30)$$

A cada conjunto, L_1, L_2, L_3 (que no son independientes, ya que están relacionadas por la tercera expresión), corresponde un único conjunto de coordenadas cartesianas. En el punto 1, $L_1 = 1$ y $L_2 = L_3 = 0$, etc. Una relación lineal entre el nuevo sistema de coordenadas y el cartesiano implica que los contornos de L_1 son líneas rectas regularmente espaciadas y paralelas al lado 2-3 en el que $L_1 = 0$, etc.

Además es fácil demostrar que otra definición posible de la coordenada L_1 de un punto P es el cociente entre el área del triángulo sombreado y la del triángulo completo:

$$L_1 = \frac{\text{área } P23}{\text{área } 123} \qquad (7.31)$$

De aquí el nombre de coordenadas de área.

Despejando L_1, L_2 y L_3 del sistema (7.30), obtenemos

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{a_1 + b_1 x + c_1 y}{2\Delta} \\ L_2 &= \frac{a_2 + b_2 x + c_2 y}{2\Delta} \\ L_3 &= \frac{a_3 + b_3 x + c_3 y}{2\Delta} \end{aligned} \qquad (7.32)$$

en la cual

$$\Delta = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{área } 123 \qquad (7.33)$$

y

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ b_1 &= y_2 - y_3 \\ c_1 &= x_3 - x_2 \end{aligned}$$

etc., con permutación cíclica de los índices 1, 2 y 3.

Vale la pena señalar la coincidencia de estas expresiones con las deducidas en el Capítulo 3 [Ecs. (3.5b) y (3.5c)].

7.8.2 *Funciones de forma.* Para el primer elemento de la serie [Figura 7.15(a)], las funciones de forma son sencillamente las coordenadas de área. Por consiguiente

$$N_1 = L_1 \qquad N_2 = L_2 \qquad N_3 = L_3 \qquad (7.34)$$

Lo que es evidente puesto que individualmente cada función toma el valor uno en un nodo, cero en los otros y varía linealmente en todo el triángulo.

Para deducir funciones de forma de otros elementos se puede encontrar una sencilla ley de recurrencia.[2] Sin embargo, es muy fácil escribir un triángulo arbitrario de orden M de manera similar a como se hizo para el elemento triangular de la Sección 7.5.

Representando un nodo genérico i por tres números I, J y K en correspondencia con la posición de las coordenadas L_{1i}, L_{2i} y L_{3i}, podemos escribir la función de forma en función de tres interpolaciones de Lagrange [véase la Ec. (7.18)]:

$$N_i = l_I^I(L_1)\, l_J^J(L_2)\, l_K^K(L_3) \qquad (7.35)$$

donde l_I^I, etc., viene dado por la expresión (7.18), con L_1 en lugar de ξ, etc.

Es fácil comprobar que la expresión anterior da

$$N_i = 1 \qquad \text{en} \qquad L_1 = L_{1I}, \;\; L_2 = L_{2I}, \;\; L_3 = L_{3I}$$

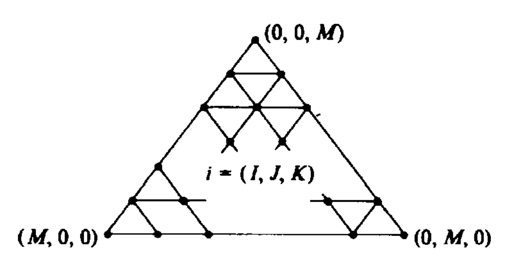


Figura 7.17 Elemento triangular general.

y cero en todos los demás nodos.

El término de mayor grado del polinomio es

$$L_1^I L_2^J L_3^K$$

y como

$$I + J + K \equiv M$$

el polinomio es, para todos los puntos, de grado M.

La expresión (7.35) es válida para distribuciones de nodos arbitrarias que sigan el modelo de generación de la Figura 7.17 y se simplifica si el espacio entre las líneas nodales es regular (por ej., $1/m$). La fórmula fue obtenida originalmente por Argyris *et al.*[11] y formalizada de manera diferente por otros.[7,12]

Las funciones de forma de los elementos cuadrático y cúbico que se dan a continuación pueden ser comprobadas fácilmente por el lector e incluso deducir otras sin dificultad para elementos de orden más elevado.

Triángulo cuadrático [Figura 7.15(b)]
Para nodos de vértice:

$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1, \qquad \text{etc.}$$

Nodos laterales:

$$N_4 = 4L_1L_2, \qquad \text{etc.} \tag{7.36}$$

Triángulo cúbico [Figura 7.15(c)]
Nodos de vértice:

$$N_1 = \frac{1}{2}(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)L_1, \qquad \text{etc.}$$

Nodos laterales:

$$N_4 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1), \qquad \text{etc.} \tag{7.37}$$

y para el nodo interior:

$$N_{10} = 27L_1L_2L_3$$

Nuevamente aparece una función "burbuja" que toma valor nulo en los contornos y que se empleará en un contexto diferente en el Capítulo 12.

Fue Veubeke[13] quien primero dedujo el triángulo cuadrático y Argyris[14] lo utilizó en problemas de tensión plana.

Cuando se trata de calcular las matrices de los elementos resulta a menudo que nos encontramos con integraciones sobre la región triangular definidas en función de coordenadas de área. En relación con esto es útil tomar nota de la siguiente expresión integral exacta:

$$\iint_\Delta L_1^a L_2^b L_3^c \, dx\, dy = \frac{a!\, b!\, c!}{(a + b + c + 2)!} 2\Delta \tag{7.38}$$

ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES

7.9 Elementos lineales

En esta obra hemos considerado generalmente hasta ahora el continuo como bi o tridimensional. Los casos unidimensionales, siendo de una clase para la que generalmente se dispone de solución exacta, fueron tratados únicamente como ejemplos triviales en el Capítulo 2 y en la Sección 7.2. En muchos problemas reales de dos o tres dimensiones, dichos elementos aparecen de hecho en combinación con los elementos de continuo más usuales por lo que es deseable un tratamiento unificado. En el campo del análisis elástico, estos elementos pueden representar barras de armado (problemas planos y tridimensionales), o capas finas de material de refuerzo en cuerpos de revolución y tridimensionales. En los problemas de campos del tipo que se estudian en el Capítulo 10, se pueden considerar como líneas de fuga en un medio poroso de menor conductividad.

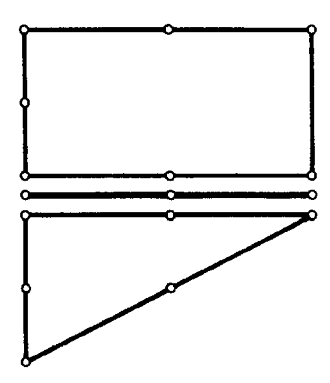


Figura 7.18 Elemento unidimensional embutido entre dos elementos bidimensionales.

Una vez escogida la forma de una función, como la de desplazamientos, por ejemplo, para un elemento de esta clase, se pueden determinar sus propiedades teniendo en cuenta, no obstante, que las propiedades deducidas, tales como deformación, etc., han de considerarse solamente en una dimensión.

En la Figura 7.18 se representa un elemento de esta clase introducido entre dos elementos cuadráticos contiguos. Evidentemente, para la continuidad de la función todo lo que requiere es una variación cuadrática de la incógnita con la única variable ξ. Así pues, las funciones de forma vienen dadas directamente por polinomios de Lagrange como los definidos en la expresión (7.18).

ELEMENTOS TRIDIMENSIONALES

7.10 Prismas rectangulares. Familia "serendípita"[4,9,15]

De forma muy parecida a la expuesta en las secciones anteriores pueden describirse los elementos tridimensionales equivalentes.

En este caso, para obtener la continuidad entre elementos han de modificarse las reglas expuestas previamente. Lo que ha de conseguirse es que a lo largo de toda una cara de un elemento los valores nodales definan una variación única de la función a determinar. Con polinomios incompletos, tal cosa sólo puede asegurarse mediante inspección.

Una familia de elementos como la representada en la Figura 7.19 es precisamente equivalente a la de la Figura 7.9. Utilizando ahora tres coordenadas normalizadas y siguiendo la terminología de la Sección 7.6, obtenemos las siguientes funciones de forma:

Elemento "lineal" (8 nodos)

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0) \qquad (7.39)$$

Elemento "cuadrático" (20 nodos)

Nodos de vértice:

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)(\xi_0+\eta_0+\zeta_0-2) \qquad (7.40)$$

Nodo de arista típico:

$$\xi_i = 0 \qquad \eta_i = \pm 1 \qquad \zeta_i = \pm 1$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)$$

Elemento "cúbico" (32 nodos)

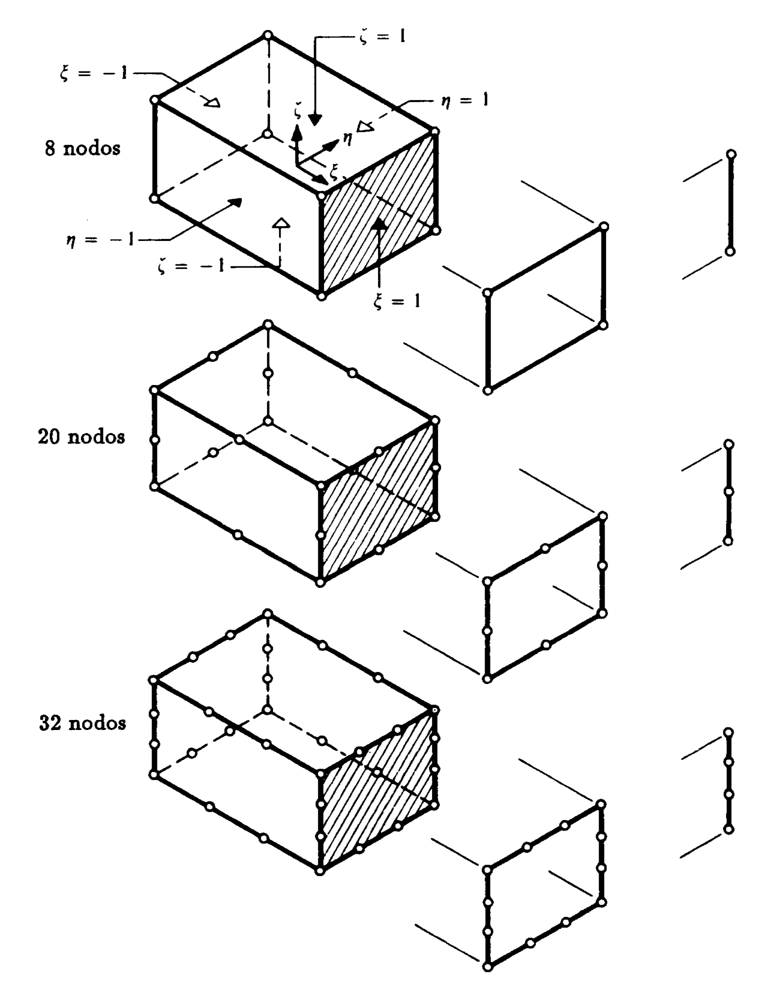


Figura 7.19 Prismas rectos de la familia ("serendípita") de nodos en el contorno con los elementos de cara y línea correspondientes.

Nodos de vértice:

$$N_i = \frac{1}{64}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)[9(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-19] \qquad (7.41)$$

Nodo de arista típico:

$$\xi_i = \pm\frac{1}{3} \qquad \eta_i = \pm 1 \qquad \zeta_i = \pm 1$$

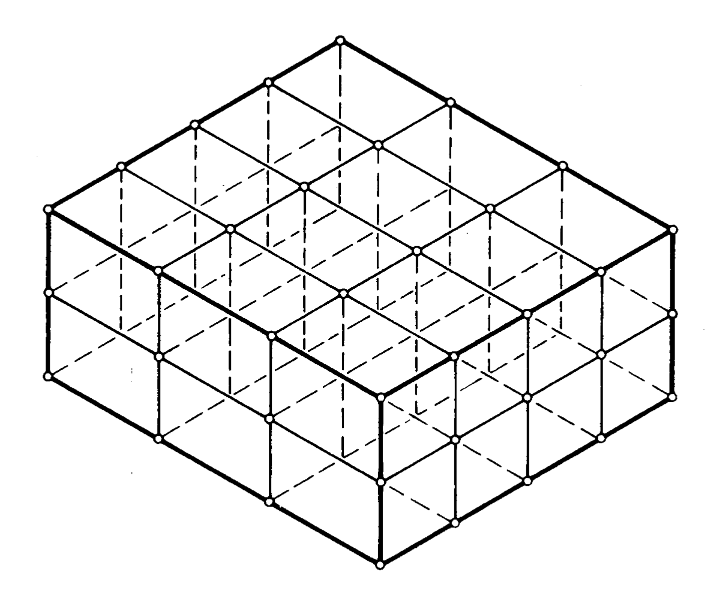


Figura 7.20 Prisma recto de la familia de Lagrange.

$$N_i = \frac{9}{64}(1-\xi^2)(1+9\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)$$

Cuando $\zeta = 1 = \zeta_0$ las expresiones anteriores se reducen a las Ecs. (7.22) a (7.24). Estos elementos tridimensionales pueden además unirse de manera compatible a elementos planos o unidimensionales apropiados, tal como se muestra en la Figura 7.19.

El procedimiento para generar funciones de forma sigue de nuevo el descrito en las Figuras 7.10 y 7.11, y nuevamente pueden deducirse elementos con distintos grados de libertad a lo largo de las aristas siguiendo los mismos pasos.

El equivalente a un triángulo de Pascal es ahora un tetraedro y además podemos observar el pequeño número de grados de libertad adicionales, situación que es aún de mayor importancia que en el análisis bidimensional.

7.11 Prismas rectangulares. Familia de Lagrange

Las funciones de forma para estos elementos, como el de la Figura 7.20, se generarán multiplicando directamente tres polinomios de Lagrange. Ampliando la notación de la expresión (7.19), obtenemos ahora

$$N_i \equiv N_{IJK} = l_I^n l_J^m l_K^p \qquad (7.42)$$

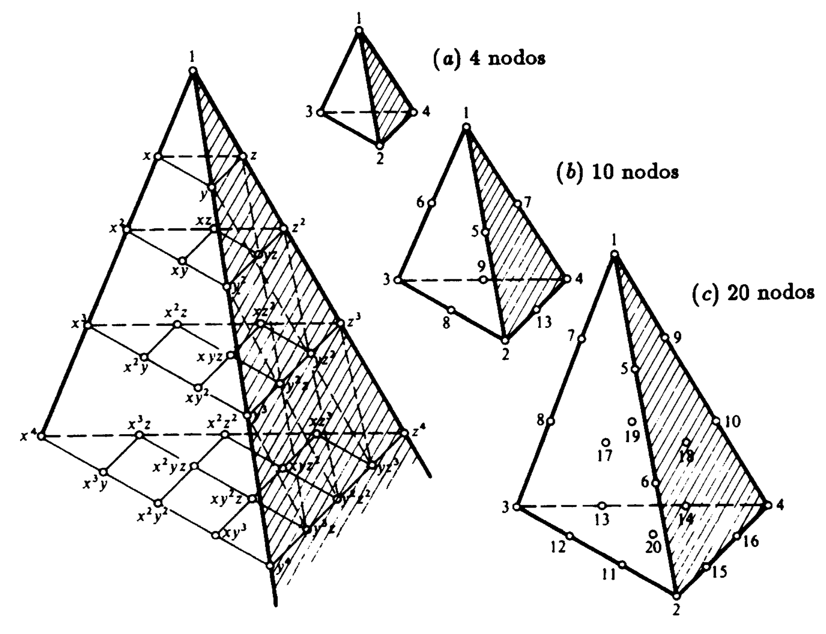


Figura 7.21 La familia del tetraedro: (a) lineal, (b) cuadrático y (c) cúbico.

para n, m y p subdivisiones a lo largo de cada lado.

Este elemento fue sugerido por Ergatoudis[5] y elaborado por Argyris *et al.*[6] Todos los comentarios acerca de los nodos interiores y de las limitaciones de la formulación efectuados en la Sección 7.5 se pueden aplicar aquí y, en general, la aplicación práctica de dichos elementos es ineficiente.

7.12 Elementos tetraédricos

La familia tetraédrica representada en la Figura 7.21 exhibe, como era de esperar, propiedades similares a las de la familia triangular.

En primer lugar, en cada caso vuelven a obtenerse polinomios completos en tres coordenadas. Después, como las caras se dividen de manera idéntica a como se hizo anteriormente con los triángulos, se obtienen en el plano de cada cara polinomios del mismo grado en dos coordenadas y por tanto queda asegurada la compatibilidad entre elementos. No aparecen términos adicionales en el polinomio.

7.12.1 *Coordenadas de volumen.* Se introducen de nuevo coordenadas particulares definidas por (Figura 7.22):

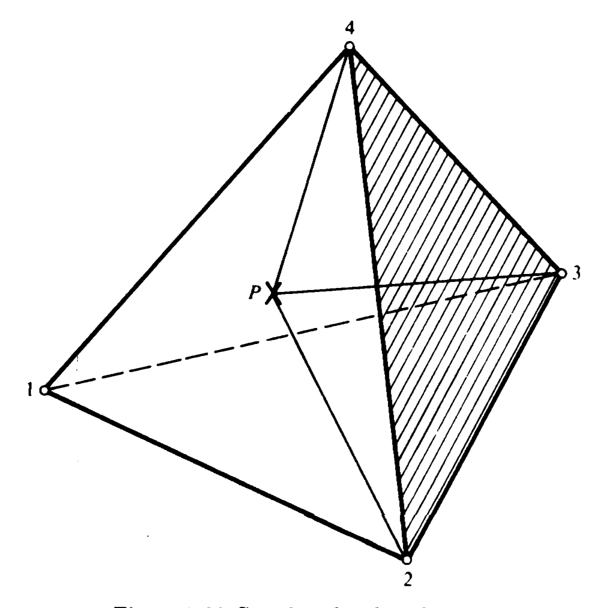


Figura 7.22 Coordenadas de volumen.

$$\begin{aligned} x &= L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 + L_4 x_4 \\ y &= L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 + L_4 y_4 \\ z &= L_1 z_1 + L_2 z_2 + L_3 z_3 + L_4 z_4 \\ 1 &= L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \end{aligned} \qquad (7.43)$$

Nuevamente, las recíprocas de las expresiones anteriores nos conducen a expresiones del tipo (7.32) y (7.33), pudiendo identificarse las constantes en el Capítulo 5 [Ecs. (5.5)]. Se puede identificar otra vez el significado de las coordenadas como el cociente entre el volumen del tetraedro que tiene un vértice en un punto interior P del tetraedro inicial y el volumen total (ver Figura 7.22):

$$L_1 = \frac{\text{volumen } P234}{\text{volumen } 1234}, \qquad \text{etc.} \qquad (7.44)$$

7.12.2 *Funciones de forma.* Como las coordenadas de volumen varían linealmente con las cartesianas desde el valor uno en un nodo a cero en la cara opuesta, las funciones de forma del elemento lineal [Figura 7.21(a)] serán simplemente,

$$N_1 = L_1 \qquad N_2 = L_2, \qquad \text{etc.} \qquad (7.45)$$

Las expresiones de las funciones de forma de elementos tetraédricos de mayor orden se obtienen de la misma manera que en el caso de los triángulos, estableciendo una formulación apropiada del tipo de Lagrange similar a la Ec. (7.35). Dejando este punto como ejercicio adecuado para el lector, citaremos las que siguen:

Tetraedro "cuadrático" [Figura 7.21.(b).]
Nodos de vértice:

$$N_1 = (2L_1 - 1)L_1, \qquad \text{etc.} \qquad (7.46)$$

Nodos de arista:

$$N_5 = 4L_1L_2, \qquad \text{etc.}$$

Tetraedro "cúbico"
Nodos de vértice:

$$N_1 = \frac{1}{2}(3L_1 - 1)(3L_1 - 2)L_1, \qquad \text{etc.} \qquad (7.47)$$

Nodos de arista:

$$N_5 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1), \qquad \text{etc.}$$

Nodos laterales:

$$N_{17} = 27L_1L_2L_3, \qquad \text{etc.}$$

Una fórmula muy útil para la integración es:

$$\int\int\int_{\text{vol}} L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d \, dx \, dy \, dz = \frac{a!\,b!\,c!\,d!}{(a+b+c+d+3)!} 6V \qquad (7.48)$$

7.13 Otros elementos tridimensionales sencillos

Las posibilidades de formas sencillas son mayores, por razones obvias, en tres que en dos dimensiones. Una serie de elementos bastante útil puede basarse, por ejemplo, en prismas triangulares (Figura 7.23). De nuevo se pueden distinguir aquí las variantes de los tipos lagrangianos y serendípitos. El primer elemento de ambas familias es idéntico y además sus funciones de forma son tan evidentes que no necesitan mayor aclaración.

Para un elemento "cuadrático" como el presentado en la Figura 7.23(b), las funciones de forma son:

Nodos de vértice $L_1 = \xi_1 = 1$:

$$N_1 = \frac{1}{2}L_1(2L_1 - 1)(1 + \zeta) - \frac{1}{2}L_1(1 - \zeta^2) \qquad (7.49)$$

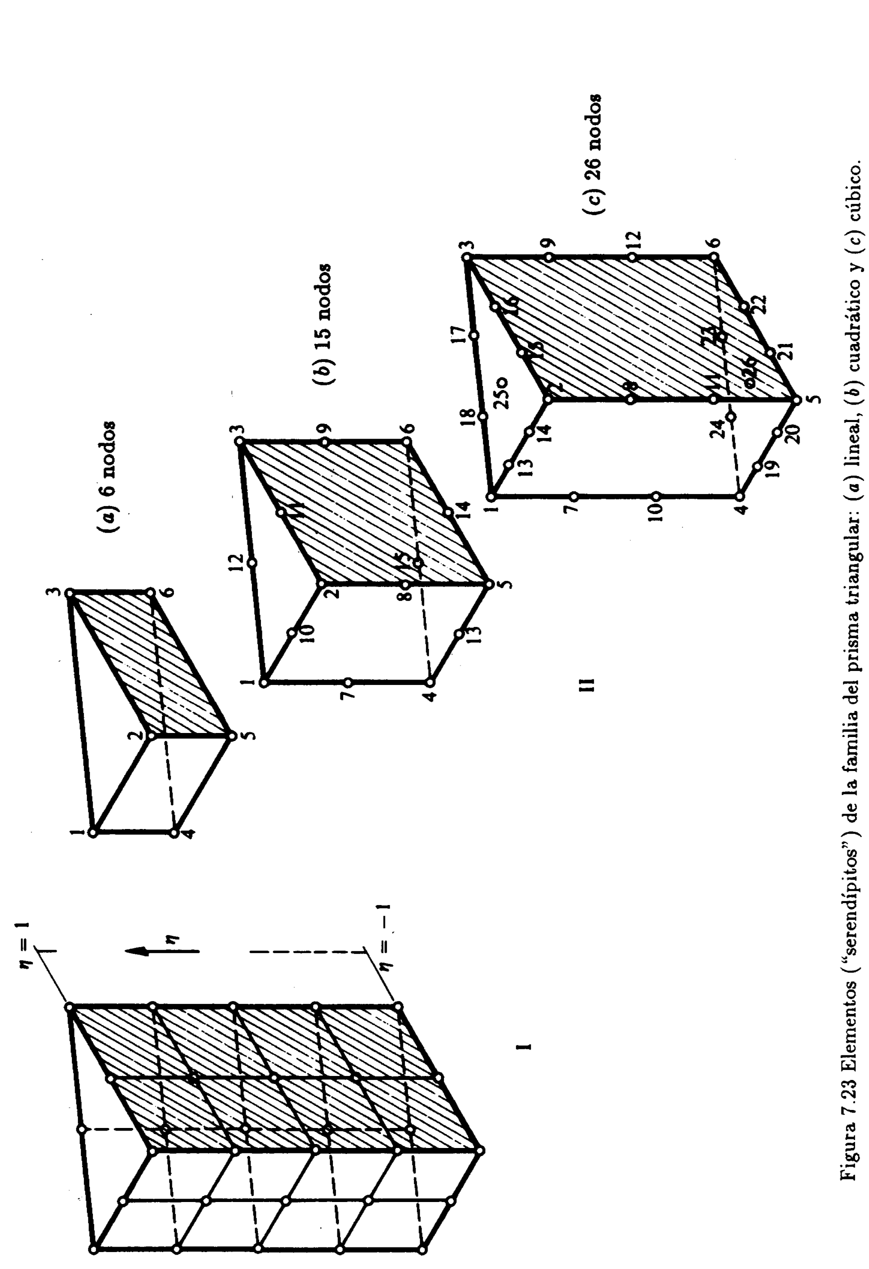


Figura 7.23 Elementos ("serendípitos") de la familia del prisma triangular: (a) lineal, (b) cuadrático y (c) cúbico.

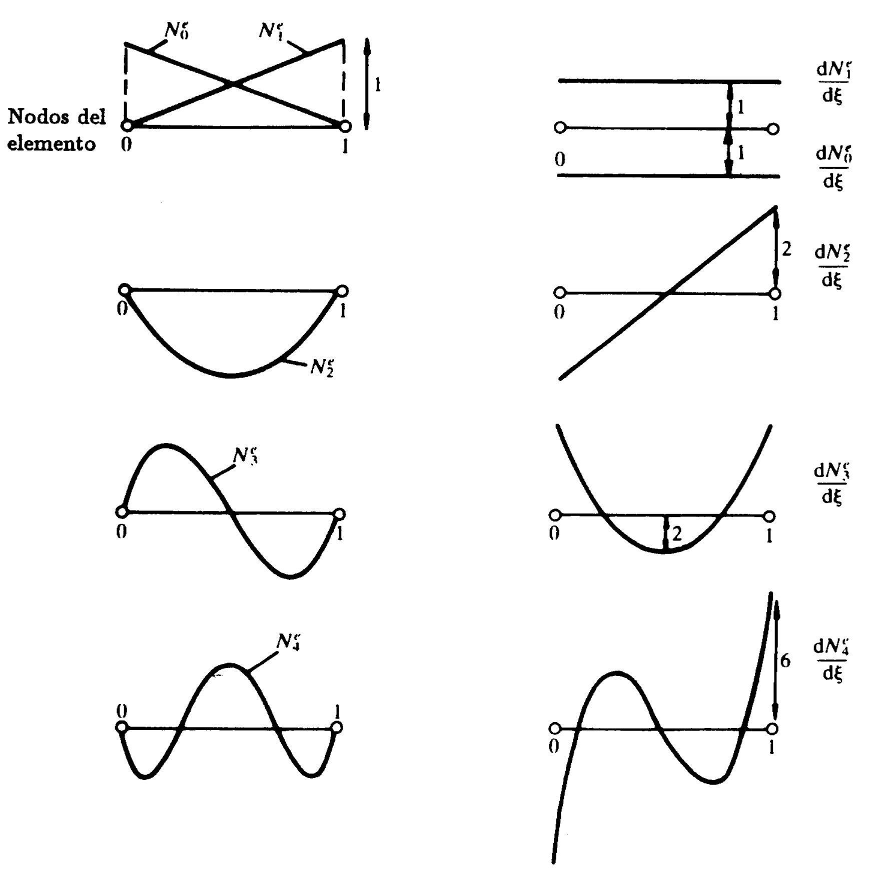


Figura 7.24 Funciones de forma jerárquicas de forma cuasi-ortogonal y sus derivadas.

Nodos de arista de triángulos:

$$N_{10} = 2L_1L_2(1+\zeta), \qquad \text{etc.} \tag{7.50}$$

Nodos de arista de rectángulos:

$$N_7 = L_1(1-\zeta^2), \qquad \text{etc.}$$

Estos elementos no son puramente esotéricos, sino que tienen aplicación práctica como "relleno" combinados con elementos paralelepípedos de veinte nodos.

Parte 2. Funciones de forma jerárquicas

7.14 Polinomios jerárquicos en una dimensión

Las ideas generales sobre aproximación jerárquica se han introducido en la Sección 7.2 en el contexto de sencillos elementos lineales. La generalización a formas jerárquicas de mayor orden es también sencilla. Empezaremos por un desarrollo unidimensional, que como se ha visto en las secciones precedentes proporciona una base para la generación de elementos en dos y tres dimensiones.

Para generar un polinomio de orden p a lo largo de un lado de un elemento no es necesario introducir nuevos nodos, sino que se pueden utilizar parámetros sin un significado físico obvio. Como se muestra en la Figura 7.24, se puede usar un desarrollo lineal expresado en términos de las funciones "estandar" N_0 y N_1, y añadir a éstas una serie de polinomios de forma que éstos tienen siempre valores nulos en los extremos del dominio (esto es, en los puntos 0 y 1).

Por ejemplo, para obtener una aproximación cuadrática, partiendo de un típico elemento unidimensional escribiríamos:

$$\hat{u} = u_0 N_0 + u_1 N_1 + a_2 N_2 \tag{7.51}$$

donde

$$N_0 = -\frac{\xi - 1}{2} \qquad N_1 = \frac{\xi + 1}{2} \qquad N_2 = -(\xi - 1)(\xi + 1) \tag{7.52}$$

utilizando en lo anterior la coordenada normalizada ξ [viz. Ec. (7.17)].

Notemos que en este caso el parámetro a_2 sí tiene un significado, ya que es la separación de la linealidad de la aproximación $\hat{u}$ en el centro del elemento, ya que N_2 se ha elegido de forma que tiene valor unidad en dicho punto.

De forma similar, para un elemento cúbico simplemente tenemos que añadir $a_3 N_3$ al desarrollo cuadrático de la Ec. (7.51), donde N_3 es un polinomio cúbico de la forma

$$N_3^e = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 \tag{7.53}$$

que toma valor nulo en $\xi = \pm 1$ (esto es, en los nodos 0 y 1). De nuevo existe una infinidad de opciones y se puede seleccionar un polinomio que tenga valor nulo en el centro del elemento y para el cual $dN_3/d\xi = 1$ en ese punto. Podemos entonces escribir

$$N_3^e = \xi(1 - \xi^2) \tag{7.54}$$

como la función cúbica con las propiedades deseadas. Ahora el parámetro a_3 significa la separación de la pendiente en el centro del elemento respecto al valor constante de la primera aproximación.

Nótese que se puede proceder de forma similar y definir la función jerárquica elemental de cuarto orden de la forma

$$N_4^e = \xi^2(1 - \xi^2) \tag{7.55}$$

aunque ahora la interpretación física del parámetro asociado a ésta es más difícil (aunque no es estrictamente necesaria).

Como ya se ha dicho, el conjunto anterior no es único, y existen otras muchas posibilidades. Una alternativa práctica es definir las funciones jerárquicas de la forma

$$N_p^e(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{p!}(\xi^p - 1) & p \text{ par} \\ \dfrac{1}{p!}(\xi^p - \xi) & p \text{ impar} \end{cases} \tag{7.56}$$

donde $p(\geq 2)$ es el grado del polinomio introducido.[16] Esto lleva al conjunto de funciones de forma:

$$\begin{aligned} N_2^e &= \frac{1}{2}(\xi^2 - 1) \qquad & N_3^e &= \frac{1}{6}(\xi^3 - \xi) \\ N_4^e &= \frac{1}{24}(\xi^4 - 1) \qquad & N_5^e &= \frac{1}{120}(\xi^5 - \xi) \end{aligned} \tag{7.57}$$

etc.

Se observa que todas las derivadas de N_p^e de segundo o mayor orden se anulan para $\xi = 0$, menos $d^p N_p^e / d\xi^p$, que es igual a la unidad en ese punto, y, por tanto, usando las funciones de forma dadas por la Ec. (7.57) se pueden identificar los parámetros de la aproximación como

$$a_p^e = \left. \frac{d^p \hat{u}}{d\xi^p} \right|_{\xi=0} \qquad p \geq 2 \tag{7.58}$$

Tal identificación tiene un significado físico general, pero no es necesaria en forma alguna.

En elementos en dos y tres dimensiones una sencilla identificación de los parámetros jerárquicos en las interfases asegura automáticamente continuidad C_0 a la aproximación.

Como se ha mencionado anteriormente, una forma óptima de funciones jerárquicas es aquélla que resulta en un sistema diagonal de ecuaciones. Esto puede conseguirse a veces, o al menos, de forma bastante aproximada.

En los problemas de elasticidad que se han discutido en los capítulos precedentes la matriz elemental $\mathbf{K}^e$ tiene términos de la forma

$$K_{lm}^e = \int_{\Omega^e} k \frac{dN_l^e}{dx} \frac{dN_m^e}{dx} dx = \frac{2}{h} \int_{-1}^{1} k \frac{dN_l^e}{d\xi} \frac{dN_m^e}{d\xi} d\xi \tag{7.59}$$

Si el conjunto de funciones de forma tiene los polinomios adecuados se puede calcular de tal manera que dichas integrales son nulas si $l \neq m$, entonces se consigue la ortogonalidad y desaparece el acoplamiento entre las sucesivas soluciones.

Un conjunto de polinomios que tiene la propiedad de la ortogonalidad en el dominio $-1 \leq \xi \leq 1$ son los polinomios de Legrende $P_p(\xi)$, y se pueden definir las funciones de forma en términos de integrales de estos polinomios.[9] Definimos el polinomio de Legendre de orden p de la forma

$$P_p(\xi) = \frac{1}{(p-1)!}\,\frac{1}{2^{p-1}}\,\frac{d^p}{d\xi^p}[(\xi^2-1)^p] \tag{7.60}$$

e integramos estos polinomios para definir

$$N^e_{p+1} = \int P_p(\xi)d\xi = \frac{1}{(p-1)!\,2^{p-1}}\,\frac{d^{p-1}}{d\xi^{p-1}}[(\xi^2-1)^p] \tag{7.61}$$

La evaluación para cada valor de p da

$$N^e_2 = \xi^2 - 1 \qquad N^e_3 = 2(\xi^3 - \xi) \qquad \text{etc.}$$

Éstos se diferencian de las funciones de forma dadas por la Ec. (7.57) sólo en una constante multiplicativa hasta N^e_3, pero para $p \geq 3$ las diferencias son significativas. El lector puede verificar fácilmente la ortogonalidad de las derivadas de dichas funciones, lo cual es muy útil computacionalmente. La Figura 7.24 muestra estas funciones y sus derivadas.

7.15 Elementos jerárquicos en dos y tres dimensiones del tipo "rectángulo" o "ladrillo"

Al derivar las aproximaciones "estándar" de elementos finitos hemos mostrado que todas las funciones de forma de la familia de Lagrange se pueden obtener de las unidimensionales, mediante sencillas multiplicaciones y las de los elementos serendípitos mediante una combinación de tales multiplicaciones. La situación es aún más sencilla para los elementos jerárquicos. Aquí *todas* las funciones de forma se puedan obtener mediante un sencillo proceso de multiplicación.

Por ejemplo, en la Figura 7.25 se muestran las funciones de forma de un elemento lagrangiano de nueve nodos y las correspondientes funciones jerárquicas. Estas últimas no sólo tienen formas más sencillas, sino que son más sencillas de calcular, ya que son simples productos de los términos lineales y cuadráticos de la Ec. (7.56), (7.57) ó (7.61). Utilizando esta última las tres funciones ilustradas son, simplemente

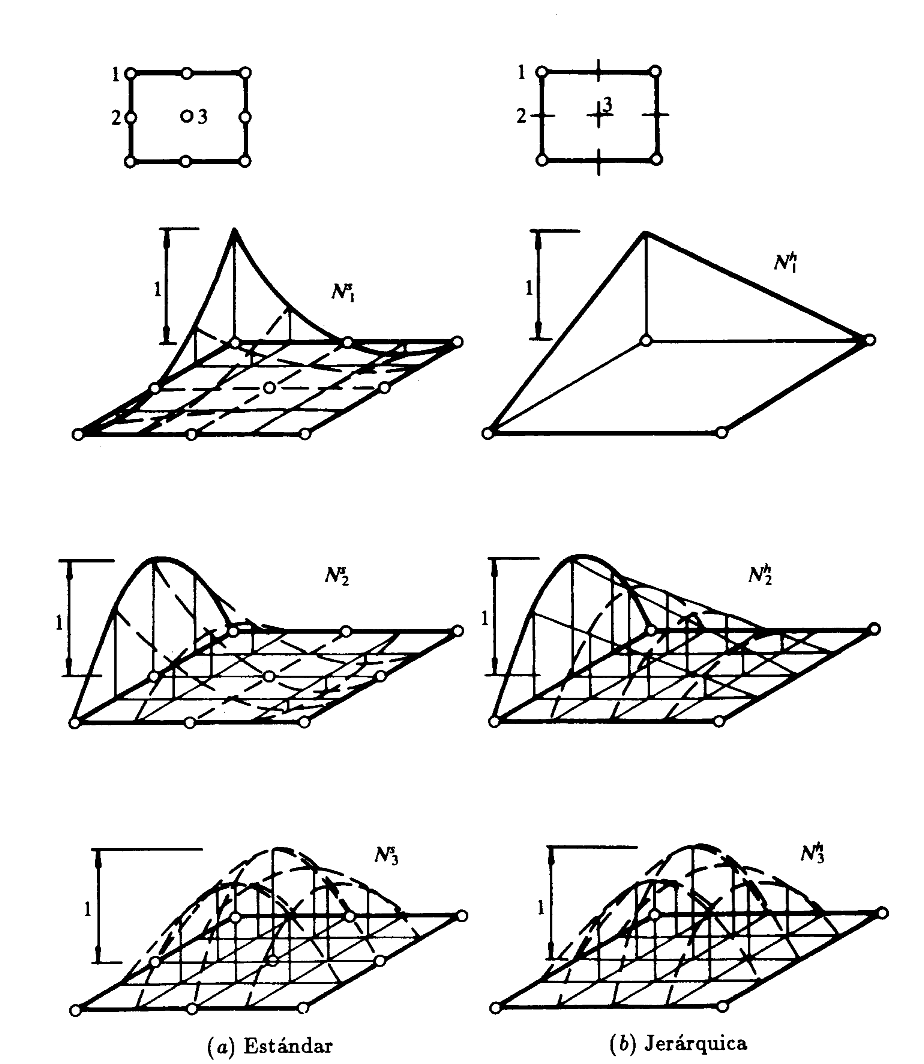


Figura 7.25 Funciones de forma estándar y jerárquicas correspondientes al elemento lagrangiano cuadrático.

$$\begin{aligned} N_1 &= -(\xi-1)(\eta+1)/4 \\ N_2 &= (\xi^2-1)(\eta-1)/2 \\ N_3 &= (\xi^2-1)(\eta^2-1) \end{aligned} \tag{7.62}$$

La distinción entre formas lagrangianas y serendípitas desaparece, ya que para estas últimas se omite ahora simplemente la última función de forma.

De hecho, ahora es fácil introducir interpolaciones para los elementos del tipo ilustrado en la Figura 7.11, en el que se usan diferentes desarrollos en lados distintos. Esta característica esencial de los elemento jerárquicos se explota en el refinamiento adaptable (véase el Capítulo 14) donde se introducen nuevos grados de libertad (o se incrementa el orden polinómico) sólo cuando la magnitud del error lo requiere.

7.16 La familia del triángulo y el tetraedro[16,17]

Una vez más se pueden introducir los conceptos de manipulación en función de las coordenadas de área (volumen).

Volviendo al triángulo de la Figura 7.16 se observa que a lo largo del lado 1-2, L_3 es idénticamente nula y, por tanto, se tiene

$$(L_1 + L_2)_{1-2} = 1 \tag{7.63}$$

Si ξ, medida a lo largo del lado $1-2$, es una coordenada adimensional local del tipo que hemos usado al derivar las funciones jerárquicas para elementos unidimensionales, se puede escribir

$$L_1|_{1-2} = \frac{1}{2}(1-\xi) \qquad L_2|_{1-2} = \frac{1}{2}(1+\xi) \tag{7.64}$$

de donde se sigue que tenemos

$$\xi = (L_2 - L_1)_{1-2} \tag{7.65}$$

Esto sugiere que se pueden generar funciones jerárquicas en el triángulo generalizando las fracciones de forma unidimensionales presentadas anteriormente. Por ejemplo, utilizando las expresiones de la Ec. (7.56), asociamos al lado $1-2$ el polinomio de grado $p(\geq 2)$ definido por

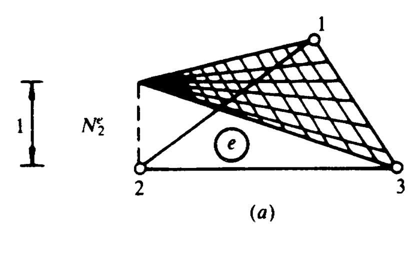
$$N^e_{p(1-2)} = \begin{cases} \dfrac{1}{p!}[(L_2 - L_1)^p - (L_1 + L_2)^p] & p \text{ par} \\ \dfrac{1}{p!}[(L_2 - L_1)^p - (L_2 - L_1)(L_1 + L_2)^{p-1}] & p \text{ impar} \end{cases} \tag{7.66}$$

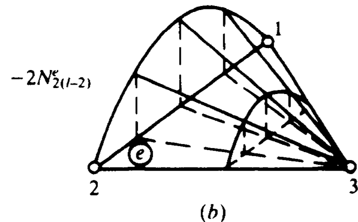
Se deduce de la Ec. (7.64) que estas funciones de forma son nulas en los nodos 1 y 2. Además, se puede demostrar fácilmente que $N^e_{p(1-2)}$ será nula a lo largo de los lados $3-1$ y $3-2$ del triángulo, por lo que la continuidad C_0 de la aproximación $\hat{u}$ está asegurada.

Debe notarse que en este caso, para $p \geq 3$, el número de funciones jerárquicas que surgen de los lados del elemento de esta manera es insuficiente para definir un polinomio completo de orden p y deben introducirse funciones jerárquicas internas, que son idénticamente nulas en el contorno; por ejemplo,

para $p = 3$ se puede usar la función $L_1L_2L_3$, mientras que para $p = 4$ se pueden adoptar las tres funciones adicionales $L_1^2L_2L_3$, $L_1L_2^2L_3$, $L_1L_2L_3^2$.

En la Figura 7.26 se muestran típicas funciones jerárquicas lineales, cuadráticas y cúbicas para un elemento triangular. Se pueden generar funciones de forma jerárquica similares a partir del conjunto de funciones unidimensionales definidas en la Ec. (7.61). Para el caso de tetraedros pueden seguirse idénticos procedimientos.





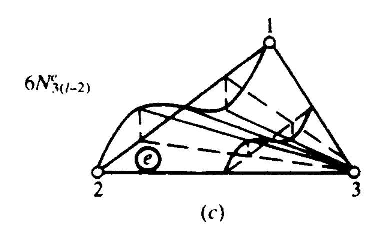


Figura 7.26 Elementos triangulares y funciones de forma jerárquicas asociadas de grado (*a*) lineal, (*b*) cuadrático y (*c*) cúbico.

7.17 Aproximación global y local por elemento finitos

El concepto mismo de aproximación jerárquica (en la cual las funciones de forma no se ven afectadas por el refinamiento) significa que es posible incluir en el desarrollo

$$u = \sum_{i=1}^{n} N_i a_i \qquad (7.67)$$

funciones N de naturaleza no local. Tales funciones pueden ser, por ejemplo, las soluciones exactas de un problema analítico que se parece de alguna manera al problema tratado, pero que no satisfacen algunas condiciones de contorno o falta de homogeneidad. En este caso, los términos locales, de "elementos finitos", serían un procedimiento para corregir esta solución de forma que se satisfagan las condiciones reales. El uso de tal aproximación global-local fue sugerido por primera vez por Mote,[18] en un problema donde los coeficientes de esta función estaban fijados. El ejemplo que se trataba era el de un disco giratorio con ranuras (Figura 7.27). La función global conocida era la analítica correspondiente a un disco sin ranuras y los elementos finitos se añaden localmente para modificar la solución. Otros ejemplos de tales soluciones "fijadas" pueden ser las asociadas a cargas puntuales, donde el uso de la aproximación global sirve para eliminar la singularidad, mal modelada por la discretización.

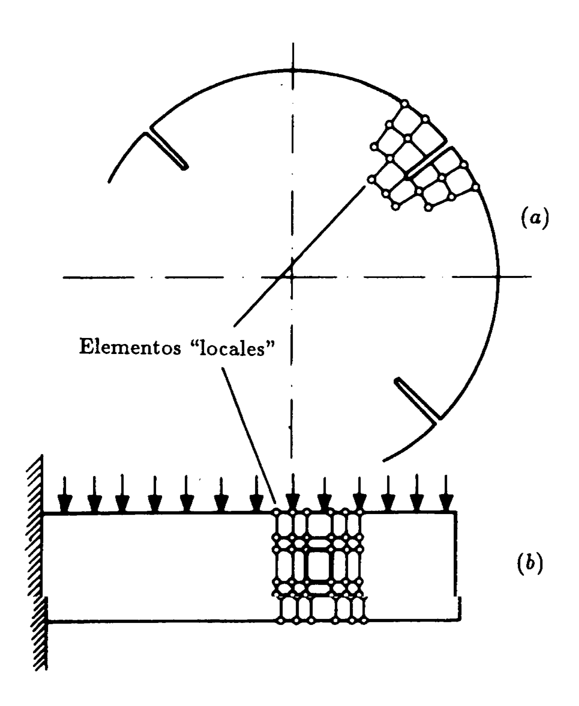


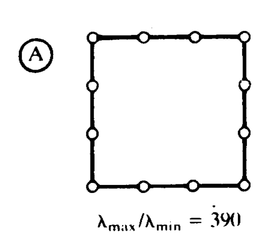
Figura 7.27 Algunos posibles usos de aproximación global-local: (*a*) disco rotatorio con ranuras, (*b*) viga perforada.

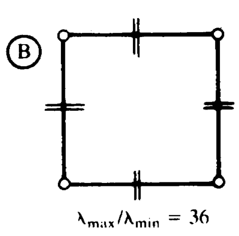
En algunos problemas la propia singularidad es desconocida, y la función apropiada puede añadirse con un coeficiente desconocido.

7.18 Mejora del condicionamiento con formas jerárquicas

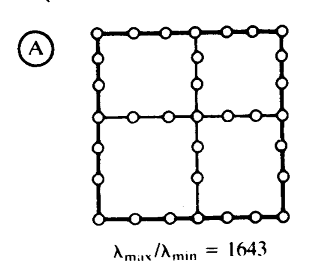
Ya se ha mencionado que las formas jerárquicas redundan en un mejor condicionamiento de las ecuaciones, debido a su forma cuasi diagonal. En la Figura 7.28 se muestra el "número de condicionamiento" [que es una medida de tal diagonalidad y que se define en los textos de algebra lineal (ver Apéndice 1)] para un elemento cúbico aislado y para un ensamblaje de cuatro elemento cúbicos usando las formulaciones estándar y jerárquicas. El mejor condicionamiento de las ecuaciones de rigidez es una ventaja importante de tales formas y permite utilizar fácilmente técnicas iterativas de solución.[19]

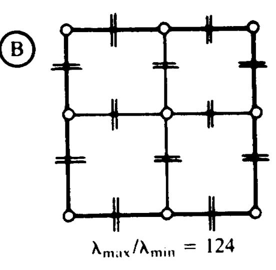
Elemento simple (reducción del número de condicionamiento = 10.7)





Ensamblaje de 4 elementos
(Reducción del número de condicionamiento= = 13.2)





Orden del elemento cúbico

(A) Función de forma estándar

(B) Función de forma jerárquica

Figura 7.28 Mejora en el número de condicionamiento (cociente entre el máximo y mínimo autovalor de la matriz de rigidez) debido al uso de formas jerárquicas (elasticidad isótropa $\nu = 0.15$).

7.19 Observaciones finales

Se ha presentado aquí al lector una selección ilimitada de tipos de elementos e igualmente existen ilimitadas posibilidades alternativas.[4,9] ¿Qué aplicación tienen en la práctica elementos de esta complejidad? Dejando aparte al triángulo y al tetraedro, todos los demás elementos quedan limitados a situaciones donde la región real tenga tal forma que pueda representarse mediante un ensamblaje correcto de prismas rectos. Tal limitación sería tan restrictiva que poco objeto práctico hubiera tenido deducir tales funciones de forma, a menos que pueda encontrarse alguna manera de distorsionar dichos elementos para que se ajusten a contornos reales. En realidad existen métodos para ello que se describen en el capítulo siguiente.

Referencias

1. P.C. DUNNE, "Complete polynomial displacement fields for finite element methods", *Trans. Roy. Aero. Soc.*, **72**, p. 245, 1968.
2. B.M. IRONS, J.G. ERGATOUDIS y O.C. ZIENKIEWICZ, Comentarios a la ref. 1, *Trans. Roy. Aero. Soc.*, **72**, pp. 709–11, 1968.
3. J.G. ERGATOUDIS, B.M. IRONS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Curved, isoparametric, quadrilateral elements for finite element anlaysis" *Int. J. Solids Struct.*, **4**, pp. 31–42, 1968.
4. O.C. ZIENKIEWICZ *et al.*, "Iso-parametric and associated elements families for two and three dimensional analysis", Capítulo 13 de *Finite Element Methods in Stress Analysis*, (eds. I. Holand and K. Bell), Univ. Téc. de Noruega, Tapir Press, Noruega, Trondheim, 1969.
5. J.G. ERGATOUDIS, *Quadrilateral elements in plane analysis: introduction to solid analysis*, M.Sc. thesis, University of Wales, Swansea, 1966.
6. J.H. ARGYRIS, K.E. BUCK, H.M. HILBER, G. MARECZEC y D.W. SCHARPF, "Some new elements for matrix displacement methods", *2nd. Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech.*, Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson Base, Ohio, Oct. 1968.
7. R.L. TAYLOR, "On completeness of shape functions for finite element analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **4**, pp. 17–22, 1972.
8. F.C. SCOTT, "A quartic, two dimensional isoparametric element", Undergraduate Project, Univ. of Wales, Swansea, 1968.
9. O.C. ZIENKIEWICZ, B.M. IRONS, J. CAMPBELL y F.C. SCOTT, "Three dimensional stress analysis", *Int. Un. Th. Appl. Mech. Symposium on High Speed Computing in Elasticity*, Liége, 1970.
10. W.P. DOHERTY, E.L. WILSON y R.L. TAYLOR, *Stress Analysis of Axisymmetric Solids Utilizing Higher-Order Quadrilateral Finite Elements*, Report 69-3, Structural Engineering Laboratory, Univ. of California, Berkeley, Jan. 1969.
11. J.H. ARGYRIS, I. FRIED y D.W. SCHARPF, "The TET 20 and the TEA 8 elements for the matrix displacement method", *Aero. J.*, **72**, pp. 618–25, 1968.
12. P. SILVESTER, "Higher order polynomial triangular finite elements for potential problems", *Int. J. Eng. Sci.*, **7**, pp. 849–61, 1969.

13. B. FRAEIJS DE VEUBEKE, "Displacement and equilibrium models in the finite element method", Capítulo 9 de *Stress Analysis* (eds. O.C. Zienkiewicz and G.S. Holister), Wiley, 1965.
14. J.H. ARGYRIS, "Triangular elements with lineary varying strain for the matrix displacement method", *J. Roy. Aero. Soc. Tech. Note*, **69**, pp. 711–13, Oct. 1965.
15. J.G. ERGATOUDIS, B.M. IRONS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Three dimensional analysis of arch dams and their foundations", *Symp. Arch. Dams*, Inst. Civ. Eng., Londres, 1968.
16. A.G. PEANO, "Hierarchics of conforming finite elements for elasticity and plate bending", *Comp. Math. and Applications*, **2**, 3–4, 1976.
17. J.P. DE S.R. GAGO, *A posteri error analysis and adaptivity for the finite element method*, Ph.D tesis, University of Wales, Swansea, 1982.
18. C.D MOTE, "Global-local finite element", *Int. J. Num. Meth Eng.*, **3**, 565–74, 1971.
19. O.C. ZIENKIEWICZ, J.P. DE S.R. GAGO y D.W. KELLY, "The hierarchical concept in finite element analysis", *Computers and Structures*, **16**, 53–65, 1983.

Capítulo 8

ELEMENTOS TRANSFORMADOS E INTEGRACIÓN NUMÉRICA— ELEMENTOS "INFINITOS" Y "DE SINGULARIDAD"

8.1 Introducción

Hemos visto en el capítulo anterior cómo pueden obtenerse algunas familias genéricas de elementos finitos. Cada nuevo miembro de la familia se caracteriza por un número de nodos progresivamente mayor, lo que implica una mayor precisión y presumiblemente que el número de elementos necesarios para obtener una solución correcta disminuya rápidamente. Para asegurar que con un número pequeño de elementos pueda representarse una forma relativamente complicada como las que aparecen más frecuentemente en los problemas reales, más que en los teóricos, ya no son suficientes simples rectángulos o triángulos. Este capítulo trata, por consiguiente, del tema de la transformación de estas formas sencillas en otras de configuración más arbitraria.

Los elementos de los tipos básicos uni, bi y tridimensionales "se transformarán" punto por punto en formas distorsionadas como las representadas en las Figuras 8.1 y 8.2.

En dichas figuras se muestra cómo al dibujar en un espacio cartesiano x, y, z la forma distorsionada de las coordenadas ξ, η, ζ o de las L_1, L_2, L_3, L_4 se obtiene un nuevo sistema de coordenadas curvilíneas.

No sólo pueden distorsionarse los elementos bidimensionales en otros también bidimensionales, sino que además pueden transformarse en otros de tres dimensiones, tal como se indica para los elementos planos de la Figura 8.2 que se distorsionan en figuras tridimensionales. Este principio es aplicable con carácter general, con tal que pueda establecerse una correspondencia biunívoca entre las coordenadas cartesianas y las curvilíneas, o sea, si pueden establecerse relaciones de la forma

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = f \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad f \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix} \tag{8.1}$$

Una vez conocidas dichas relaciones entre las coordenadas, es posible definir las funciones de forma en coordenadas locales y establecer las

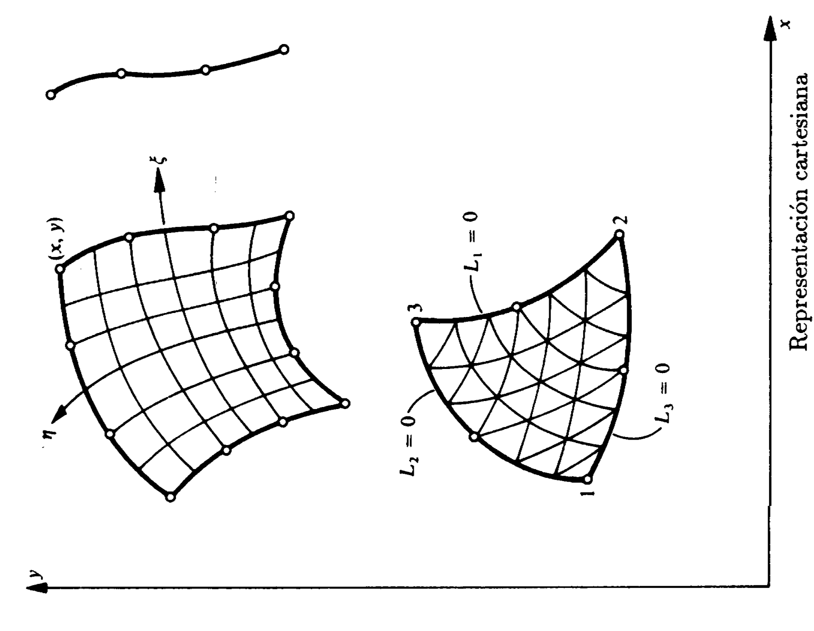


Figura 8.1 Transformación en dos dimensiones de algunos elementos.

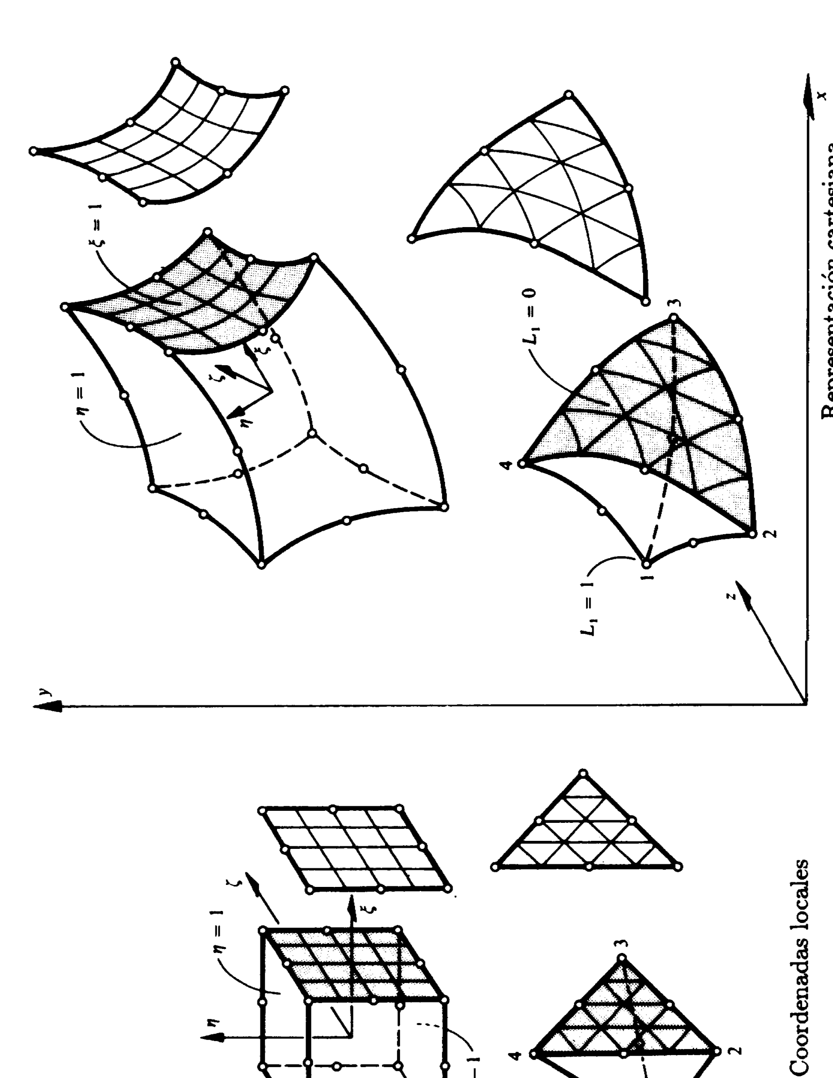


Figura 8.2 Transformación en tres dimensiones de algunos elementos.

propiedades del elemento en el sistema global mediante las transformaciones adecuadas.

En lo que sigue examinaremos en primer lugar la llamada forma isoparamétrica de la relación (8.1) que ha encontrado una gran aplicación en la práctica. Se ofrecerán los detalles completos de esta formulación, incluyendo la determinación de las propiedades de los elementos por integración numérica, que como se verá es esencial.

En la sección final se mostrará que pueden emplearse eficazmente otras muchas transformaciones de coordenadas.

COORDENADAS PARAMÉTRICAS CURVILÍNEAS

8.2 El empleo de "funciones de forma" para establecer transformaciones de coordenadas

Un método muy conveniente para establecer la transformación de coordenadas es emplear las funciones de forma ya deducidas para representar la variación de la función incógnita.

Por ejemplo, si para cada elemento escribimos

$$
\begin{aligned}
x &= N_1'x_1 + N_2'x_2 + \cdots = \mathbf{N}' \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{N}'\mathbf{x} \\
y &= N_1'y_1 + N_2'y_2 + \cdots = \mathbf{N}' \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{N}'\mathbf{y} \qquad (8.2) \\
z &= N_1'z_1 + N_2'z_2 + \cdots = \mathbf{N}' \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{N}'\mathbf{z}
\end{aligned}
$$

en las que $\mathbf{N}'$ son las funciones de forma expresadas en función de las coordenadas locales, se dispondrá inmediatamente de una relación de la forma requerida. Más aún, los puntos de coordenadas x_1, y_1, z_1, etc., se encontrarán en puntos apropiados del contorno del elemento (ya que por las definiciones generales de las funciones de forma sabemos que toman el valor unidad en el punto en cuestión y cero en todos los demás). Estos puntos pueden establecer nodos "a priori".

A cada sistema de coordenadas locales corresponderá otro de coordenadas cartesianas globales y, en general, sólo uno. Veremos, no obstante, que puede surgir falta de unicidad cuando la distorsión sea exagerada.

La idea de emplear las funciones de forma del elemento para establecer coordenadas curvilíneas dentro del campo del análisis por elementos finitos parece que fue mencionada originalmente por Taig[1]. En su primera aplicación estableció relaciones lineales básicas para un cuadrilátero. Irons[2,3] generalizó la idea a otros elementos.

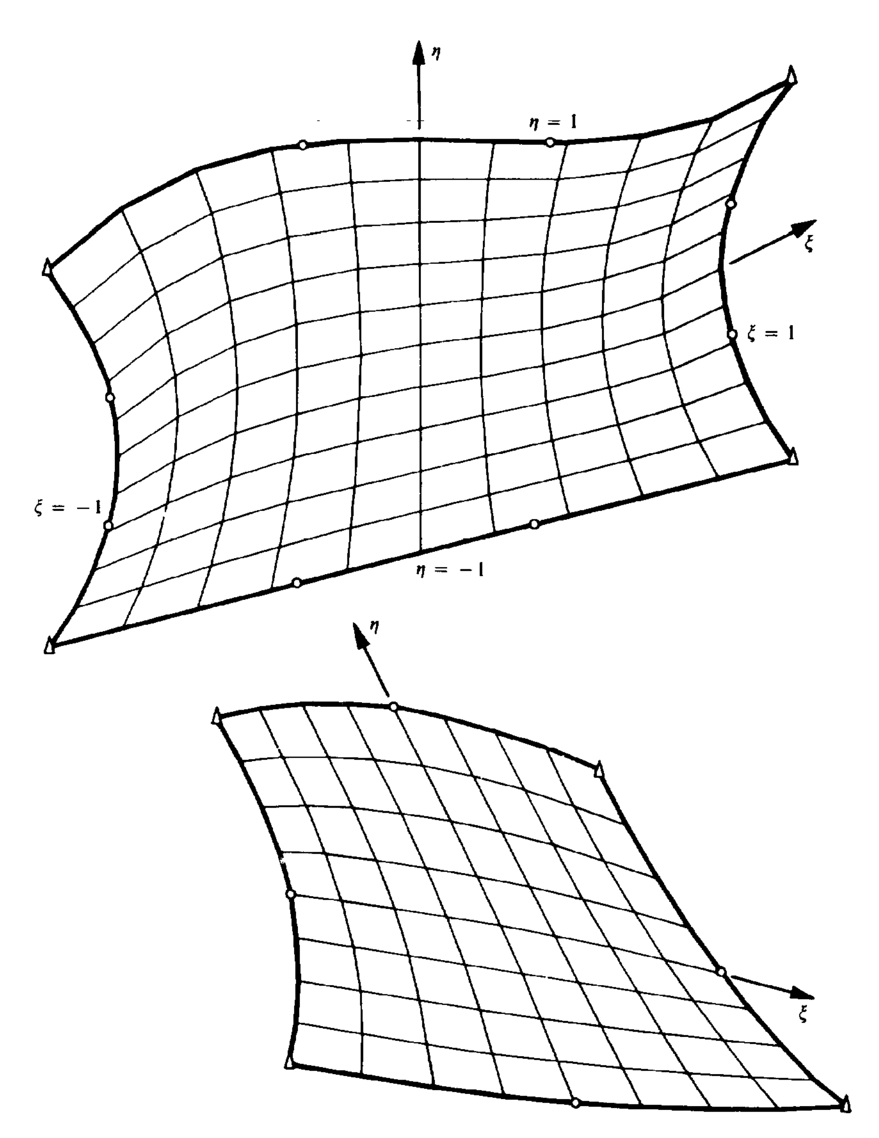


Figura 8.3 Dibujo por computador de las coordenadas curvilíneas para elementos cúbicos y cuadráticos (distorsión admisible).

Independientemente, Coons[4] y Forrest[5] establecieron definiciones similares como consecuencia de trabajos realizados para idear distintos métodos prácticos de generación de superficies curvas de uso en ingeniería de proyectos; debido a esta actividad, hoy en día los temas de definición de superficies y su análisis están cada vez más unidos. En la Figura 8.3 se muestra una distorsión real de elementos basados en los miembros de segundo

y tercer orden de la familia "serendípita". Se observa aquí la existencia de una relación biunívoca entre las coordenadas locales (ξ, η) y las globales (x, y). Si los puntos fijos son tales que tenga lugar una distorsión exagerada, podrá surgir falta de biunicidad de la forma indicada en la Figura 8.4 para dos situaciones. En este caso, en puntos interiores del elemento deformado están implicados dos sistemas de coordenadas locales, además de que ciertos puntos interiores resultan transformados fuera del elemento. Se ha de tener especial cuidado para evitar que en la práctica aparezcan distorsiones tan considerables.

En la Figura 8.5 se muestran dos ejemplos de un elemento bidimensional (ξ, η) proyectado en un espacio tridimensional (x, y, z).

En este capítulo acostumbraremos a referirnos al elemento básico sin distorsionar, en coordenadas locales, como "elemento generatriz".

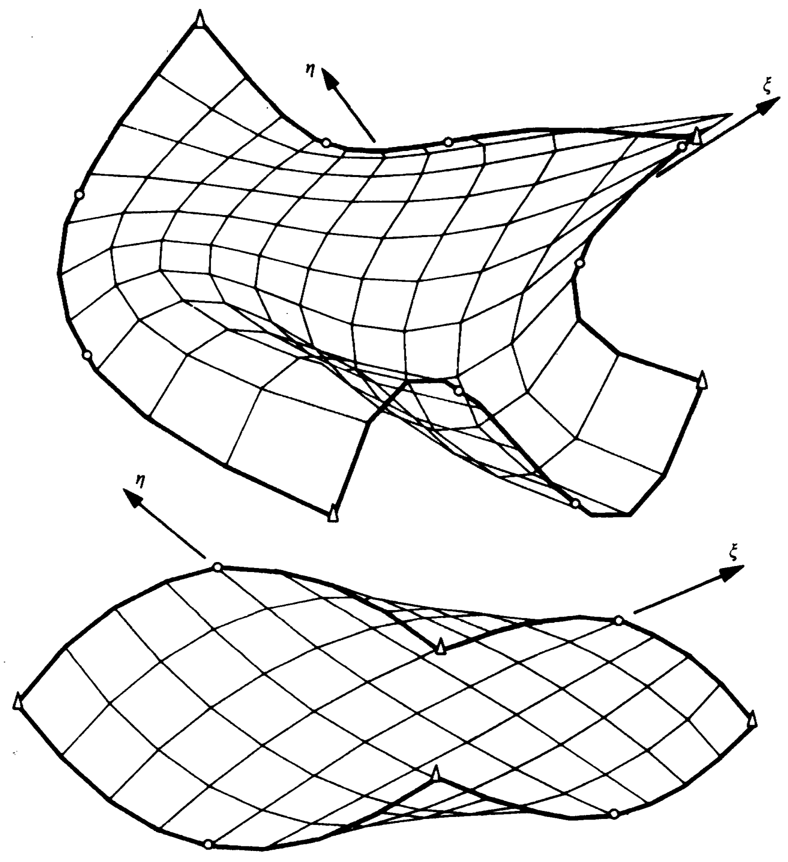
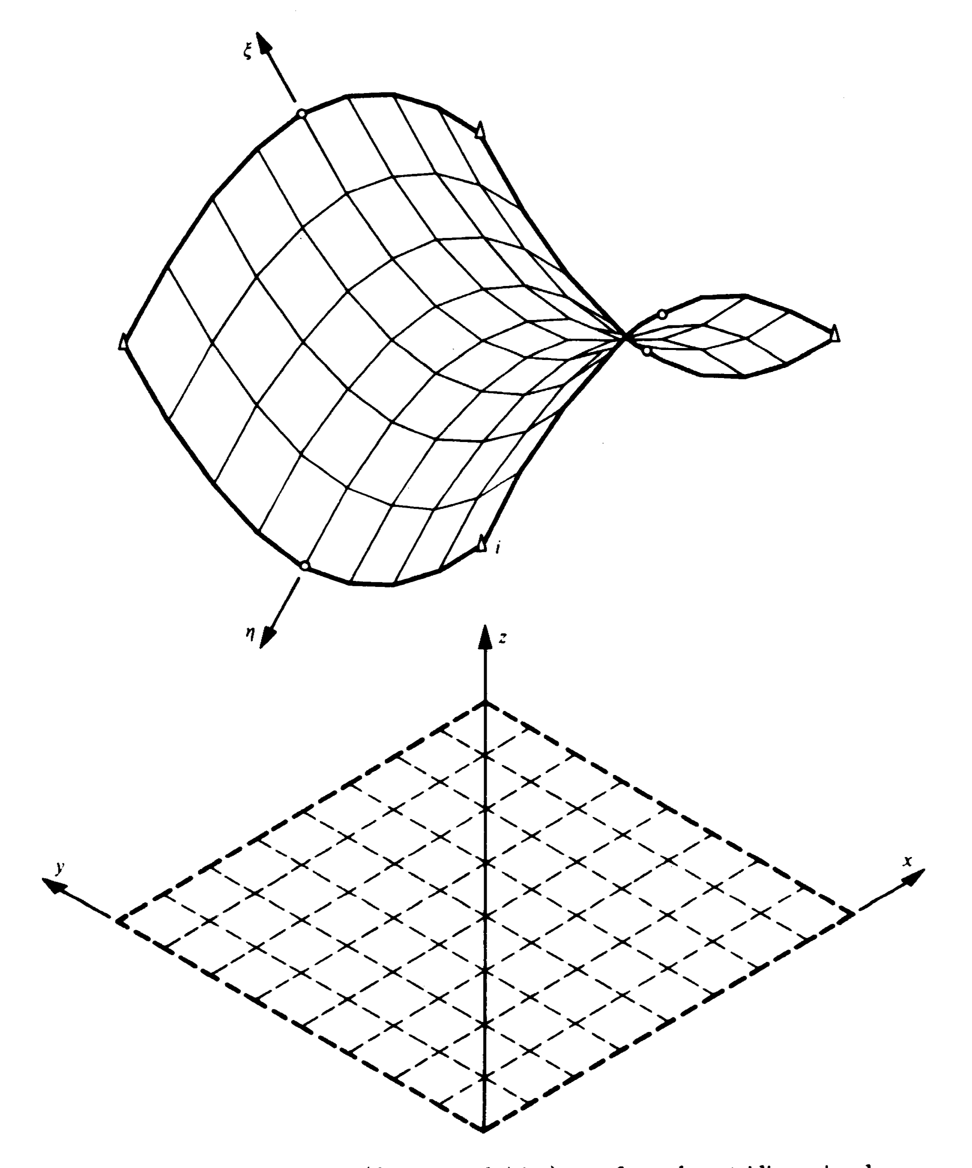


Figura 8.4 Distorsión inadmisible de elementos dando origen a una transformación no biunívoca y "desbordamiento". Elementos cuadráticos y cúbicos.

En la Sección 8.5 se definirá una cantidad conocida como determinante jacobiano. La conocida condición de correspondencia biunívoca *punto a punto* (como la existente en la Figura 8.3, pero no en la 8.4) es que el signo de dicha cantidad debe permanecer constante en todos los puntos del dominio transformado.



Puede demostrarse que en una transformación paramétrica basada en funciones de forma bilineales, la condición necesaria es que ningún ángulo interior [como α en la Figura 8.6(a)] sea mayor de 180°.[6] En transformaciones basadas en funciones cuadráticas de tipo "serendípito" es necesario además que los nodos laterales se encuentren en la "mitad central" de la distancia entre vértices adyacentes[7], aunque situarlos en el "tercio central" mostrado en la Figura 8.6 es más seguro. Cuando se usen funciones cúbicas tales

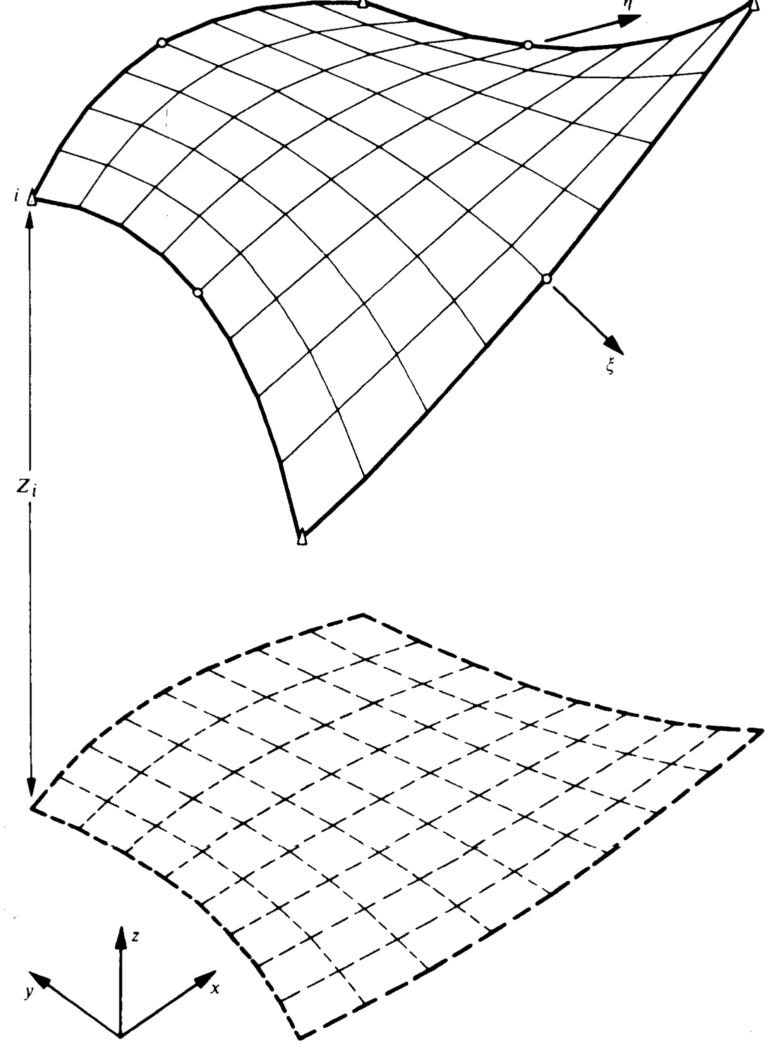


Figura 8.5 (cont.).

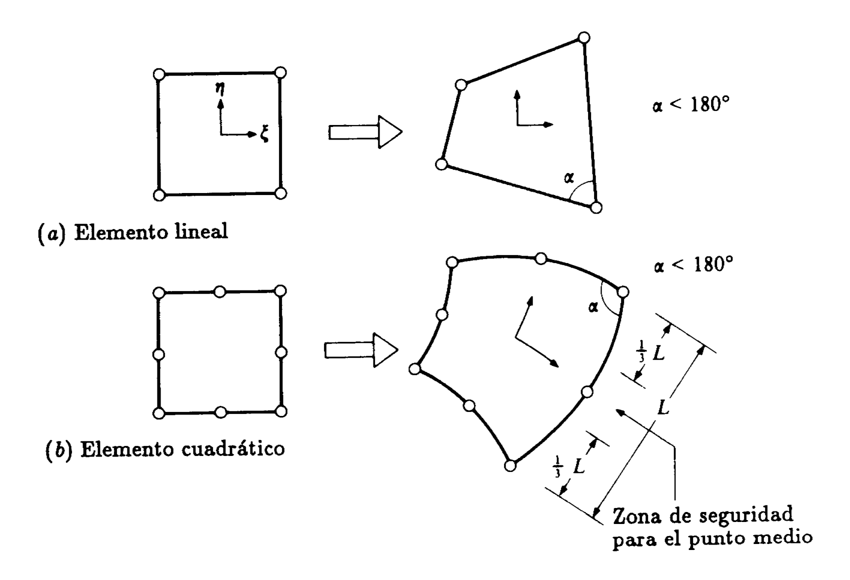


Figura 8.6 Reglas para la unicidad de las transformaciones (a) y (b).

reglas generales son impracticables y es preciso comprobar numéricamente el signo del determinante jacobiano. En la práctica basta generalmente con una distorsión cuadrática.

8.3 Conformidad geométrica de los elementos

A la vez que hemos visto que mediante la transformación de la función de forma cada uno de los elementos generatrices se transforma punto por punto en una parte del objeto real, es importante que la subdivisión de éste en nuevos elementos curvos no deje lagunas. Una posibilidad de tales lagunas se indica en la Figura 8.7.

TEOREMA 1. *Cuando dos elementos contiguos están engendrados por "elementos generatrices" cuyas funciones de forma satisfacen las condiciones de continuidad, los elementos distorsionados serán entonces continuos.*

Este teorema es evidente, ya que en estos casos el criterio de continuidad que requiere la unicidad de la función u se sustituye simplemente por el de unicidad de la coordenada x, y o z. Como los nodos de elementos contiguos tienen las mismas coordenadas la continuidad queda asegurada.

No es preciso que los nodos de los nuevos elementos distorsionados estén únicamente en los puntos donde se definan las funciones de forma. Se pueden añadir otros conjuntos de nodos correspondientes en los límites de separación, o en los contornos.

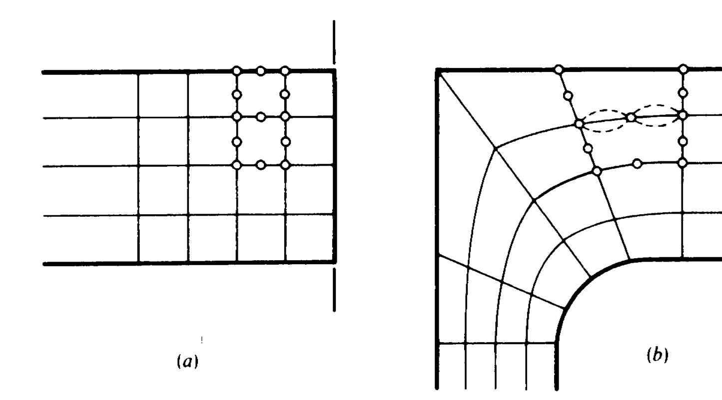


Figura 8.7 Condiciones necesarias de continuidad para la división real del espacio.

8.4 Variación de la función incógnita en el interior de elementos curvilíneos distorsionados. Condiciones de continuidad

Definida ya la forma del elemento por las funciones de forma $\mathbf{N}'$, se ha de definir la variación de la incógnita, u, antes de que podamos establecer las propiedades de los elementos. Lo más cómodo es expresar dicha variación en función de coordenadas curvilíneas locales mediante la expresión habitual

$$u = \mathbf{N}\mathbf{a}^e \tag{8.3}$$

donde $\mathbf{a}^e$ representa los valores nodales.

TEOREMA 2. *Si las funciones de forma* $\mathbf{N}$ *empleadas en (8.3) son tales que la continuidad de* u *se mantiene en las coordenadas del elemento generatriz, las condiciones de continuidad se satisfarán entonces en los elementos distorsionados.*

La demostración de este teorema sigue los mismos razonamientos que el de la sección precedente.

Los valores nodales pueden o no estar asociados a los mismos nodos utilizados para definir la geometría del elemento. Por ejemplo, en la Figura 8.8 los puntos marcados con círculos son los empleados para definir la geometría del elemento. Para definir la variación de la incógnita podrían utilizarse los valores de la función en los puntos marcados con cuadrados.

En la Figura 8.8(a), la geometría y la variación de la función vienen definidas por los mismos puntos. Si hacemos entonces

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}' \tag{8.4}$$

las funciones de forma que definen la geometría y la función son las mismas, y los elementos se llaman entonces *isoparamétricos*.

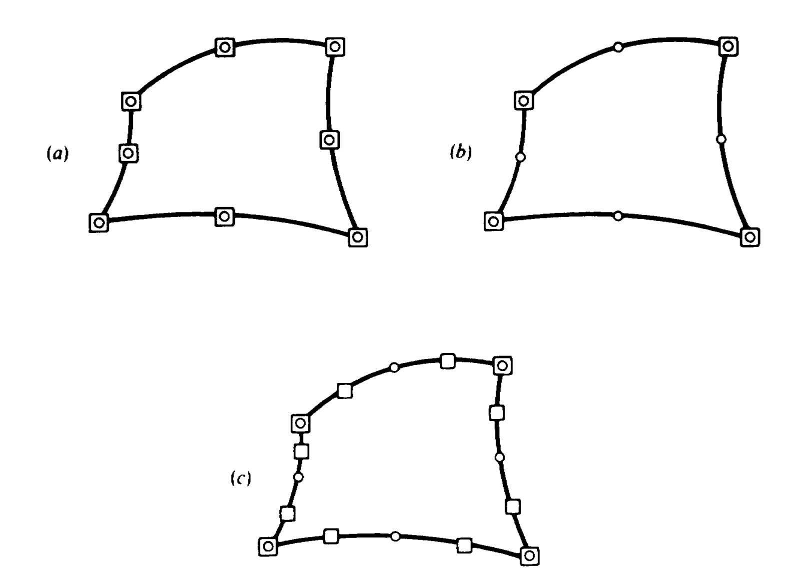


Figura 8.8 Diferentes definiciones de elementos: ○ Punto de definición de las coordenadas. □ Puntos de definición de los parámetros de la función. (a) Isoparamétrico, (b) superparamétrico, (c) subparamétrico.

Podríamos, sin embargo, utilizar solamente los cuatro puntos de los vértices para definir la variación de u [Figura 8.8(b)]. Nos referiremos a tal elemento como *superparamétrico*, advirtiendo que la variación de la geometría es más general que la de la incógnita real.

Similarmente, si para definir u introducimos más nodos que los empleados para definir la geometría, al elemento resultante lo llamaremos *subparamétrico* [Figura 8.8(c)]. Veremos que estos elementos suelen aparecer con mayor frecuencia en la práctica.

Mientras que para la transformación es apropiado usar las formas "estándar" de las funciones de forma, para la interpolación de las incógnitas se puede, desde luego, usar las formas jerárquicas definidas en el capítulo anterior. De nuevo, las definiciones de variaciones sub o superparámetricas son aplicables.

TRANSFORMACIONES

8.5 Cálculo de las matrices de los elementos (transformación en las coordenadas ξ, η, ζ)

Para llevar acabo un análisis mediante elementos finitos han de encontrarse las matrices que definan las propiedades del elemento, ej., rigidez, etc. Dichas matrices serán de la forma

$$\int_V \mathbf{G}\, dV \tag{8.5}$$

donde la matriz **G** depende de **N** o de sus derivadas respecto a las *coordenadas globales*. Como ejemplo de esto, tenemos la matriz de rigidez

$$\int_V \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\, dV \tag{8.6}$$

y los vectores de carga asociados

$$\int_V \mathbf{N}^T\mathbf{b}\, dV \tag{8.7}$$

Para cada clase particular de problemas de elasticidad, las matrices de **B** vienen dadas explícitamente por sus componentes [véase la forma general de las Ecs. (3.10), (4.6) y (5.11)]. Refiriéndonos a la primera de ellas, Ec. (3.10), válida para problemas planos, se tiene

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x}, & 0 \\ 0, & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y}, & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{8.8}$$

En problemas de elasticidad, la matriz **G** es, por consiguiente, función de las derivadas primeras de **N** y ello se produce en muchas otras clases de problemas. En todos se necesita continuidad C_0 y como ya hemos señalado ésta es satisfecha sin dificultad por las funciones del Capítulo 7, escritas ahora en función de las coordenadas curvilíneas.

Notemos que son necesarias dos transformaciones para evaluar dichas matrices. En primer lugar, como N_i se define en función de coordenadas locales (curvilíneas), es necesario idear algún procedimiento para expresar las derivadas globales del tipo que aparecieron en la Ec (8.8) en función de las derivadas locales.

En segundo lugar, el elemento de volumen (o de superficie) sobre el que hemos de efectuar la integración ha de expresarse en función de coordenadas locales cambiando convenientemente los límites de integración.

Consideremos, por ejemplo, el sistema de coordenadas locales ξ, η, ζ y un sistema correspondiente de coordenadas globales x, y, z. Mediante las reglas corrientes de la derivación en cadena podemos escribir, por ejemplo, las derivadas con respecto a ξ como sigue

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi} \tag{8.9}$$

Efectuando la misma derivación con respecto a las otras dos coordenadas y escribiendo los resultados en forma matricial, tenemos

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi}, & \dfrac{\partial y}{\partial \xi}, & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta}, & \dfrac{\partial y}{\partial \eta}, & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \zeta}, & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta}, & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{8.10}$$

Los términos del primer miembro de la expresión anterior pueden ser evaluados, ya que las funciones N_i vienen definidas en coordenadas locales. Además, puesto que x, y, z vienen expresadas en forma explícita por la relación que define a las coordenadas curvilíneas [Ec. (8.2)], se puede encontrar explícitamente la matriz **J** en función de las coordenadas locales. Esta matriz se conoce como *matriz jacobiana.*

Para encontrar ahora las derivadas globales basta con invertir **J** y escribir

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \tag{8.11}$$

Expresando **J** en función de las funciones de forma **N**′ que definen la transformación de coordenadas (que, como hemos visto, son idénticas a las funciones de forma **N** cuando se emplea la formulación isoparamétrica), obtenemos

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sum \dfrac{\partial N_i'}{\partial \xi} x_i, & \sum \dfrac{\partial N_i'}{\partial \xi} y_i, & \sum \dfrac{\partial N_i'}{\partial \xi} z_i \\ \sum \dfrac{\partial N_i'}{\partial \eta} x_i, & \sum \dfrac{\partial N_i'}{\partial \eta} y_i, & \sum \dfrac{\partial N_i'}{\partial \eta} z_i \\ \sum \dfrac{\partial N_i'}{\partial \zeta} x_i, & \sum \dfrac{\partial N_i'}{\partial \zeta} y_i, & \sum \dfrac{\partial N_i'}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1'}{\partial \xi}, & \dfrac{\partial N_2'}{\partial \xi} & \cdots \\ \dfrac{\partial N_1'}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_2'}{\partial \eta}, & \cdots \\ \dfrac{\partial N_1'}{\partial \zeta}, & \dfrac{\partial N_2'}{\partial \zeta} & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{8.12}$$

Para transformar las variables y la región sobre la cual se efectúa la integración seguiremos el procedimiento general, en el que aparece el determinante de **J**. Así, por ejemplo, un elemento de volumen es

$$dx\ dy\ dz = \det \mathbf{J}\ d\xi\ d\eta\ d\zeta \tag{8.13}$$

Este tipo de transformación es válido independientemente del número de coordenadas utilizado. Para su justificación referimos al lector a los textos de matemáticas generales. Una explicación especialmente clara de esto puede encontrarse en Murnaghan.[8]† (ver también Apéndice 5).

Suponiendo que puede encontrarse la inversa de $\mathbf{J}$, hemos reducido ya el problema de la evaluación de las propiedades del elemento al de encontrar integrales del tipo de las que aparecen en la Ec. (8.5).

Más explícitamente, si las coordenadas curvilíneas están normalizadas según el tipo de prisma recto, podemos escribir dichas integrales como

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \overline{\mathbf{G}}(\xi,\eta,\zeta)d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{8.14}$$

Además, la integración *se lleva a cabo en el interior de dicho prisma* y no en la complicada forma distorsionada, resultando unos límites de integración mucho más sencillos. De forma similar, en problemas de una o dos dimensiones, las integrales resultantes serán de una o dos variables con límites de integración más sencillos.

Mientras que en el caso anterior los límites de integración son sencillos, por desgracia la forma explícita de $\overline{\mathbf{G}}$ no lo es. Exceptuando los elementos más simples, el proceso de efectuar la integración algebraicamente suele sobrepasar nuestras posibilidades matemáticas y ha de recurrirse a la integración numérica. Esto, como se verá en secciones siguientes, no es una dificultad grave y tiene la ventaja de que evita más fácilmente los errores algebraicos, pudiéndose escribir programas generales, no ligados a ningún elemento particular, para diversas clases de problemas. De hecho, en tales cálculos numéricos nunca se calcula explícitamente la inversa de $\mathbf{J}$.

8.5.1 *Integrales de superficie.* En elasticidad y en otras aplicaciones aparecen con frecuencia integrales de superficie. Son típicas de estos casos las expresiones para calcular la contribución de las fuerzas de superficie al vector de fuerzas nodales equivalentes [véase Capítulo 2, Ec. (2.24 b)]:

$$\mathbf{f} = -\int_A N^T \overline{\mathbf{t}}\, dA$$

El elemento dA se encontrará generalmente en una superficie donde una de las coordenadas (por ejemplo ξ) sea constante.

La forma más conveniente de proceder es considerar que dA es un

† El determinante de la matriz jacobiana se conoce sencillamente en la literatura como "jacobiano" y suele escribirse

$$\det \mathbf{J} \equiv \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}$$

vector orientado en dirección normal a la superficie (ver Apéndice 5). Para problemas tridimensionales, formamos un producto vectorial

$$d\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix} d\xi\, d\eta$$

y sustituyendo, integramos en el interior de un dominio $1 \leq \xi,\ \eta \leq 1$.

En dos dimensiones aparece una longitud dS y en este caso es sencillamente

$$dS = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} d\xi$$

en superficies de η constante.

8.6 Matrices del elemento. Coordenadas de área y volumen

Las relaciones generales [Ec. (8.2)] de transformación de coordenadas y, por supuesto, todos los teoremas siguientes son igualmente válidos para cualquier sistema de coordenadas locales y podrían relacionar las coordenadas locales L_1, L_2,.., que aparecían con relación a triángulos y tetraedros en el capítulo anterior, con las coordenadas cartesianas globales.

Ciertamente, la mayor parte de lo expuesto en el anterior capítulo es válido, si simplemente nos limitamos a cambiar convenientemente el nombre de las coordenadas. Sin embargo, surgen dos diferencias importantes.

La primera se refiere al hecho de que las coordenadas locales no son independientes y en realidad son una más que las del sistema cartesiano. La matriz $\mathbf{J}$ tendría evidentemente forma rectangular y no poseería inversa. La segunda es simplemente la diferencia en los límites de integración, que tienen que corresponder con un elemento "generatriz" triangular o tetraédrico.

La manera más sencilla, aunque quizás no la más elegante, de sortear la primera dificultad es considerar la última variable como dependiente de las otras. Así, por ejemplo, podemos introducir formalmente en el caso del tetraedro

$$\begin{aligned} \xi &= L_1 \\ \eta &= L_2 \\ \zeta &= L_3 \\ 1-\xi-\eta-\zeta &= L_4 \end{aligned} \tag{8.15}$$

(según la definición del capítulo anterior) y así mantener intacta la Ec. (8.9) y todas las demás hasta la Ec. (8.14).

Como las funciones N_i vienen expresadas en función de L_1, L_2, etc., debemos observar que

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_4}\frac{\partial L_4}{\partial \xi} \tag{8.16}$$

Empleando la Ec. (8.15) se obtiene simplemente

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} - \frac{\partial N_i}{\partial L_4}$$

consiguiéndose las otras derivadas como expresiones similares.

Los límites de integración de la Ec. (8.14) cambian ahora, sin embargo, para corresponder con los del tetraedro. En general,

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta} \int_0^{1-\eta-\zeta} \overline{\mathbf{G}}(\xi,\eta,\zeta)\; d\xi\; d\eta\; d\zeta \tag{8.17}$$

Obviamente se aplicará el mismo procedimiento en el caso de coordenadas de área en triángulos.

Debe señalarse que de nuevo la expresión $\overline{\mathbf{G}}$ precisa integración numérica, efectuándose ésta, no obstante, sobre la región generatriz no distorsionada, ya sea ésta tetraédrica o triangular.

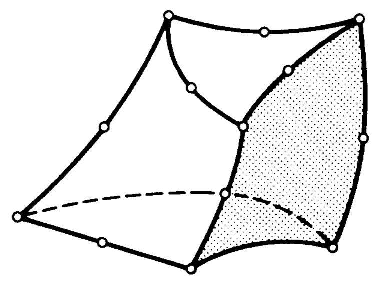


Figura 8.9 Prisma triangular distorsionado.

Finalmente, debe hacerse notar que cualquiera de los elementos estudiados en el capítulo anterior puede ser transformado en formas más complejas. En algunos, como el prisma triangular, se utilizan tanto coordenadas de área como rectangulares (Figura 8.9). Las observaciones acerca de la dependencia de las coordenadas se aplican de nuevo con relación al prisma, pero el proceso seguido en la sección presente habrá aclarado el procedimiento a seguir.

8.7 Convergencia de los elementos en coordenadas curvilíneas

Para considerar los aspectos de convergencia del problema formulado en coordenadas curvilíneas conviene volver al punto original de la aproximación, donde se definía un funcional de energía Π, o una expresión integral equivalente (formulación débil), esencialmente mediante integrales de volumen similares a la Ec. (8.5), donde el integrando era función de u y de sus derivadas primeras.

Así, por ejemplo, los principios variacionales de tipo energético discutidos en el Capítulo 2 (y otros del Capítulo 9) podrían formularse como sigue para una función escalar u

$$\Pi = \int_\Omega F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right) d\Omega + \int_\Gamma E(u,\ldots) d\Gamma \tag{8.18}$$

La transformación de coordenadas cambia las derivadas de cualquier función mediante la relación jacobiana (8.11). Así pues,

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1}(\xi,\eta) \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{8.19}$$

pudiéndose expresar simplemente el funcional por una relación de la forma (8.18), sustituyendo x, y, etc., por ξ, η, etc., manteniendo inalterado el máximo orden de diferenciación.

Inmediatamente se deduce que si se escogen las funciones de forma en el espacio de coordenadas curvilíneas de manera que observen las reglas habituales de convergencia (continuidad y presencia de polinomios completos de primer grado), se producirá entonces convergencia. Más aún, todos los razonamientos relativos al orden de convergencia para elementos de lado h siguen siendo válidos, *con tal que h se exprese en el sistema de coordenadas curvilíneas.*

Por supuesto, todo lo dicho anteriormente se aplica a problemas que relacionen derivadas de orden más elevado y a la mayoría de transformaciones unívocas de coordenadas. Adviértase que el test de la parcela, tal como se concibió en el sistema de coordenadas x, y, ... (Capítulos 2 y 11),

ya no es aplicable en general y en principio debería aplicarse imponiendo campos polinómicos en las coordenadas curvilíneas. En el caso de elementos isoparamétricos (o subparamétricos), la situación es más ventajosa. En este caso, un campo lineal (derivada constante según x, y) puede siempre reproducirse mediante el desarrollo en coordenadas curvilíneas, y por consiguiente tales elementos pasarán el test de la parcela de orden mínimo de la forma estándar.

Para demostrar esto consideremos un desarrollo isoparamétrico estándar

$$u = \sum_{i=1}^{n} N_i a_i \equiv \mathbf{N}\mathbf{a} \qquad \mathbf{N} = \mathbf{N}(\xi, \eta, \zeta) \tag{8.20}$$

con las coordenadas de los nodos definiendo la tranformación

$$x = \sum N_i x_i \qquad y = \sum N_i y_i \qquad z = \sum N_i z_i \tag{8.21}$$

La cuestión es bajo qué circunstancias es posible que la expresión (8.20) defina un desarrollo lineal en coordenadas cartesianas:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \equiv \alpha_1 + \alpha_2 \sum N_i x_i + \alpha_3 \sum N_i y_i + \alpha_4 \sum N_i z_i \tag{8.22}$$

Si se toma

$$a_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 z_i$$

y se compara la expresión (8.20) con la (8.22) se observa que se obtiene una identidad entre ellas siempre que

$$\sum N_i = 1$$

Como éste es el requisito normal para las funciones de forma de los elementos estándar [viz. Ec. (7.4)] se puede concluir que el siguiente teorema es válido.

TEOREMA 3. *Todos los elementos isoparamétricos satisfacen el criterio de derivada constante*

Dado que los elementos subparamétricos pueden expresarse como casos particulares de la transformación isoparamétrica, este teorema es obviamente válido para ellos.

Tiene interés continuar estas consideraciones y ver bajo qué circunstancias se pueden conseguir desarrollos polinómicos de mayor orden mediante transformaciones. El sencillo caso lineal en el que se ha "adivinado" la solución debe desarrollarse considerando en detalle los términos polinómicos que aparecen en expresiones tales como la (8.20) y (8.22) y establecer las condiciones en las que se igualan los coeficientes adecuados.

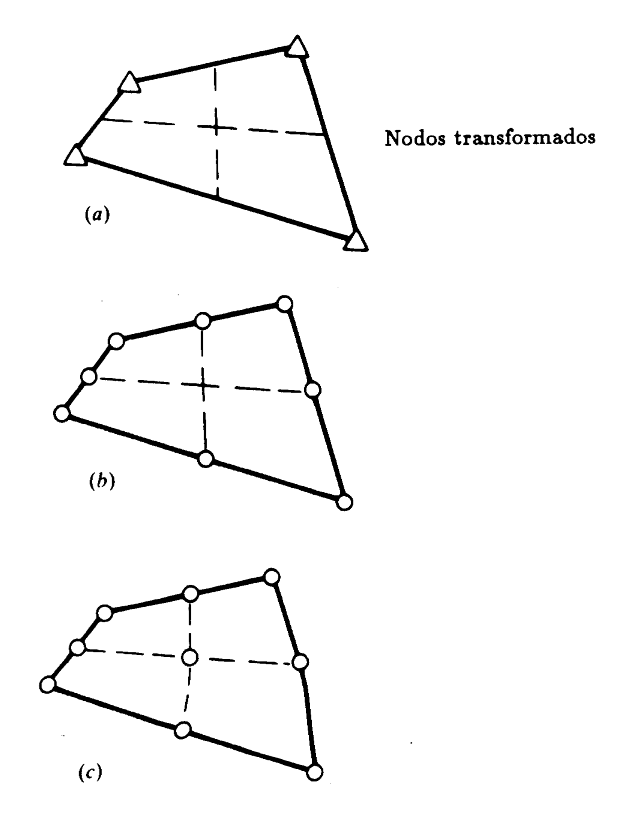


Figura 8.10 Transformación bilineal de los elementos subparamétricos cuadráticos de ocho y nueve nodos.

Considérese el siguiente problema: las circunstancias bajo las que el cuadrilátero de la Figura 8.10, transformado bilinealmente, puede representar completamente cualquier desarrollo cuadrático cartesiano. Se tiene

$$x = \sum_{1}^{4} N_i' x_i \qquad y = \sum_{1}^{4} N_i' y_i \tag{8.23}$$

y se desea ser capaz de reproducir

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \tag{8.24}$$

Puesto que la forma bilineal de N_i' contiene términos tales como $1, \xi, \eta$ y $\xi\eta$, lo anterior se puede escribir como

$$u = \beta_1 + \beta_2\xi + \beta_3\eta + \beta_4\xi^2 + \beta_5\xi\eta + \beta_6\eta^2 + \beta_7\xi\eta^2 + \beta_8\xi^2\eta + \beta_9\xi^2\eta^2 \tag{8.25}$$

donde β_1 a β_9 dependen de los valores de α_1 a α_6.

Se trata ahora de emparejar los términos que provienen de los desarrollos cuadráticos de los tipos serendípitos y lagrangianos mostrados en la Figura 8.10(b) y (c):

$$u = \sum_1^8 N_i a_i \tag{8.26a}$$

$$u = \sum_1^9 N_i a_i \tag{8.26b}$$

donde los términos son del tipo definido en el capítulo previo.

Para el elemento de ocho nodos (serendípito) [Figura 8.10(b)] se puede escribir (8.26a) directamente usando los coeficientes polinómicos $b_i, i = 1-8$, en lugar de la variables nodales a_i de la forma (teniendo en cuanta los términos que aparecen en el triángulo de Pascal):

$$u = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi^2 + b_5\xi\eta + b_6\eta^2 + b_7\xi\eta^2 + b_8\xi^2\eta \tag{8.27}$$

Es inmediatamente evidente que para valores arbitrarios de β_1 a β_9 es imposible emparejar los coeficientes b_1 a b_8, debido a la ausencia del término $\xi^2\eta^2$ en la Ec. (8.27). [Sin embargo, si se utilizan expansiones de tipo serendípito de mayor orden (cuárticas, etc.) este emparejamiento sería evidentemente posible, y se puede concluir que los elementos de la familia serendípita de orden cuatro o mayor, linealmente distorsionados, son siempre capaces de representar campos cuadráticos.]

Para el elemento lagrangiano de nueve nodos [Figura 8.10(c)] el desarrollo similar a (8.27) es

$$u = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi^2 + \cdots + b_8\xi^2\eta + b_9\xi^2\eta^2 \tag{8.28}$$

y el emparejamiento de los coeficientes de las Ecs. (8.28) y (8.25) se puede hacer directamente.

Por tanto, se puede concluir que los elementos de nueve nodos representan mejor los polinomios cartesianos (cuando están distorsionados linealmente), y son preferibles para modelar soluciones "suaves".† En la Figura 8.11 se da una prueba de esto. En ella se consideran los resultados de un cálculo de elementos finitos, con elementos de ocho y nueve nodos, respectivamente, usados para reproducir la solución de una sencilla viga en donde se sabe que la respuesta exacta es cuadrática. Sin distorsión ambos elementos dan resultados exactos, pero al distorsionarlos sólo el de nueve nodos sigue haciéndolo mientras que el de ocho nodos da tensiones muy fluctuantes.

† Los autores agradecen al Prof. M. Crochet de la Universidad de Lovaina por señalar esta sencilla demostración.

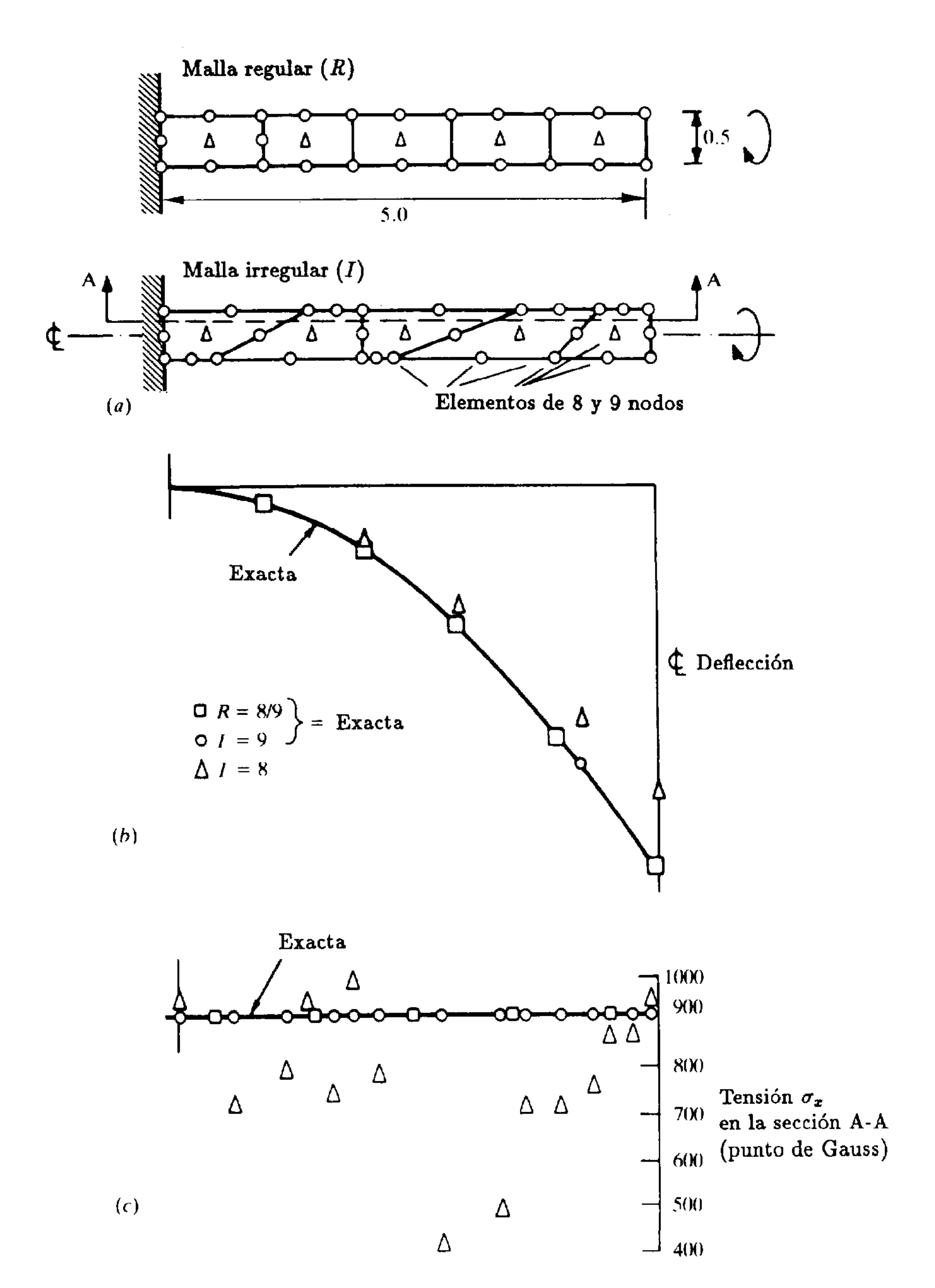


Figura 8.11 Elementos cuadráticos serendípitos y lagrangianos de ocho y nueve nodos en forma regular y distorsionada. Flecha elástica para una viga sometida a momento constante. Nótese la pobreza de los resultados del elemento de ocho nodos.

Razonamientos similares llevan a la conclusión de que en tres dimensiones sólo el elemento lagrangiano de 27 nodos es capaz de reproducir exactamente polinomios cuadráticos en coordenadas cartesianas cuando está deformado linealmente.

El lector puede extender estos razonamientos a desarrollos de mayor orden, por ejemplo, a la modelización de respuestas cúbicas. Una discusión completa de tales problemas se puede encontrar en Wachspress.[9]

8.8 Integración numérica unidimensional

Ya se vio en el Capítulo 4, al tratar un problema relativamente sencillo de distribución de tensiones en un cuerpo de revolución con elementos triangulares simples, que la integración exacta de las expresiones de las matrices de los elementos podría ser dificultosa. Ahora, para los más complejos elementos distorsionados, la integración numérica es imprescindible.

Aquí resumiremos algunos fundamentos de la integración numérica, junto con tablas de los coeficientes numéricos convenientes.

Para encontrar numéricamente el valor de la integral de una función de una variable puede seguirse uno de varios procedimentos.[10]

8.8.1 *Cuadratura de Newton-Cotes.*† En el procedimiento más obvio, los puntos en los que se precisa el valor de la función se determinan *a priori* —generalmente separados por intervalos iguales—, haciendo pasar un polinomio por los valores de la función en esos puntos y procediendo a su integración exacta [Figura 8.12(a)].

Como "n" valores de la función definen un polinomio de grado $n-1$, el error será del orden $O(h^n)$, donde h es el tamaño del elemento. Esto conduce a la conocida fórmula de la cuadratura de Newton-Cotes. Las integrales pueden escribirse

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi)\, d\xi = \sum_{1}^{n} H_i f(\xi_i) \qquad (8.29)$$

para un intervalo de integración entre -1 y $+1$ [Figura 8.12(a)]. Por ejemplo, si $n=2$, resulta la conocida regla del trapecio:

$$I = f(-1) + f(1) \qquad (8.30)$$

para $n=3$, obtenemos la regla "del tercio" de Simpson:

$$I = \frac{1}{3}[f(-1) + 4f(0) + f(1)] \qquad (8.31)$$

† "Cuadratura" es un término análogo al de "Integración numérica".

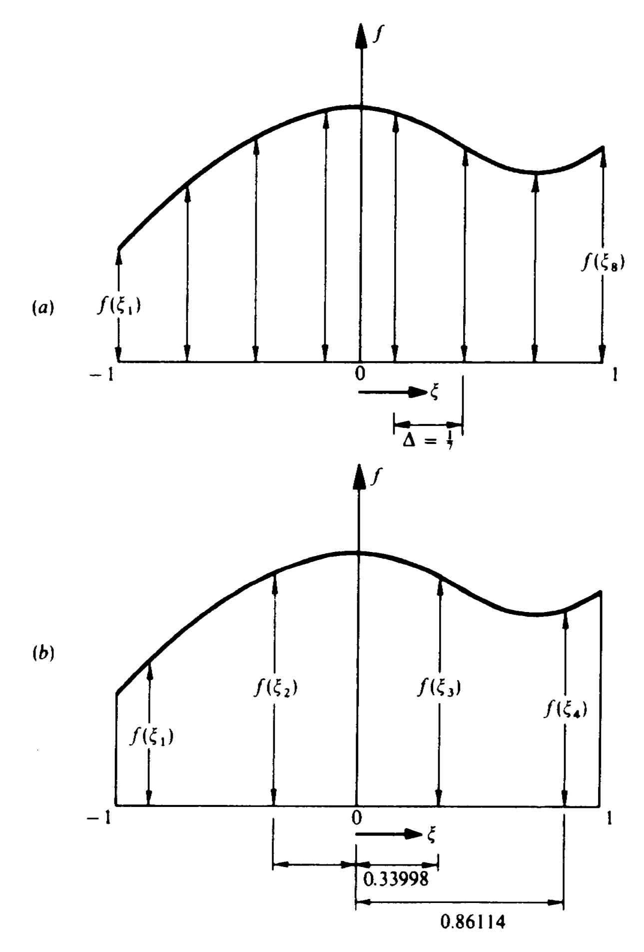


Figura 8.12 Integraciones de Newton Cotes (a) y de Gauss (b). Cada una integra exactamente un polinomio de séptimo grado [es decir, con un error de $O(h^8)$].

y para $n=4$:

$$I = \frac{1}{4}[f(-1) + 3f(-\frac{1}{3}) + 3f(\frac{1}{3}) + f(1)] \qquad (8.32)$$

En el texto de Kopal,[10] pueden encontrarse las fórmulas para los valores de n hasta 21.

8.8.2 *Cuadratura de Gauss.* Si en lugar de especificar *a priori* la posición de los puntos en los que se precisa el valor de la función hacemos que éstos

TABLA 8.1

ABSCISAS Y COEFICIENTES DE PESO DE LA FÓRMULA DE LA CUADRATURA DE GAUSS

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} H_i f(a_j)$$

$\pm a$		H
	$n = 1$	
0		2·00000 00000 00000
	$n = 2$	
0·57735 02691 89626		1·00000 00000 00000
	$n = 3$	
0·77459 66692 41483		0·55555 55555 55556
0·00000 00000 00000		0·88888 88888 88889
	$n = 4$	
0·86113 63115 94053		0·34785 48451 37454
0·33998 10435 84856		0·65214 51548 62546
	$n = 5$	
0·90617 98459 38664		0·23692 68850 56189
0·53846 93101 05683		0·47862 86704 99366
0·00000 00000 00000		0·56888 88888 88889
	$n = 6$	
0·93246 95142 03152		0·17132 44923 79170
0·66120 93864 66265		0·36076 15730 48139
0·23861 91860 83197		0·46791 39345 72691
	$n = 7$	
0·94910 79123 42759		0·12948 49661 68870
0·74153 11855 99394		0·27970 53914 89277
0·40584 51513 77397		0·38183 00505 05119
0·00000 00000 00000		0·41795 91836 73469
	$n = 8$	
0·96028 98564 97536		0·10122 85362 90376
0·79666 64774 13627		0·22238 10344 53374
0·52553 24099 16329		0·31370 66458 77887
0·18343 46424 95650		0·36268 37833 78362
	$n = 9$	
0·96816 02395 07626		0·08127 43883 61574
0·83603 11073 26636		0·18064 81606 94857
0·61337 14327 00590		0·26061 06964 02935
0·32425 34234 03809		0·31234 70770 40003
0·00000 00000 00000		0·33023 93550 01260
	$n = 10$	
0·97390 65285 17172		0·06667 13443 08688
0·86560 33666 88985		0·14945 13491 50581
0·67940 95682 99024		0·21908 63625 15982
0·43339 53941 29247		0·26926 67193 09996
0·14887 43389 81631		0·29552 42247 14753

se encuentren en puntos que se determinan de manera que se alcance la mayor precisión posible, para un número de puntos dado pueden conseguirse resultados más exactos. De hecho, si consideramos de nuevo que

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi)\, d\xi = \sum_{1}^{n} H_i f(\xi_i) \tag{8.33}$$

y volvemos a suponer una expresión polinómica, es fácil ver que para n puntos tenemos $2n$ incógnitas (H_i y ξ_i), y por tanto se puede construir un polinomio de grado $2n-1$ y obtener su integral exacta [Figura 8.12(b)]. El error sería así de orden $O(h^{2n})$.

Las ecuaciones simultáneas que se manejan son difíciles de resolver, pero algo de manipulación matemática demuestra que la solución puede obtenerse explícitamente en función de polinomios de Legendre. Por ello, este método particular suele ser conocido como cuadratura de Gauss-Legendre.

En la Tabla 8.1 se muestran las posiciones y los coeficientes de peso para la integración de Gauss.

En el análisis por elementos finitos los cálculos más complicados son los relativos a la determinación de los valores de f, que es la función a integrar. Por tanto, el procedimiento de Gauss es idealmente el más favorable, puesto que requiere un número mínimo de dichas evaluaciones, y a partir de ahora será utilizado exclusivamente.

Pueden deducirse otras expresiones para las funciones integrales del tipo

$$I = \int_{-1}^{1} w(\xi) f(\xi)\, d\xi = \sum_{1}^{n} H_i f(\xi_i) \tag{8.34}$$

para formas de $w(\xi)$ preestablecidas, nuevamente integrando un desarrollo de $f(\xi)$ hasta un determinado grado de precisión.

8.9 Integración numérica en regiones rectangulares o prismáticas rectas

La manera más evidente de calcular la integral

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \tag{8.35}$$

es calcular primero la integral interior manteniendo η constante, es decir,

$$\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\, d\xi = \sum_{j=1}^{n} H_j f(\xi_j,\eta) = \psi(\eta) \tag{8.36}$$

Calculando de igual manera la integral exterior, obtenemos

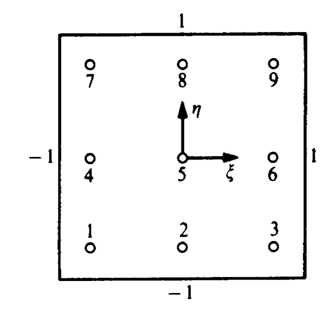


Figura 8.13 Puntos de integración para $n = 3$ en una región cuadrada. (Exacto para un polinomio de quinto grado en cada dirección).

$$I=\int_{-1}^{1}\psi(\eta)d\eta=\sum_{i=1}^{n}H_j\psi(\eta_i)=\sum_{i=1}^{n}H_i\sum_{j=1}^{n}H_jf(\xi,\eta_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}H_iH_jf(\xi_j,\eta_i) \tag{8.37}$$

Análogamente, para un prisma recto se obtiene

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta=\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}H_iH_jH_mf(\xi_i,\eta_j,\zeta_m) \tag{8.38}$$

En las expresiones anteriores se ha supuesto un número igual de puntos de integración en cada dirección. Evidentemente ello no es necesario y en ocasiones puede ser conveniente utilizar un número diferente en cada dirección de integración.

Es de interés hacer notar que en realidad la suma doble puede interpretarse sin dificultad como una sencilla sobre $(n \times n)$ puntos en el caso de un rectángulo (o n^3 puntos en el caso de un cubo). Así, en la Figura 8.13 se muestran los nueve puntos que dan por resultado integrales exactas de orden 5 en cada dirección.

Podríamos, sin embargo, abordar el problema directamente y exigir una integración exacta de un polinomio de quinto grado en dos direcciones. En cada punto de Gauss han de determinarse dos coordenadas y el valor de f para introducirlos en una fórmula de ponderación del tipo

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\; d\xi\; d\eta = \sum_{1}^{m} w_i f(\xi_i,\eta_i) \tag{8.39}$$

Resulta que en este caso basta solamente con siete puntos para obtener el mismo grado de precisión. Irons[11] ha desarrollado y se han empleado provechosamente[12] algunas fórmulas de este tipo para paralelepípedos tridimensionales.

8.10 Integración numérica en regiones triangulares o tetraédricas

Para un triángulo, las integrales en función de las coordenadas de área son de la forma

$$I = \int_0^1\int_0^{1-L_1} f(L_1L_2L_3)\; dL_2\; dL_1 \tag{8.40}$$

TABLA 8.2

FÓRMULAS PARA INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE TRIÁNGULOS

Orden	Figura	Error	Puntos	Coordenadas Triangulares	Pesos
Lineal		$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$	1
			a	$\frac{1}{2},\frac{1}{2},0$	$\frac{1}{3}$
Cuadrático		$R = O(h^3)$	b	$0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
			c	$\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
			a	$\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$	$-\frac{27}{48}$
			b	0.6, 0.2, 0.2	
Cúbico		$R = O(h^4)$	c	0.2, 0.6, 0.2	$\frac{25}{48}$
			d	0.2, 0.2, 0.6	
			a	$\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$	0.2250000000
			b	α_1,β_1,β_1	
Quinto		$R = O(h^6)$	c	β_1,α_1,β_1	0.1323941527
			d	β_1,β_1,α_1	
			e	α_2,β_2,β_2	
			f	β_2,α_2,β_2	0.1259391805
			g	β_2,β_2,α_2	

con
$\alpha_1 = 0.0597158717$
$\beta_1 = 0.04701420641$
$\alpha_2 = 0.7974269853$
$\beta_2 = 0.1012865073$

TABLA 8.3

FÓRMULAS PARA INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE TETRAEDROS

Nro.	Orden	Figura	Error	Puntos	Coordenadas tetraédricas	Pesos
1	Lineal		$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	1
				a	$\alpha, \beta, \beta, \beta$	$\frac{1}{4}$
2	Cuadrático		$R = O(h^3)$	b	$\beta, \alpha, \beta, \beta$	$\frac{1}{4}$
				c	$\beta, \beta, \alpha, \beta$	$\frac{1}{4}$
				d	$\beta, \beta, \beta, \alpha$	$\frac{1}{4}$
					$\alpha = 0.58541020$	
					$\beta = 0.13819660$	
				a	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	$-\frac{4}{5}$
				b	$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{9}{20}$
3	Cúbico		$R = O(h^4)$	c	$\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{9}{20}$
				d	$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}$	$\frac{9}{20}$
				e	$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$	$\frac{9}{20}$

De nuevo podríamos hacer uso de n puntos de Gauss y llegar a una expresión sumatoria como las empleadas en la sección anterior. Sin embargo, en los límites de integración aparece ahora la variable misma y es conveniente emplear puntos de Gauss especiales para integrales del tipo de la Ec. (8.34), en donde w es una función lineal. Dichas fórmulas han sido desarrolladas por Radau[13] y utilizadas provechosamente en el campo de los elementos finitos.[14] Es, sin embargo, mucho más deseable (y estético) hacer uso de fórmulas especiales en las que no se dé preponderancia a ninguna de las coordenadas naturales L_i. Dichas fórmulas han sido deducidas por Hammer *et al.*[15] y Felippa[16] y en la Tabla 8.2[17] se da una lista de los puntos de integración y sus coeficientes de peso correspondientes. (En la página 184 de la referencia 6 se ofrece una relación más completa de fórmulas de orden más elevado deducidas por Cowper.)

Se puede obviamente ampliar lo anterior al caso del tetraedro, y en la Tabla 8.3 se presentan algunas de las fórmulas correspondientes basadas en la referencia 15.

8.11 Orden de integración numérica necesario †

Al sustituir la integración exacta por la numérica se introduce un error adicional en los cálculos y a primera vista parece que el mismo debería reducirse lo más posible. Es evidente que el coste de la integración numérica puede ser de bastante consideración, y en algunos de los primeros programas la formulación numérica de las características del elemento representaba un tiempo de computador comparable al de la subsiguiente resolución de las ecuaciones. Es de interés, pues, determinar: *a*) los requisitos de integración mínimos que permitan convergencia; y *b*) los requisitos de integración necesarios para que se preserve el orden de convergencia que resultaría si se efectuara una integración exacta.

Se verá más adelante (Capítulos 11 y 12) que en realidad el empleo de órdenes de integración superiores a los realmente necesarios según *b*) constituye una desventaja segura, puesto que por razones muy claras los errores debidos a la discretización y a la integración inexacta se anulan mutuamente.

8.11.1 *Orden de integración mínimo para convergencia.* En los problemas donde la aproximación está definida por el funcional de energía (o su equivalente expresión integral de Galerkin) ya se ha establecido que existirá convergencia con tal que pueda reproducirse cualquier valor constante arbitrario de las derivadas m-simas. En el caso presente $m = 1$ y se requiere por consiguiente que pueda integrarse correctamente un valor constante **G** en integrales de la forma (8.5). Así pues, para que haya convergencia es preciso calcular correctamente el volumen del elemento $\int_V dV$. En coordenadas curvilíneas podríamos así sostener que $\int_V \det|J|\, d\zeta\, d\eta\, d\xi$ ha de ser calculada exactamente.[3,6]

Claramente se podría argüir que incluso esta condición es demasiado restrictiva, y que bastaría con calcular correctamente $\int_V d\zeta\, d\eta\, d\xi$ para conseguir la convergencia. Según esto, basta con cualquier integración cuyo error sea del orden $O(h)$. Se verá que un orden de integración tan bajo suele ser impracticable, aunque en realidad ya ha sido empleado en el Capítulo 4 para problemas de revolución.

8.11.2 *Orden de integración y pérdida de convergencia.* En un problema general ya hemos encontrado que la evaluación de la energía aproximada mediante elementos finitos (y, por supuesto, todas las demás integrales que aparecen en una aproximación del tipo de Galerkin, viz. Capítulo 9) era exacta hasta el grado $2(p-m)$, donde p era el grado del polinomio completo presente y m el orden de las derivadas que aparecían en las expresiones correspondientes.

† N. del T. El orden de integración se define como el número de puntos de integración que se toman en cada dirección local del elemento. Una Cuadratura de Gauss de orden n integra exactamente un polinomio de grado $2n-1$ en una dirección.

Si la integración numérica es exacta para un polinomio de grado $2(p-m)$, o presenta un error igual o menor que $O(h^{2(p-m)+1})$, no tendrá lugar entonces pérdida de convergencia.† Si en coordenadas curvilíneas tomamos una dimensión curvilínea de un elemento h la misma regla es aplicable. Para problemas de continuidad C_0 (o sea, $m = 1$), las fórmulas de integración deben ser como sigue:

$p = 1$,	elementos lineales	$O(h)$
$p = 2$,	elementos de segundo orden	$O(h^3)$
$p = 3$,	elementos de tercer orden	$O(h^5)$

Más adelante se verá cómo se emplean estos resultados en la práctica, pero conviene advertir que para un cuadrilátero o un triángulo lineales basta un solo punto de integración. Para cuadriláteros (o paralelepípedos) la integración de Gauss 2×2 (o $2 \times 2 \times 2$) es lo adecuado, y para triángulos (o tetraedros) cuadráticos son precisas las fórmulas de las Tablas 8.2 y 8.3 para tres (y cuatro) puntos.

Los teoremas fundamentales de esta sección se han presentado y demostrado numéricamente en diferentes publicaciones.[18-21]

8.11.3 *Singularidad de las matrices debido a la integración numérica.* El resultado final de toda aproximación mediante elementos finitos en problemas lineales es un sistema de ecuaciones de la forma

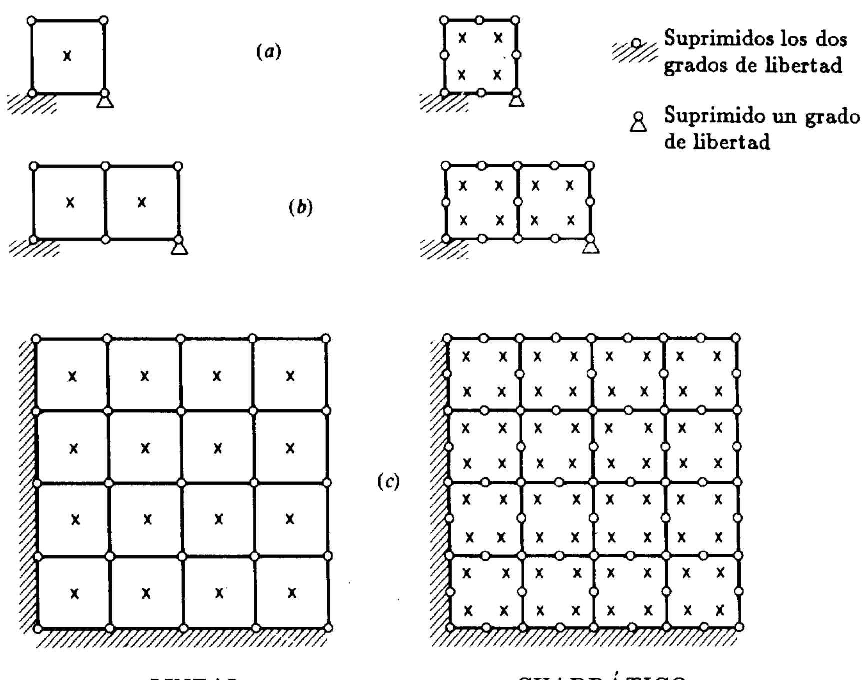
$$\mathbf{Ka} + \mathbf{f} = 0 \tag{8.41}$$

al que se han incorporado las condiciones de contorno y que debe, tras despejar los parámetros $\mathbf{a}$, proporcionar una solución aproximada a la situación planteada. Si dicha solución es única, como es el caso en los problemas reales bien planteados, la matriz $\mathbf{K}$ no debe ser singular. Hemos supuesto *a priori* que éste era el caso con la integración exacta, y en general así ha ocurrido. En la integración numérica puede presentarse singularidad para órdenes de integración bajos, y esto puede hacer que estos órdenes sean impracticables. Es fácil demostrar que, bajo ciertas circunstancias, debe aparecer singularidad de $\mathbf{K}$, siendo mucho más difícil demostrar lo contrario. Nosotros, por consiguiente, nos concentraremos en el primer caso.

En la integración numérica se sustituyen las integrales por una suma ponderada de relaciones lineales independientes entre los parámetros nodales $\mathbf{a}$. Estas relaciones lineales proporcionan la única información para construir la matriz $\mathbf{K}$. *Si el número de incógnitas* $\mathbf{a}$ *es mayor que el de relaciones independientes disponibles en todos los puntos de integración, la matriz* $\mathbf{K}$ *es entonces singular.*

† Para un principio energético el uso de cuadraturas puede implicar la pérdida de acotación para $\Pi(\mathbf{a})$.

× Puntos de Integración (3 relaciones independientes)
o Punto nodal con 2 grados de libertad



	Grados de Libertad		Relación Independiente	Grados de Libertad		Relación Independiente
(a)	$4 \times 2 - 3 = 5$	>	$1 \times 3 = 3$ singular	$2 \times 8 - 3 = 13$	>	$4 \times 3 = 12$ singular
(b)	$6 \times 2 - 3 = 9$	>	$2 \times 3 = 6$ singular	$13 \times 2 - 3 = 23$	>	$8 \times 3 = 24$
(c)	$25 \times 2 - 18 = 32$	<	$16 \times 3 = 48$	$48 \times 2 = 96$	<	$64 \times 3 = 192$

Figura 8.14 Comprobación de la singularidad de la matriz en problemas de elasticidad bidimensional (*a*), (*b*) y (*c*).

Para ilustrar este punto, consideremos problemas de elasticidad bidimensional que traten con elementos cuadriláteros lineales y parabólicos con cuadraturas de uno y cuatro puntos, respectivamente.

En tales casos, en cada punto de integración se emplean *tres* "relaciones de deformación" independientes y el número total de relaciones independientes es igual a 3 × (número de puntos de integración). El número de incógnitas a es simplemente 2 × (número de nodos) menos el número de grados de libertad restringidos.

Se muestran en las Figuras 8.14(a) y (b) un elemento aislado y un ensamblaje de dos elementos con las condiciones mínimas de desplazamiento en los apoyos que eviten sus movimientos como sólido rígido. Efectuando cálculos sencillos se demuestra que sólo es posible eliminar la singularidad en el caso de los elementos de segundo orden, y que todos los otros casos son estrictamente singulares.

En la Figura 8.14(c) se consideran mallas superabundantemente apoyadas de ambos tipos de elementos, y en este caso las matrices que se obtienen para los dos tipos pueden no ser singulares, aunque pueden aparecer cuasi-singularidades locales que llevan a resultados no satisfactorios (viz. Capítulo 11).

El lector podría muy bien considerar el mismo ensamblaje, pero nuevamente con las condiciones mínimas de ligadura de tres grados de libertad en los apoyos. El ensamblaje de elementos lineales con un solo punto de integración *será* singular, mientras que el formado por los de segundo orden se comportará correctamente.

Por la razón recién apuntada, los elementos lineales de un solo punto no suelen utilizarse con frecuencia mientras que la cuadratura de cuatro puntos es casi universal, hoy en día, para elementos cuadráticos.

En el Capítulo 11 volveremos al problema de convergencia y se indicarán los peligros debidos a las singularidades locales de los elementos.

Sin embargo, es interesante mencionar que en el Capítulo 12 *buscaremos* de hecho la singularidad con fines especiales siguiendo precisamente los mismos razonamientos.

8.12 Generación de mallas de elementos finitos mediante transformaciones. Función de comprobación

Se habrá observado que es fácil obtener una subdivisión grosera del dominio a analizar con un número pequeño de elementos isoparamétricos. Si se utilizan elementos de segundo o tercer orden, el ajuste de éstos a contornos relativamente complejos es razonable, como se aprecia en la Figura 8.15(a), donde se especifica una región dividida mediante cuatro elementos cuadráticos. Este número de elementos sería demasiado pequeño a efectos de análisis, pero puede efectuarse automáticamente *una simple subdivisión en elementos más pequeños* sin más que, por ejemplo, asignar nuevas posiciones de nodos en los puntos centrales de las coordenadas

curvilíneas y deducir así un número mayor de elementos similares, tal como se muestra en la Figura 8.15(b). Por supuesto, la subdivisión podría llevarse a cabo progresivamente para engendrar una región de elementos triangulares. El proceso permite, pues, deducir con un número pequeño de datos iniciales (*input data*), una malla de elementos finitos de cualquier refinamiento que se desee. En la referencia 22 se desarrolla este procedimiento de generación de mallas para sólidos y superficies en dos y tres dimensiones que probablemente resulta ser uno de los medios de subdivisión más eficaces.

La principal desventaja del método de generación sugerido es el hecho de que los contornos originalmente circulares de la Figura 8.15(a) están aproximados por sencillas parábolas y en ellas puede producirse un error geométrico. Para vencer esta dificultad se puede adoptar otro método de generación, desarrollado originalmente para representar formas complicadas de carrocerías de automóviles.[23,24] En este procedimiento de generación, la incógnita u se interpola mediante funciones de composición de manera que se satisfagan *exactamente* sus variaciones a lo largo de los bordes de un dominio cuadrado (ξ, η). Si en una expresión paramétrica del tipo de la Ec. (8.1) se emplean las coordenadas x e y, podrá representarse entonces cualquier región compleja mediante un solo elemento. En realidad, así ha sido generada la región de la Figura 8.15[23], habiéndose obtenido directamente una subdivisión de la malla sin ningún error geométrico en el contorno.

Los procedimientos de composición son de importancia considerable y se han utilizado para originar algunas familias de elementos interesantes[25] (que

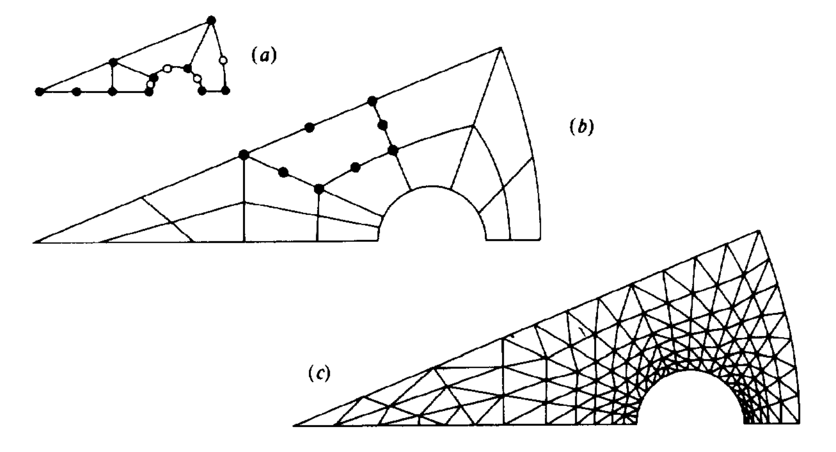


Figura 8.15 Generación automática de una malla mediante elementos cuadráticos isoparamétricos. (a) Especificación de los puntos de la malla. (b) Subdivisión automática en elementos isoparamétricos más pequeños. (c) Subdivisión automática en triángulos de primer orden.

de hecho incluyen los elementos serendípitos como subclase). Para explicar el proceso, mostraremos a continuación cómo puede interpolarse una función con una variación en el contorno preestablecida.

Consideremos una región $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$, representada en la Figura 8.16, en cuyos bordes se especifica una función ϕ [o sea, se dan $\phi(-1,\eta)$, $\phi(1,\eta)$, $\phi(\xi,-1)$ y $\phi(\xi,1)$]. El problema que se presenta es interpolar una función $\phi(\xi,\eta)$ para obtener una superficie alisada que reproduzca exactamente los valores de contorno. Escribiendo

$$\begin{aligned} N^1(\xi) &= (1-\xi)/2 \qquad & N^2(\xi) &= (1+\xi)/2 \\ N^1(\eta) &= (1-\eta)/2 \qquad & N^2(\eta) &= (1+\eta)/2 \end{aligned} \tag{8.42}$$

para nuestras habituales funciones lineales de interpolación en una dimensión, advertimos que

$$P_\eta\phi \equiv N^2(\eta)\phi(\xi,1) + N^1(\eta)\phi(\xi,-1) \tag{8.43}$$

interpola linealmente las funciones impuestas en la dirección η, tal como se muestra en la Figura 8.16(b). Similarmente,

$$P_\xi\phi \equiv N^2(\xi)\phi(\eta,1) + N^1(\xi)\phi(\eta,-1) \tag{8.44}$$

interpola linealmente en la dirección ξ [Figura 8.16(c)]. Elaborando una tercera función que sea una interpolación lagrangiana de tipo lineal, como las que ya hemos encontrado con anterioridad [Figura 8.16(d)], o sea,

$$\begin{aligned} P_\xi P_\eta\phi \equiv\ & N^2(\xi)N^2(\eta)\phi(1,1) + N^2(\xi)N^1(\eta)\phi(1,-1) + \\ +\ & N^1(\xi)N^2\eta\phi(-1,1) + N^1(\xi)N^1(\eta)\phi(-1,-1) \end{aligned} \tag{8.45}$$

observamos que

$$\phi = P_\eta\phi + P_\xi\phi - P_\xi P_\eta\phi \tag{8.46}$$

es una superficie alisada que interpola exactamente las funciones de contorno.

La extensión a funciones de orden de combinación más elevado es casi evidente, y el método para transformar la región cuadrilateral $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ en cualquier forma arbitraria es obvio inmediatamente.

8.13 Dominios infinitos y elementos infinitos

8.13.1 *Introducción.* En muchos problemas de ingeniería y de la física se presentan dominios infinitos o semi-infinitos. Un típico ejemplo de mecánica estructural puede ser, por ejemplo, el de excavación tridimensional (o axisimétrica) mostrado en la Figura 8.17. Aquí el problema es determinar las deformaciones en un semi-espacio semi-infinito debido a la disminución de carga con la especificación de desplazamientos nulos en el infinito. Problemas

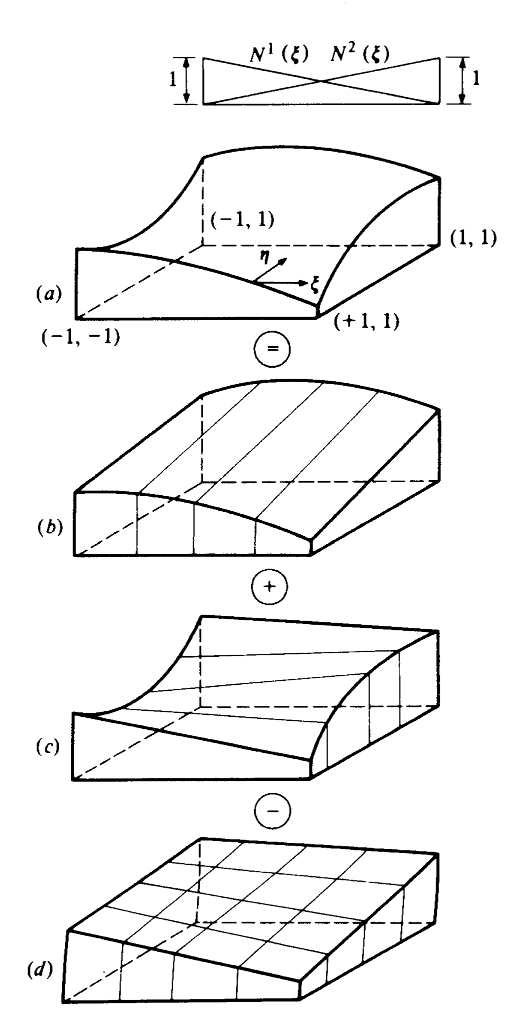


Figura 8.16 Etapas de construcción de una interpolación por composición (a), (b), (c) y (d).

similares abundan en electromagnetismo y en mecánica de fluidos, pero la situación ilustrada es típica. La cuestión es cómo se puede tratar tales problemas con un método de aproximación en que se usan elementos de tamaño decreciente en el proceso de modelización. La primera respuesta intuitiva es la ilustrada en la Figura 8.17, donde la condición de contorno en el infinito se impone en un contorno infinito situado a una *distancia grande* del objeto. Esto, sin embargo, presenta la cuestión de qué es una

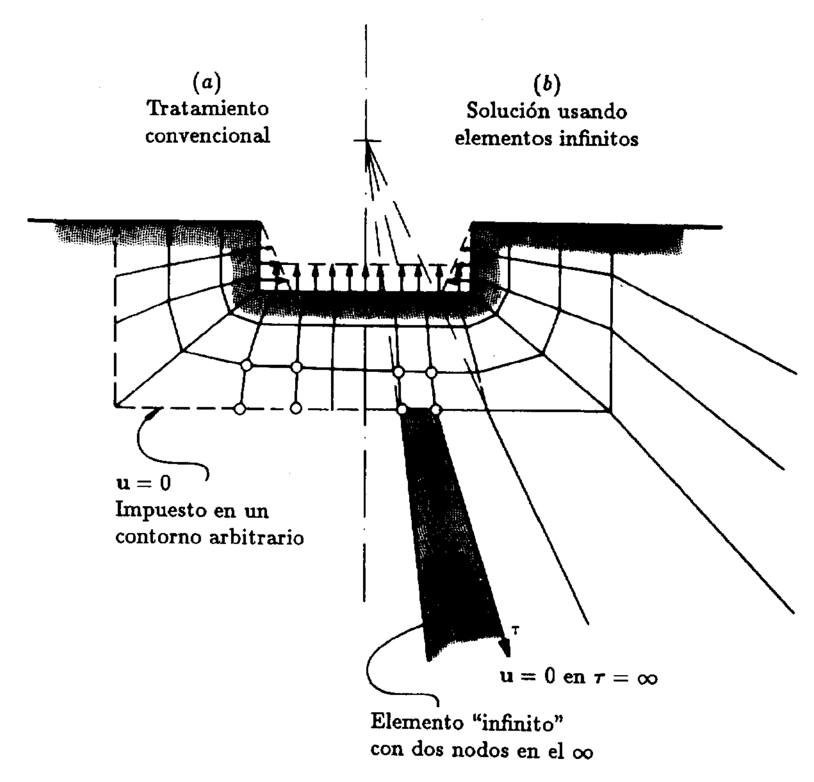


Figura 8.17 Un dominio semi-infinito. Deformaciones en una cimentación debidas a la disminución de carga después de una excavación. (*a*) Tratamiento convencional y (*b*) uso de elementos infinitos.

"distancia grande", y obviamente se pueden cometer errores substanciales si este contorno se sitúa suficientemente lejos. Por otro lado, llevar este contorno excesivamente lejos precisa la introducción de un gran número de elementos para modelar regiones de relativamente poco interés para el analista.

Se han propuesto muchos métodos para evitar tales dificultades "infinitas". En algunos se usa una sucesión de mallas anidadas y se deriva una relación de recurrencia.[26,27] En otros, una solución exacta de tipo contorno se usa acoplada al dominio de elementos finitos.[28,29] Sin embargo, sin duda, el tratamiento más efectivo y eficiente es el uso de "elementos infinitos",[30–33] desarrollados originalmente por Bettes. En este proceso los elementos finitos convencionales se acoplan a elementos del tipo mostrado en la Figura 8.17(*b*), que modelan de forma razonable el material que se extiende hasta el infinito. La forma de tales elementos y su tratamiento se consigue tranformándolos[32,33] en un cuadrado unidad (o en una línea en una dimensión, o en un cubo en

tres dimensiones). Sin embargo, es esencial que la secuencia de funciones de prueba introducidas en el dominio transformado sea tal que ésta sea completa y capaz de modelar el comportamiento real a medida que la distancia radial r aumenta. Resulta ventajoso que las funciones de forma puedan aproximar una secuencia de la forma decreciente

$$\frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^2} + \frac{C_3}{r^3} + \cdots \tag{8.47}$$

donde C_i son constantes arbitrarias y r es la distancia radial desde el "foco" del problema.

En la subsección siguiente se introduce una función de forma capaz de hacer justamente esto.

8.13.2 *La función de transformación.* La Figura 8.18 ilustra los principios de generación de la función de tranformación.

Comenzaremos con una transformación uni-dimensional a lo largo de la línea CPQ, que coincide con la dirección x. Considérese la siguiente función:

$$x = -\frac{\xi}{1-\xi}x_C + \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi}\right)x_Q \tag{8.48a}$$

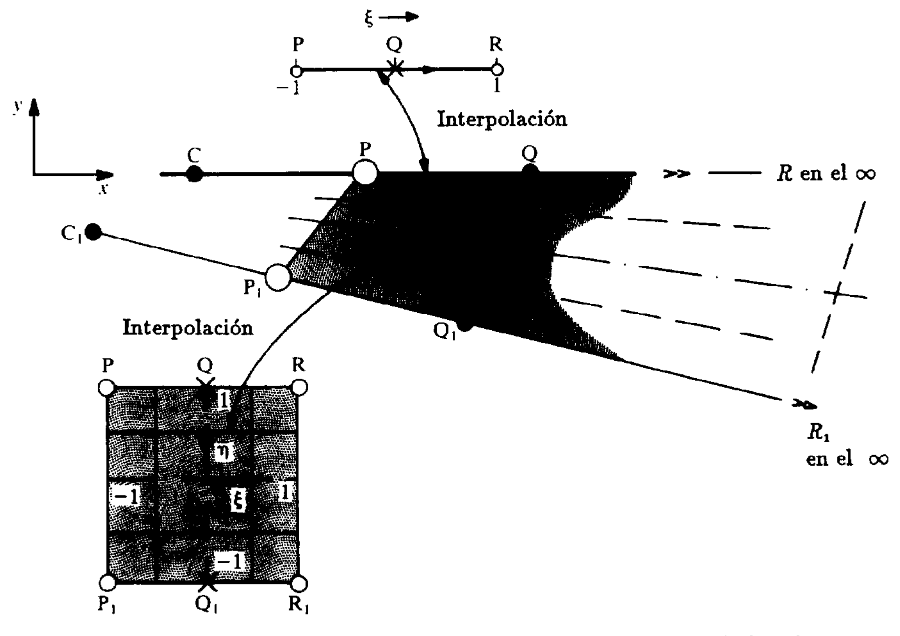


Figura 8.18 Línea infinita y transformación del elemento. Interpolación lineal en η.

y se observa inmediatamente que

$$\xi = 0 \quad \text{corresponde a} \quad x = x_Q$$

$$\xi = 1 \quad \text{corresponde a} \quad x = \infty$$

$$\xi = -1 \quad \text{corresponde a} \quad x = \frac{x_Q + x_C}{2} = x_P$$

donde x_P es un punto a media distancia entre Q y P.

Alternativamente la transformación se puede escribir directamente en función de las coordenadas de P y Q, o por simple eliminación de x_C. Esto da, usando la notación anterior

$$x = N_Q x_Q + N_P x_P = \left(1 + \frac{2\xi}{1-\xi}\right) x_Q - \frac{2\xi}{1-\xi} x_P \tag{8.48b}$$

Ambas formas dan una transformación que es independiente del origen de la coordenada x, ya que

$$N_Q + N_P = 1 = N_C + N_Q \tag{8.49}$$

El significado del punto C es, sin embargo, de gran importancia. Representa el centro en el que se origina la "perturbación" y, como se mostrará a continuación, permite que se cumpla el desarrollo de la forma de la Ec. (8.47) suponiendo que r se mide desde C. Por tanto

$$r = x - x_C \tag{8.50}$$

Si, por ejemplo, la función incógnita u se aproxima mediante una función polinómica usando, digamos, funciones de forma jerárquicas, y dando

$$u = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 + \cdots \tag{8.51}$$

se puede resolver fácilmente la Ec. (8.48a) para obtener

$$\xi = 1 - \frac{x_Q - x_C}{x - x_C} = 1 - \frac{x_Q - x_C}{r} \tag{8.52}$$

La substitución en la Ec. (8.51) muestra que se obtiene una serie de la forma dada por la Ec. (8.47), con la función lineal en ξ correspondiendo a los términos $1/r$, la cuadrática a $1/r^2$, etc.

Por tanto, en una dimensión se han cumplido los objetivos señalados y el elemento convergerá a medida que el grado de la serie polinómica, p, aumente. Ahora es necesario la generalización en dos y tres dimensiones. Es fácil ver que esto puede conseguirse por simples productos de la transformación unidimensional infinita con una función de forma de tipo "estándar" en las direcciones de η (y ζ), de la forma indicada en la Figura 8.18.

Primero, se generaliza la interpolación de las Ecs. (8.48) para cualquier línea recta en el espacio x, y, z y se escribe (para una línea tal como la C_1, P_1, Q_1 en la Figura 8.18):

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\xi}{1-\xi} x_{C_1} + \left(1 + \frac{\xi}{1+\xi}\right) x_{Q_1} \\ y &= -\frac{\xi}{1-\xi} y_{C_1} + \left(1 + \frac{\xi}{1+\xi}\right) y_{Q_1} \\ z &= -\frac{\xi}{1-\xi} z_{C_1} + \left(1 + \frac{\xi}{1+\xi}\right) z_{Q_1} \qquad \text{(en tres dimensiones)} \end{aligned} \tag{8.53}$$

Segundo, se completa la interpolación y se transforma todo el dominio $\xi\eta(\zeta)$ añadiendo una interpolación "estándar" en las direcciones $\eta(\zeta)$. Por tanto, para la interpolación lineal mostrada se puede escribir para el elemento $PP_1QQ_1RR_1$ de la Figura 8.18,

$$x = N_1(\eta)\left[-\frac{\xi}{1-\xi} x_C \left(1 + \frac{\xi}{1-\xi}\right) x_Q\right] + N_0(\eta)\left(-\frac{\xi}{1-\xi} x_{C_1} + \frac{\xi}{1-\xi} x_{Q_1}\right), \text{ etc.} \tag{8.54}$$

con

$$N_1(\eta) = \frac{1+\eta}{2} \qquad N_0(\eta) = \frac{1-\eta}{2}$$

y tranformar estos puntos de la manera mostrada.

De forma similar se pueden usar interpolaciones cuadráticas y transformar un elemento como el mostrado en la Figura 8.19 usando funciones cuadráticas en η.

Por tanto, es una cuestión sencilla crear elementos infinitos y unir éstos a una malla de elementos estándar como se muestra en la Figura 8.17(b). El lector observará que en la generación de las propiedaddes de tales elementos sólo la matriz jacobiano de transformación es diferente de las formas estándar, por lo que sólo esto debe ser modificado en programas convencionales.

El "origen" o "polo" de coordenadas C puede ser fijado arbitrariamente por cada línea radial, como muestra la Figura 8.18. Esto se hace con conocimiento de la solución física esperada.

En la Figura 8.20 se muestra una solución al problema de Boussineq (carga puntual en un semi-espacio elástico). Se comparan los resultados usando desplazamientos prescritos o elementos infinitos, y se observan diferencias grandes en la solución. En este ejemplo se toma la carga puntual como polo de cada elemento por razones obvias.

La Figura 8.21 muestra cómo elementos infinitos similares (de tipo lineal) pueden dar excelentes resultados, incluso cuando se combinan con muy pocos

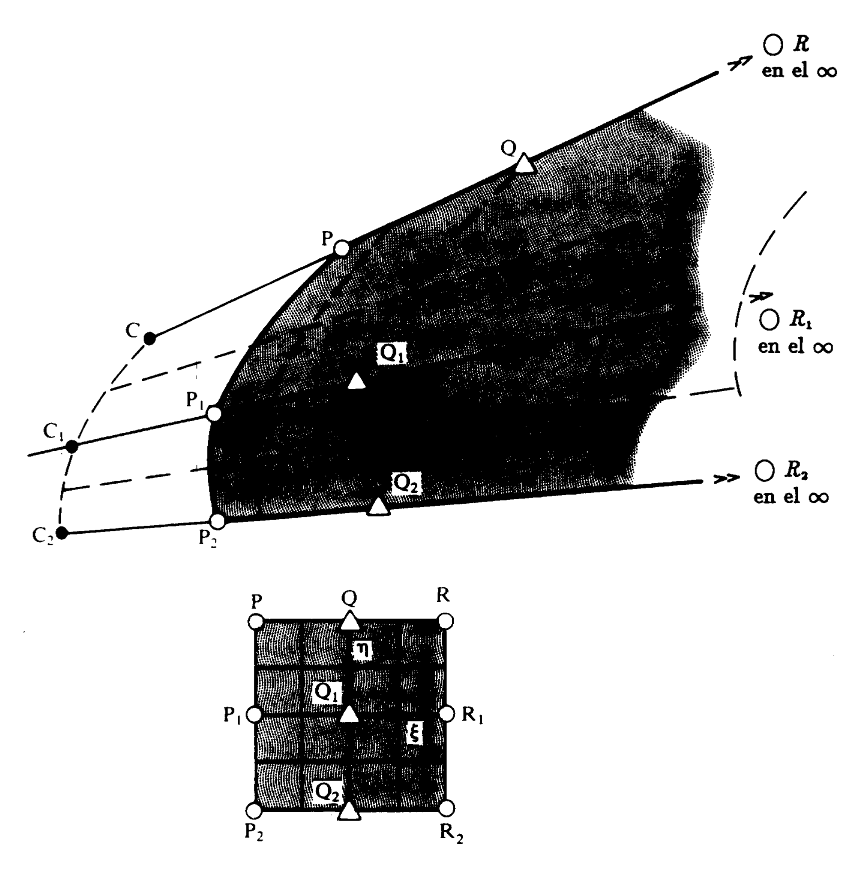


Figura 8.19 Tranformación de elemento infinito. Interpolación cuadrática en η.

elementos estándar. En este ejemplo se usa una solución de la ecuación de Laplace para el flujo de un fluido irrotacional (viz. Capítulo 10), y los polos de los elementos infinitos se eligen en puntos arbitrarios de la línea central del ala.

Para concluir esta sección destacaremos que el uso de los elementos infinitos (y, de hecho, el de cualquier otro elemento finito) debe estar respaldado por un conocimiento analítico, y que no pueden esperarse "milagros". Por tanto, el usuario no debe esperar, por ejemplo, resultados excelentes tales como los mostrados en la Figura 8.20 para los desplazamientos de un problema de elasticidad plana. Es "bien sabido" que en este caso los desplazamientos para una carga arbitraria que no sea auto-equilibrada son infinitos, y los números obtenidos en los cálculos no lo serán.

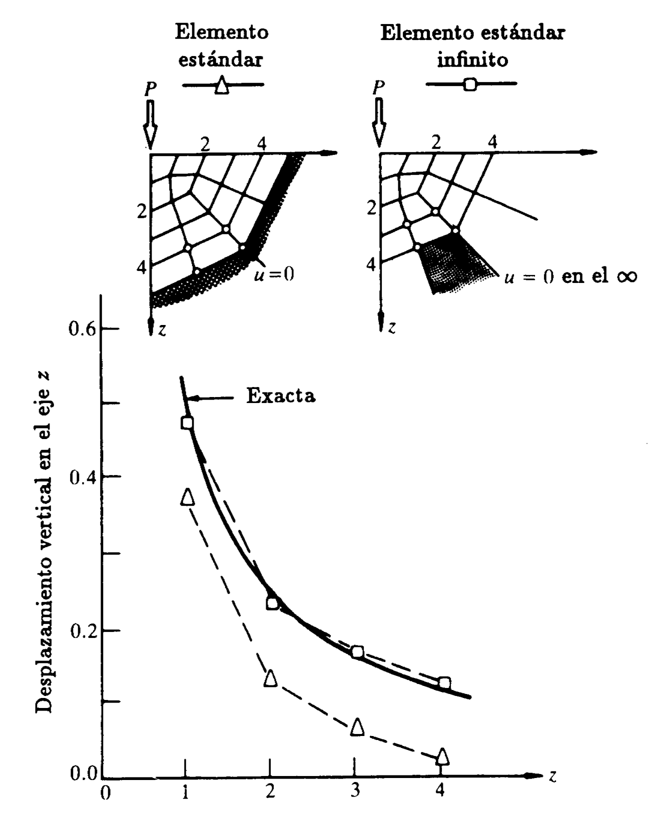


Figura 8.20 Carga puntual en un semi-espacio infinito (problema de Boussinesq). Elementos lineales estándar y elementos infinitos ($E = 1, \nu = 0.1$, $p = 1$).

8.14 Elementos singulares por transformación para mecánica de fractura, etc.

En el estudio de la mecánica de fractura a menudo se centra el interés en el punto singular, donde cantidades tales como las tensiones se vuelven (matemáticamente, pero no físicamente) infinitas. Cerca de tales singularidades las aproximaciones usuales de elementos finitos basadas en polinomios se comportan mal, y a menudo se han hecho esfuerzos para incluir funciones especiales en un elemento que modelen la función singular que se conoce analíticamente. Las referencias [34] a [69] proporcionan una extensa revisión bibliográfica del problema y de su solución mediante técnicas de elementos finitos. Una alternativa a la introducción de funciones especiales dentro de un elemento — que frecuentemente plantea problemas

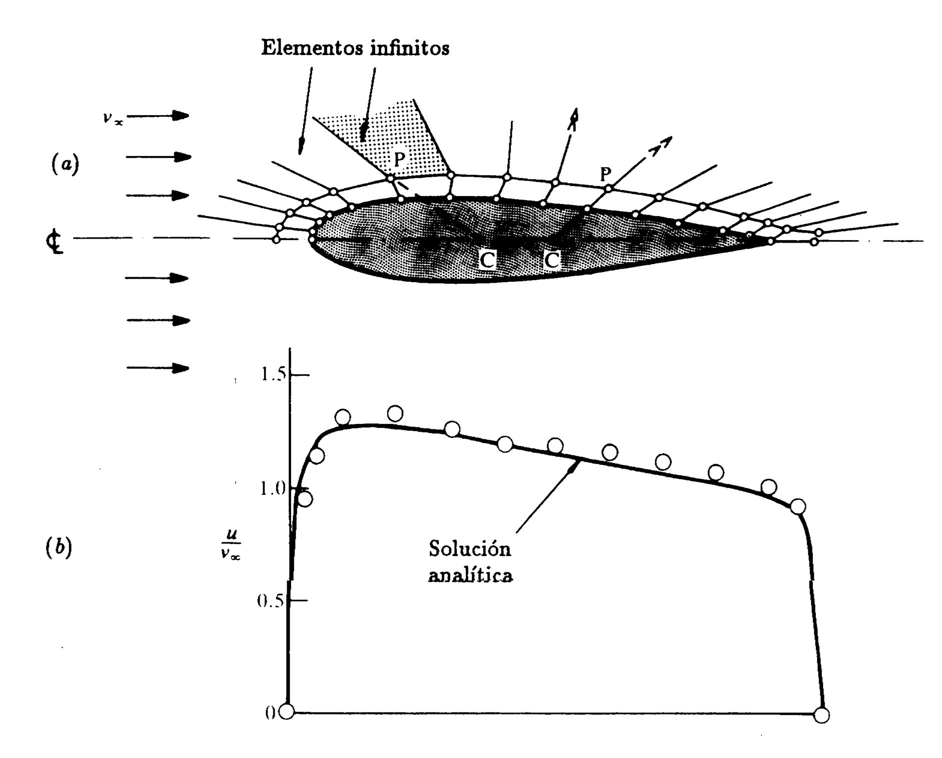


Figura 8.21 Flujo irrotacional alrededor de la sección de ala NACA0018.[29] (a) Malla de elementos isoparamétricos bilineales y elementos infinitos. (b) Resultados para la velocidad paralela a la superficie. Calculados y —analíticos.

de continuidad con los elementos estándar adyacentes — es el uso de técnicas de transformación alternativas.

Un elemento de este tipo, mostrado en la Figura 8.22(a), fue introducido casi simultáneamente por Henshell y Shaw[65] y Barsoum[66,67] para cuadriláteros, desplazando simplemente el nodo central de los elementos isoparaméricos cuadráticos a una distancia de un cuarto de la longitud del lado.

Se puede demostrar (y se deja este ejercicio para el lector curioso) que a lo largo de los lados del elemento las derivadas $\frac{\partial u}{\partial x}$ (o deformaciones) varían según $1/\sqrt{r}$, donde r es la distancia desde el nodo esquina en el que aparece la singularidad. Aunque se pueden obtener buenos resultados con tales elementos, la singularidad no queda, de hecho, bien representada en

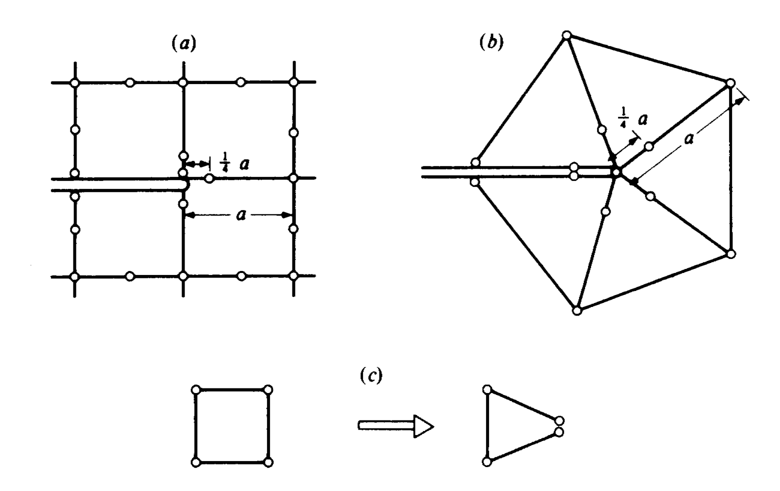


Figura 8.22 Elementos singulares a partir de elementos isoparamétricos degenerados (a), (b) y (c).

líneas que no estén sobre los lados del elemento. Un desarrollo sugerido por Hibbitt[68] consigue mejores resutados usando elementos triangulares de segundo orden [Figura 8.22(b)].

Realmente, el uso de elementos isoparamétaricos distorsionados o degenerados no se reduce a las singularidades elásticas. Rice[56] demuestra que en el caso de plasticidad se desarrolla una singularidad en la deformación de cortante del tipo $1/r$ y Levi *et al.*[49] usan un cuadrilátero lineal isoparamétrico para generar una singularidad por el simple método de colapsar dos nodos, pero tratando sus desplazamientos independientemente. Una variante de esto se debe a Rice y Tracey.[42]

Los elementos que se acaban de describir son evidentemente simples de implementar sin cambio alguno en un programa estándar de elementos finitos.

8.15 Ventajas computacionales de los elementos finitos integrados numéricamente[70]

Una ventaja considerable, posible con elementos finitos integrados numéricamente, es la versatilidad que puede conseguirse con un programa de computador único.

Se observa que para un *tipo de problemas dado*, las matrices generales tienen siempre la misma forma [ver el ejemplo de la Ec. (8.8)] cuando se expresan mediante la función de forma y sus derivadas.

Para proceder a la evaluación de las propiedades del elemento es

necesario: primero, *definir la función de forma* y sus derivadas; y segundo, *especificar el orden de integración.*

El cálculo de las propiedades de los elementos se compone, por tanto, de tres partes distintas, tal como se muestra en la Figura 8.23. Para un *tipo de problema dado*, sólo es necesario cambiar la definición de las funciones de forma para poder usar un número variado de elementos.

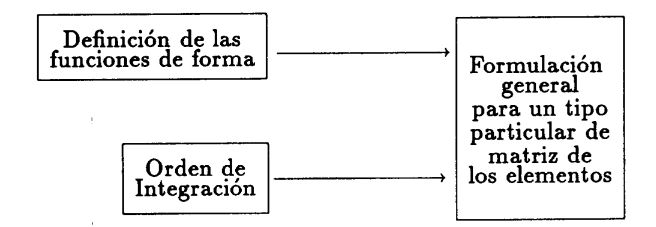


Figura 8.23 Esquema de los cálculos para efectuar numéricamente las integrales del elemento.

Inversamente, podrán emplearse las mismas rutinas de las *funciones de forma* en muchas clases diferentes de problemas, tal como se expresan en el Capítulo 15.

Se puede conseguir así con facilidad el uso de diferentes elementos para comprobar la eficacia de un nuevo elemento en un contexto dado, o la ampliación de los programas al análisis de nuevas situaciones, evitando cálculos algebraicos excesivos (con sus inherentes probabilidades de error).

El ordenador queda situado así en el sitio que le corresponde, o sea, en el de servidor obediente capaz de ahorrarnos trabajos rutinarios.

La mayor ventaja práctica del empleo de rutinas generales para las funciones de forma es que sus errores pueden ser comprobados mediante un programa sencillo, con el test de la parcela (véase el Capítulo 11) jugando un papel crucial.

La incorporación a un sistema como éste de elementos sencillos integrables exactamente no repercute en gran manera, puesto que los tiempos empleados en la integración exacta y en la numérica son, en estos casos, casi idénticos.

8.16 Algunos ejemplos prácticos de análisis bidimensional de tensiones[71–77]

En los ejemplos de revolución siguientes se muestran algunas de las posibilidades de análisis bidimensional que ofrecen los elementos curvilíneos.

8.16.1 *Disco giratorio* (Figura 8.24). En este caso sólo son necesarios 18 elementos para obtener una solución adecuada. Es de interés observar que

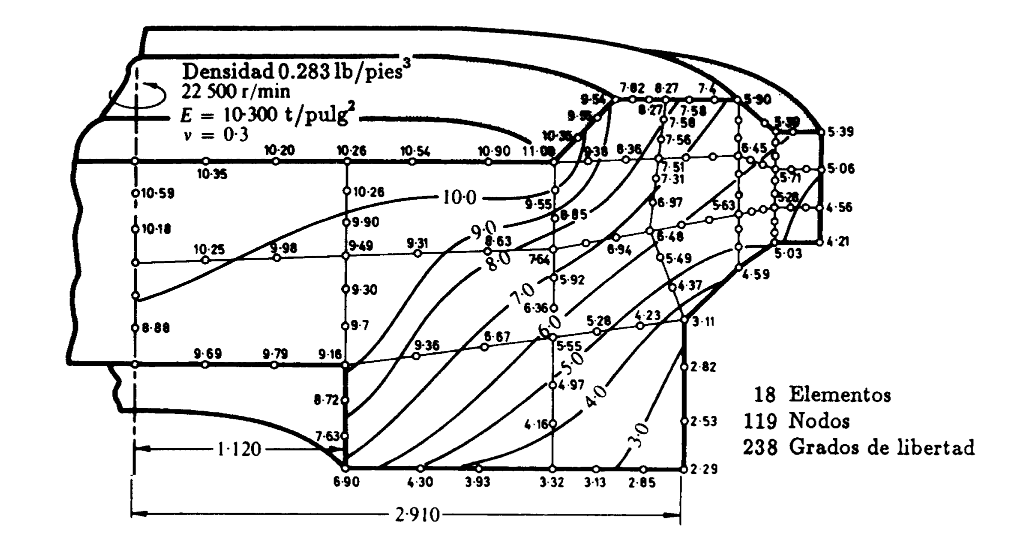


Figura 8.24 Disco giratorio– analizado con elementos cúbicos.

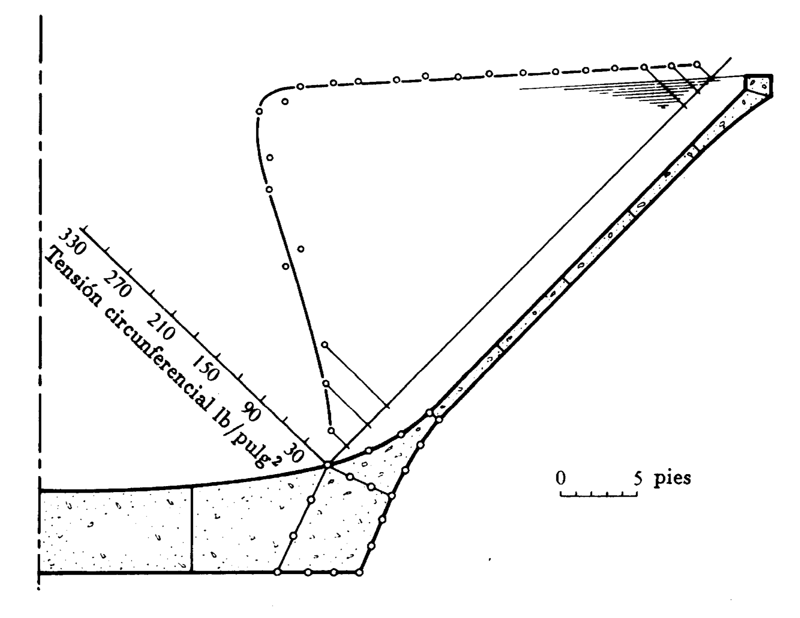


Figura 8.25 Depósito de agua cónico.

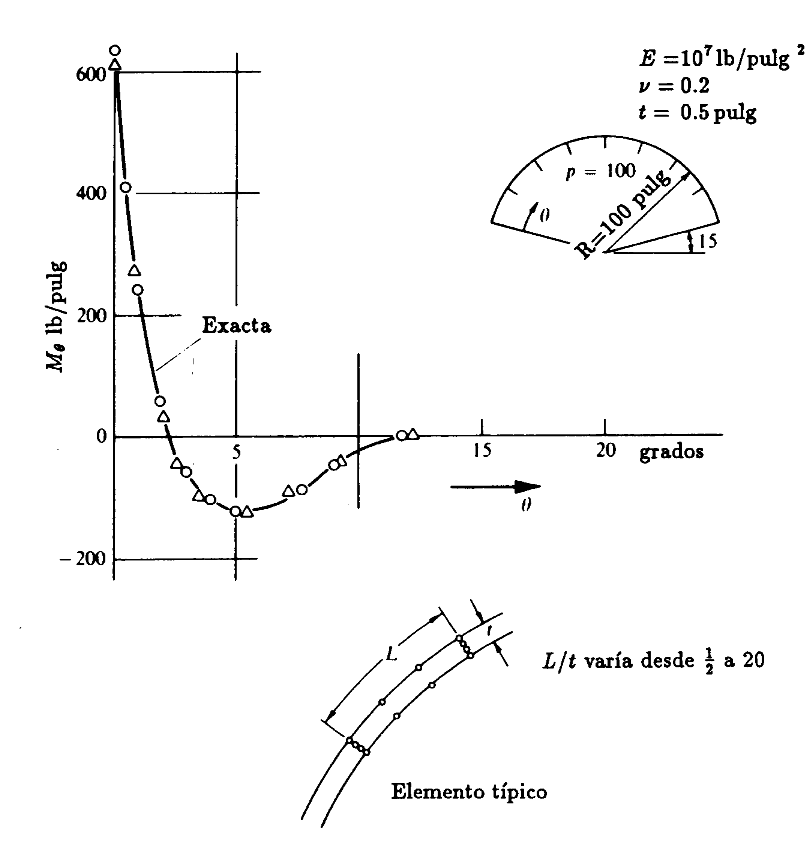


Figura 8.26 Lámina semiesférica delgada con bordes empotrados. Solución con 15 y 24 elementos cúbicos.

todos los nodos laterales de los elementos cúbicos se generan dentro de un programa y no necesitan ser especificados.

8.16.2 *Depósito de agua cónico* (Figura 8.25). En este problema vuelven a utilizarse elementos cúbicos. Vale la pena advertir que usando un solo elemento para definir el espesor se representan adecuadamente los efectos de flexión en ambas zonas, gruesa y delgada, del recipiente. Como ya hemos visto, mediante elementos triangulares sencillos hubieran sido necesarias varias capas de elementos para obtener una solución adecuada.

8.16.3 *Cúpula semiesférica* (Figura 8.26). Las posibilidades de análisis de láminas apuntadas en el ejemplo anterior se confirman aún más aquí para mostrar cómo un número limitado de elementos puede resolver

adecuadamente un problema de láminas delgadas utilizando precisamente el mismo programa. Este tipo de solución puede mejorarse todavía desde el punto de vista económico, haciendo uso de la conocida hipótesis de la teoría de láminas que implica que los desplazamientos varían linealmente a través del espesor. Con esto puede reducirse el número de grados de libertad. En el segundo volumen de este libro se tratarán métodos de esta clase.

8.17 Análisis tridimensional de tensiones

En el análisis tridimensional, como ya se sugirió en el Capítulo 5, los elementos más complicados presentan ventajas económicas considerables. Se muestran aquí algunos ejemplos representativos en los que se usan casi exclusivamente elementos serendípitos cuadráticos. En todos los problemas se ha utililzado la integración numérica tomando *tres* puntos de Gauss en cada dirección.

8.17.1 *Esfera giratoria* (Figura 8.27).[6] Se comparan en este ejemplo las tensiones debidas a la acción centrífuga con sus valores exactos, siendo quizás una buena comprobación de la eficacia de los elementos fuertemente distorsionados. En este caso se emplean siete elementos y los resultados obtenidos exhiben una concordancia razonable con las tensiones exactas.

8.17.2 *Presa bóveda en un valle rígido.* Este problema, quizás algo irreal desde un punto de vista técnico, fue tema de un estudio llevado a cabo por un comité de la Institution of Civil Engineers y proporcionó un excelente ensayo de un estudio de la convergencia en análisis tridimensional. En la Figura 8.28 se muestran dos subdivisiones en elementos cuadráticos y dos en elementos cúbicos. La convergencia de los desplazamientos de la línea media se muestra en la Figura 8.29, donde se observa que pueden obtenerse resultados bastante precisos, incluso con un solo elemento.

La comparación de tensiones que aparece en la Figura 8.30 es sumamente interesante, aunque presenta una mayor "oscilación" cuando la subdivisión es más grosera. Los resultados de la subdivisión más tupida se pueden tomar como "exactos", como se comprueba mediante modelos y otros métodos alternativos de análisis.

Los problemas anteriores ilustran la aplicabilidad general y la precisión alcanzables. Se incluyen a continuación dos ejemplos más representativos de situaciones reales.

8.17.3 *Vasija de presión* (Figura 8.31). *Análisis de un problema de biomecánica* (Figura 8.32). Ambos muestran un número de subdivisiones suficiente para obtener resultados técnicamente aceptables. La vasija de presión, similar a la mencionada en el Capítulo 5, Figura 5.7, muestra cómo puede reducirse considerablemente el número de grados de libertad cuando se emplean elementos más complejos.

El ejemplo de la Figura 8.32 muestra una perspectiva de los elementos

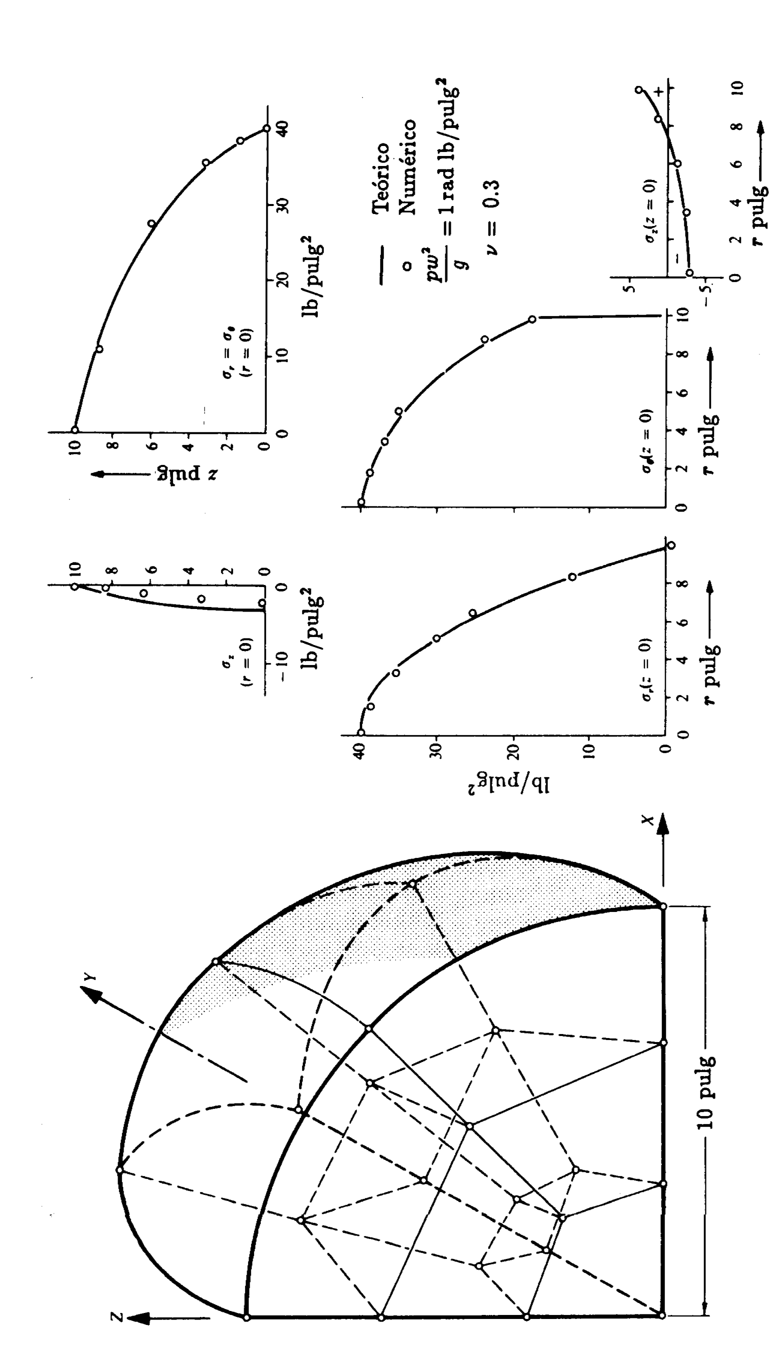


Figura 8.27 Una esfera giratoria como problema tridimensional. Siete elementos cuadráticos. Tensiones a lo largo de $z = 0$ y $r = 0$.

Figura 8.28 Presa bóveda en valle rígido – diferentes subdivisiones en elementos.

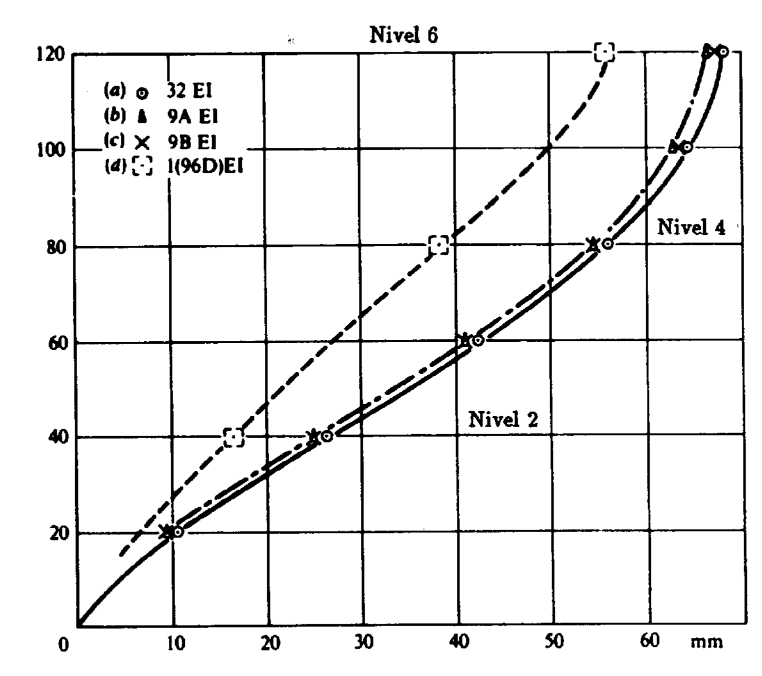


Figura 8.29 Presa bóveda en valle rígido – desplazamientos de la sección media.

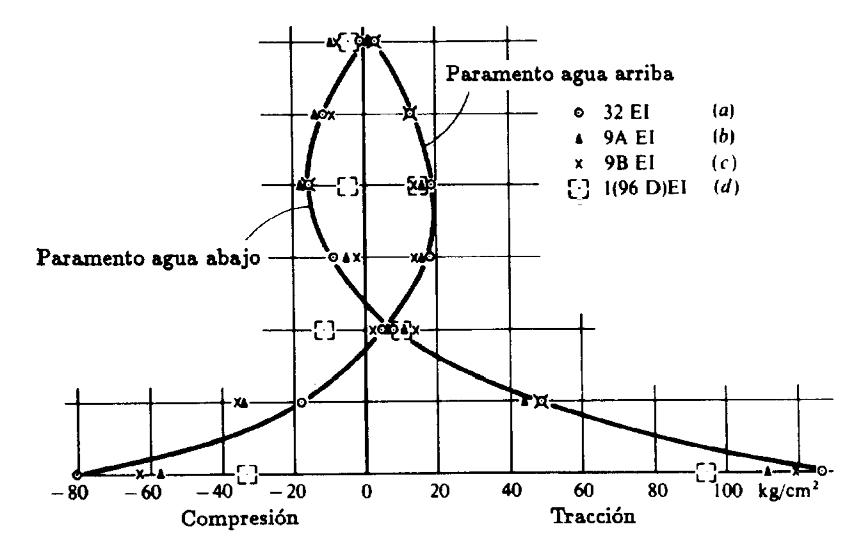
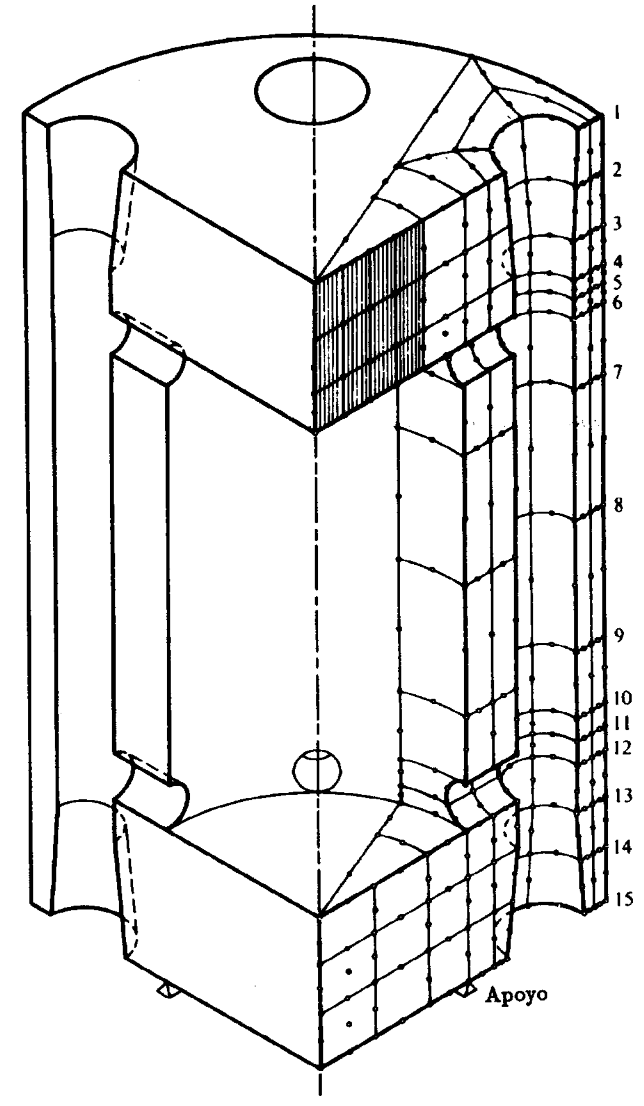


Figura 8.30 Presa bóveda en valle rígido – tensiones verticales en la sección media.



No. total de elementos = 96
No. total de nodos = 707
No. total de grados de libertad = 2121

Figura 8.31 Análisis tridimensional de una vasija de presión.

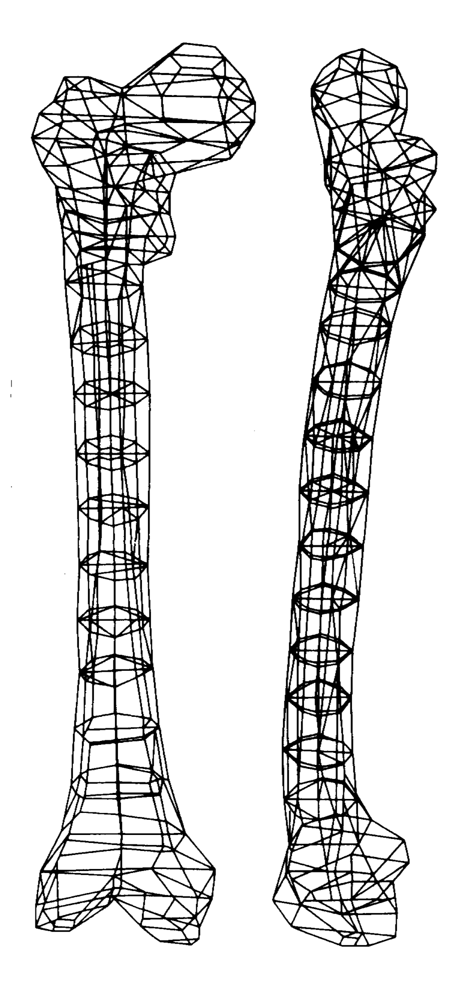


Figura 8.32 Un problema de biomecánica. Solamente se representan los elementos lineales; se ha omitido la curvatura de los elemêntos. Nótese la forma degenerada de los elementos.

empleados, obtenida directamente de los datos del análisis sobre un trazador automático. Estos gráficos son muy útiles no sólo para la visualización del problema, sino además porque constituyen parte esencial del *proceso de comprobación de datos*, ya que cualquier error geométrico de bulto puede descubrirse con facilidad. Asimismo se comprueba automáticamente la "conectividad" de todos los puntos especificados.

La importancia de evitar errores en la entrada de datos en problemas

tridimensionales complicados es obvia, considerando su gran gasto de tiempo de computador. Éste, y por supuesto otros métodos de comprobación,[76] deben formar parte esencial de todo sistema de cálculo.

8.18 Simetría y repetibilidad

En la mayoría de los problemas expuestos se ha hecho uso de la ventaja que proporciona la simetría de las fuerzas actuantes, o de la geometría, al imponer las condiciones de contorno, reduciendo así el problema completo a proporciones manejables. El empleo de condiciones de simetría es tan conocido para ingenieros y físicos que no es preciso plantearlas explícitamente. Menos conocido es, sin embargo, el uso de la *repetibilidad*[78] cuando la misma carga y la misma estructura se repiten continuamente, tal como se muestra en la Figura 8.33 para una cáscada de álabes infinita. Es evidente que aquí cada una de las porciones que se representan sombreadas se comporta de manera idéntica a la siguiente y, por tanto, se pueden identificar fácilmente funciones como velocidades y desplazamientos en los puntos correspondientes de AA y BB, es decir,

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_{II}$$

Esta identificación se lleva a cabo directamente en un programa de computador.

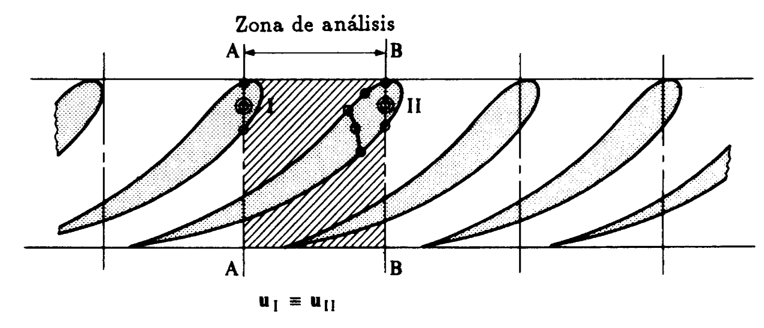


Figura 8.33 Porciones repetidas y zona de análisis (en sombreado).

En problemas relativos a turbinas o a rodetes de bombas se da con frecuencia una repetibilidad similar en coordenadas polares. En la Figura 8.34 se muestra un análisis tridimensional típico de una porción repetida de este tipo.

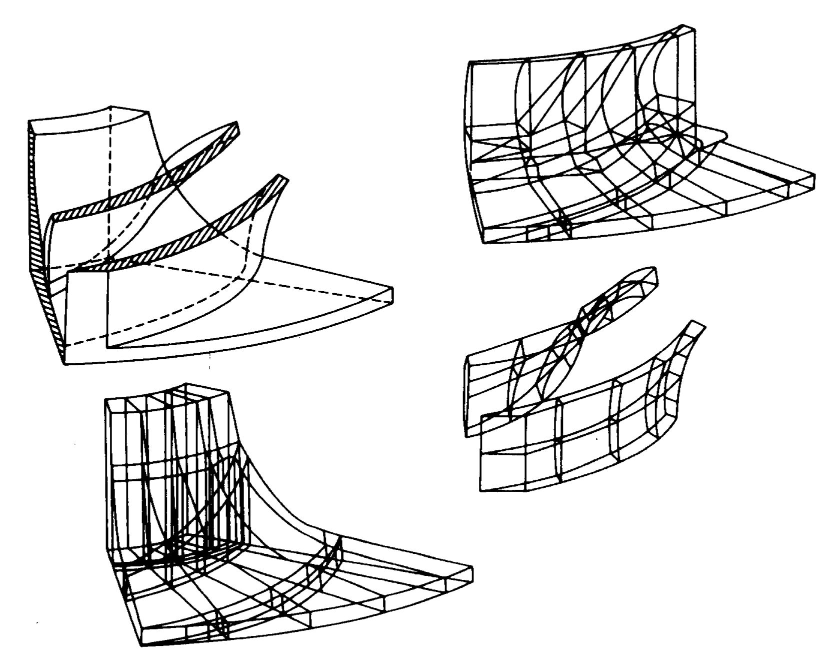


Figura 8.34 Sector repetitivo en el análisis de un rodete de bomba.

Referencias

1. I.C. TAIG, *Structural analysis by the matrix displacement method*, Engl. Electric Aviation Report No. S017, 1961.
2. B.M. IRONS, "Numerical integration applied to finite element methods", *Conf. Use of Digital Computers in Struct. Eng.* Univ. of Newcastle, 1966.
3. B.M. IRONS, "Engineering application of numerical integration in stiffness method", *JAIAA*, **14**, pp. 2035–7 , 1966.
4. S.A. COONS, *Surfaces for computer aided design of space form*, MIT. Project MAC, MAC-TR-41, 1967.
5. A.R. FORREST, *Curves and Surfaces for Computer Aided Design*, Computer Aided Design Group, Cambridge, England, 1968.
6. G. STRANG y G.J. FIX, *An Analysis of the Finite Element Method*, pp. 156-63, Prentice-Hall, 1973.
7. W.B. JORDAN, *The plane isoparametric structural element*, General Elec. Co., Report KAPL-M-7112, Schenectady, New York, 1970.
8. F.D. MURNAGHAN, *Finite Deformation of an Elastic Solid*, Wiley, 1951.
9. E.L. WACHSPRESS, "High order curved finite elements", *Int. J. Num. Eng.*, **17**, 735–45,1981.
10. Z. KOPAL, *Numerical Analysis*, 2nd. ed., Chapman & Hall, 1961.

11. B.M. IRONS, "Quadrature rules for brick based finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **3**, 1971.
12. T.K. HELLEN, "Effective quadrature rules for quadratic solid isoparametric finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **4**, pp. 597–600, 1972.
13. RADAU, *Journ de Math.*, **3**, p. 283, 1880.
14. R.G. ANDERSON, B.M. IRONS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Vibration and stability of plates using finite elements", *Int. J. Solids Struct.*, **4**, pp. 1031–55, 1968.
15. P.C. HAMMER, O.P. MARLOWE y A.H. STROUD, "Numerical integration over simplexes and cones", *Math. Tables Aids Comp.*, **10**, pp. 130–7, 1956.
16. C.A. FELIPPA, *Refined finite element analysis of linear and non-linear two-dimensional structures*, Structures Materials Research Report, No. 66-22, Univ. of California, Berkeley, Oct. 1966.
17. G.R. COWPER, "Gaussian quadrature formulas for triangles", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **7**, pp. 405–8, 1973.
18. G.J. FIX, "On the effect of quadrature errors in the finite element method", *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design*, (eds. J.T. Oden, R.W. Clough and Y. Yamamoto), pp. 55–68, Univ. of Alabama Press, 1972. (Ver tamb. *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Differential Equations* (ed. A.K. Aziz), pp. 525–56, Academic Press, 1972.)
19. I. FRIED, "Accuracy and condition of curved (isoparametric) finite elements", *J. Sound Vibration*, **31**, pp. 345–55, 1973.
20. I. FRIED, "Numerical integration in the finite element method", *Comp. Struc.*, **4**, pp. 921–32, 1974.
21. M. ZLAMAL, "Curved elements in the finite element method", *SIAM J. Num. Anal.*, **11**, pp. 347–62, 1974.
22. O.C. ZIENKIEWICZ y D.V. PHILIPS, "An automatic mesh generation scheme for plane and curved element domains", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **3**, pp. 519–28, 1971.
23. W.J. GORDON, "Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation", *SIAM J. Num. Anal.*, **8**, pp. 158–77, 1971.
24. W.J. GORDON y C.A. HALL, "Construction of curvilinear co-ordinate systems and application to mesh generation", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **7**, pp. 461–77, 1973.
25. W.J. GORDON y C.A. HALL, "Transfinite element methods blending-function interpolation over arbitrary curved element domains", *Numer. Math.*, **21**, pp. 109–29, 1973.
26. R.W. THATCHER, "On the finite element method for unbounded regions ", *SIAM J. Numerical Analysis*, **15**, 3, pp. 466–76, Juio 1978.
27. P. SILVESTER, D.A. LOWTHER, C.J. CARPENTER y E.A. WYATT, "Exterior finite elements for 2-dimensional field problems with open boundaries", *Proc. IEE*, **124**, No. 12, Diciembre 1977.
28. S.F. SHEN, "An aerodynamics looks at the finite element method", in *Finite Elements in Fluids*, (eds R.H Gallagher *et al.*), Vol. **2**, pp. 179–204, Wiley, 1975.
29. O.C. ZIENKIEWICZ, D.WA. KELLY, y P. BETTES, "The coupling of the finite element and boundary solution procedures", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**,

355–75. 1977.
30. P. BETTESS, "Infinite elements". *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**, 53–64, 1977.
31. P. BETTESS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Diffraction and refraction off surface waves using finite and infinite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**, 1271–90, 1977.
32. C. BEER y J.L. MEEK, "Infinite domain elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **17**, 43–52, 1981.
33. O.C. ZIENKIEWICZ, C. EMSON y P. BETTES, "A novel boundary infinite element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **19**, 393–404, 1983.
34. G.R. IRWIN, "Fracture mechanics", in *Structural Mechanics, Proc. 1st Symp. on Naval Structural Mechanics*, (eds J.N. Goodier y N.J. Hoff), pp. 557–94, Pergamon Press, 1960.
35. G.C. SIH (ed.) *Mechanics of Fracture— Vol. I: Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, Noordhoff, 1973.
36. Y. TADA, P.C. PARIS y G.R. IRWIN, "*The Stress Analysis of Cracks Handbook*", del Research Corp., Hellertown, Penn., 1973.
37. J.F. KNOTT, *Fundamentals of Fracture Mechanics*, Butterworths, 1973.
38. R.H. GALLAGHER, "Survey and evaluation of the finite element method in fracture mechanics analysis", in *Proc. 1st Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Vol. **6**, Part I, pp. 637–53, Berlin, 1971.
39. N. LEVY, P.V. MARÇAL y J.R. RICE, "Progress in three-dimensional elastic-plastic stress analysis for fracture mechanics", *Nucl. Eng. Des.*,**17**, 64–75, 1971.
40. J.J. OGLESBY y O. LOMACKY, "An evaluation of finite elemt methods for the computation of elastic stress intensity factors", *J. Eng. Ind.*, **95**, 177–83, 1973.
41. T.H.H. PIAN, "Crack elements", in *Proc. World Congress on Finite Element Methods in Structural Mechanics*, Vol. **1**, pp. F1–F39, Bournemouth, 1975.
42. J.R. RICE y D.M. TRACEY, "Computational fracture mechanics", in *Numerical and Computer Methods in Structured Mechanics* (eds S.J. Fenves *et al.*), pp. 555–624. Academic Press, 1973.
43. E.F. RYBICKI y S.E. BENZLEY (eds), *Computational Fracture mechanics*, ASME Special Publication, 1975.
44. A.A. GRIFFITHS, "The phenomena of flow and rupture in solids", *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)* **A221**, 163–98. Oct. 1920.
45. B. AAMODT y P.G. BERGAN, "Propagation of elliptical surface cracks and nonlinear fracture mechanics by the finite element method", in *5th Conf. on Dimensioning ans Strength Calculations*, Budapest, Oct. 1974.
46. P.G. BERGAN y B. AAMONDT, "Finite element analysis of crack propagation in three-dimensional solids under cyclic loading"in *Proc. 2nd Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Vol. III, Part G-H, 1974.
47. J.L SWEDLOW, "Elasto-plastic cracked plates in plane strain", *Int. J. Fract. Mech.*, **5**, 33–44, Marzo 1969.
48. T. YOKOBORI y A. KAMEL, "The size of the plastic zone at tip of a crack in plane strain state by the finite element method", *Int. J Fract. Mech.*, **9**, 98–100, 1973.
49. N. LEVY, P.V. MARÇAL, W.J. OSTERGREN, y J.R. RICE, "Small scale yielding near a crack in plane strain: a finite element analysis", *Int. J. Fract. Mech.*, **7**, 143–57, 1967.
50. J.R. DIXON y L.P. POOK, "Stress intensity factors calculated generally by the finite element technique", *Nature*, **224**, 166, 1969.
51. J.R. DIXON y J. STRANNIGAN, "Determination of energy release rates and stress-intensity factors by the finite element method", *J Strain Analysis*, **7**, 125–31. 1972.
52. V.B. WATWOOD, "Finite element method for prediction of crack behavior", *Nucl. Eng. Des.*, **II** (No. 2), 323–32, Marzo, 1970.
53. D.F. MOWBRAY, "A note on the finite element method in linear fracture mechanics", *Eng. Fract. Mech.*, **2**, 173–6, 1970.
54. D.M. PARKS, "A stiffness derivative finite element technique for determination of elastic crack tip stress intensity factors", *Int. J, Fract.*, **10**, 487–502, 1974.
55. T.K. HELLEN. 'On the method of virtual crack extensions", *Int. J. num. Meth. Eng.*, **9** (No. 1), 187–208, 1975.
56. J.R. RICE. "A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks", *J. Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, **35**, 379–86, 1968.
57. P. TONG y T.H.H. PIAN. "On the convergence of the finite element method for problems with singularity", *Int. J. Solids Struct.* **9**, *313–21, 1972.*
58. T.A. CRUSE y W. VANBUREN, "Three dimensional elastic stress analysis of fracture specimen with edge crack", *Int. J. Fract. Mech.*, **7**, 1–15, 1971.
59. E. BYSKOV, "The calculation of stress intensity factors using the finite element method with cracked elements", *Int. J. Fract. Mech.*, **6**, 159–67, 1970.
60. P.F. WALSH, "Numerical analysis in orthotropic linea fracture mechanics" *Inst. Eng. Australia, Civ. Eng., Trans.*, **15**, 115–19, 1973.
61. P.F. WALSH, "The computation of stress intensity factors by a special finite element technique", *Int. J. Solids Struct.*, **7**, 1333–42, Oct. 1971.
62. A.K. RAO, I.S. RAJU y A. MURTHY KRISHNA, "A powerful hybrid method in finite element analysis", *Int. J. Num. Meath. Eng.*, **3**, 389–403, 1971.
63. W.S. BLACKBURN, "Calculation of stress intensity factors at crack tips using special finite elements", in *The Mathematics of Finite Elements* (ed. J.R. Whiteman), pp. 327–36, Academic Press, 1973.
64. D.M TRACEY, "Finite elements for detemination of crack tip elastic stress intensity factors", *Eng Fract. Mecha.*,**3**, 255–65, 1971.
65. R.D. HENSHELL y K.G. SHAW, "Crack tip elements are unncessary", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **9**, 495–509, 1975.
66. R.S. BARSOUM, "On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **10**, 25–38, 1976.
67. R.S. BARSOUM, "Triangular quater point elements as elastic and perfectly plastic crack tip elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**, 85–98, 1977.
68. H.D HIBBIT, "Some properties of singular isoparametric elements, *Int. J. Num. Meth. eng.*, **11**, 180–4, 1977.
69. S.E. BENZLEY, "Representation of singularities with isoparametric finite elements", *Int. J. Num Meth. Eng.*, **8** (No. 3), 537–45, 1974.
70. B.M. IRONS, "Economical computer techniques for numerically integrated finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **1**, pp. 201–3, 1969.
71. O.C. ZIENKIEWICZ, B.M. IRONS, J.G. ERGATOUDIS, S. AHMAD y F.C.

SCOTT, "Isoparametric and associated element families for two and three dimensional analysis", in *Proc. Course on Finite Element Methods in Stress Analysis*, (eds. I. Holand and K. Bell), Trondheim Tech. University, 1969.
72. B.M. IRONS y O.C. ZIENKIEWICZ, "The isoparametric finite element system - a new concept in finite element analysis", *Proc. Conf. Recent Advances in Stress Analysis*, Royal Aero Soc., 1968.
73. J.G. ERGATOUDIS, B.M. IRONS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Curved, isoparametric, "quadrilateral" elements for finite element analaysis", *Int. J. Solids Struct.*, **4**, pp. 31–42, 1968.
74. J.G. ERGATOUDIS, *Isoparametric elements in two and three dimensional analaysis*, Ph.D. Thesis, University of Wales, Swansea, 1968.
75. J.G. ERGATOUDIS, B.M. IRONS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Three dimensional analysis of arch dams and their foundations", *Symposium on Arch Dams*, Inst. Civ. Eng., London, 1968.
76. O.C. ZIENKIEWICZ, B.M. IRONS, J. CAMPBELL y F.C. SCOTT, "Three dimensional stress analysis", *Int. Un. Th. Appl. Mech. Symp. on High Speed Computing in Elasticity*, Liège, 1970.
77. O.C. ZIENKIEWICZ, "Isoparametric and other numerically integrated elements", in *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, (ed. S.J. Fenves, N. Perrone, A.R. Robinson, y W.C. Schnobrich), pp. 13–41, Academic Press, 1973.
78. O.C. ZIENKIEWICZ y F.C. SCOTT, "On the principle of repeatability and its application in analysis of turbine and pump impellers", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **9**, pp. 445–52, 1972.

Capítulo 9

GENERALIZACIÓN DE LOS CONCEPTOS DE ELEMENTOS FINITOS. MÉTODOS DE RESIDUOS PONDERADOS Y VARIACIONALES

9.1 Introducción

Hemos visto hasta ahora un posible procedimiento para obtener soluciones aproximadas a problemas de elasticidad lineal. En ingeniería y en física surgen otros muchos problemas de medios continuos que generalmente vienen expresados por las adecuadas ecuaciones diferenciales y las condiciones de contorno que se imponen a la función o funciones incógnita. El objeto de este capítulo es demostrar que todos los problemas de este tipo pueden estudiarse por el método de los elementos finitos.

El problema a resolver, expresado en la forma más general, es determinar una función desconocida **u** tal que satisfaga un determinado sistema de ecuaciones diferenciales

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \left\{ \begin{array}{c} A_1(\mathbf{u}) \\ A_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \end{array} \right\} = \mathbf{0} \qquad (9.1)$$

en un "dominio" Ω, ya sea volumen, superficie, etc., (Figura 9.1), junto con ciertas condiciones de contorno

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \left\{ \begin{array}{c} B_1(\mathbf{u}) \\ B_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \end{array} \right\} = \mathbf{0} \qquad (9.2)$$

en los contornos Γ del dominio (Figura 9.1).

La función buscada puede ser un escalar o bien un vector de varias variables. Similarmente, la ecuación diferencial puede ser una sola o un sistema de ecuaciones simultáneas. Es por esta razón que se ha recurrido antes a la notación matricial.

Todo cálculo por elementos finitos, siendo un método aproximado, busca una expresión aproximada de la solución, de la forma

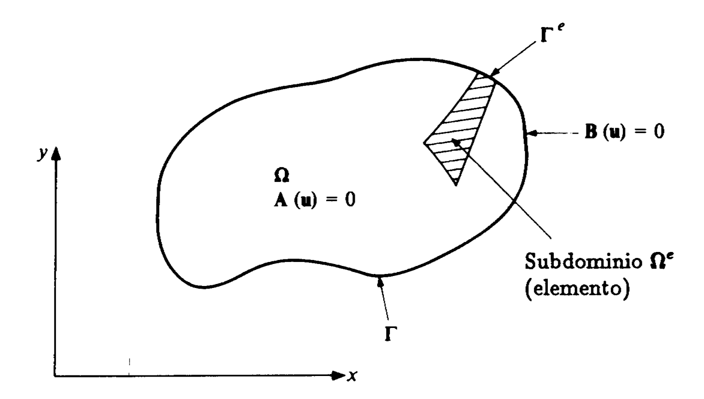


Figura 9.1 Dominio Ω y contorno Γ del problema.

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_{1}^{n} \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{N}\mathbf{a} \tag{9.3}$$

en la que $\mathbf{N}_i$ son funciones de forma expresadas en función de variables independientes (tales como las coordenadas x, y, etc.), y donde todos o algunos de los parámetros $\mathbf{a}_i$ son incógnitas.

Recordemos que en el capítulo anterior se empleó una aproximación de las mismas características para estudiar problemas de elasticidad. Ya se vio entonces: *a*) que las funciones de forma normalmente se definen localmente para cada subdominio o elemento, y *b*) que se recuperan las propiedades de los sistemas discretos si las ecuaciones de aproximación se expresan en *forma integral*, como en las ecuaciones (2.22) y (2.26).

Teniendo esto presente trataremos de expresar la ecuación de la cual hayan de obtenerse los parámetros desconocidos $\mathbf{a}_i$ en una forma integral tal como

$$\int_\Omega \mathbf{G}_j(\hat{\mathbf{u}})\, d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{g}_j(\hat{\mathbf{u}})\, d\Gamma = 0 \qquad j = 1 \text{ a } n \tag{9.4}$$

donde $\mathbf{G}_j$ y $\mathbf{g}_j$ representan funciones u operadores conocidos.

Estas formas integrales nos permitirán obtener la aproximación elemento por elemento para luego proceder al ensamblaje mediante los procedimientos desarrollados en el Capítulo 1 para los *sistemas discretos tipo,* ya que si las funciones $\mathbf{G}_j$ y $\mathbf{g}_j$ son integrables, tendremos

$$\int_\Omega \mathbf{G}_j\, d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{g}_j\, d\Gamma = \sum_{e=1}^{m} \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{G}_j\, d\Omega + \int_{\Gamma^e} \mathbf{g}_j\, d\Gamma \right) \tag{9.5}$$

donde Ω^e es el dominio por cada elemento y Γ^e la parte correspondiente de contorno del mismo.

Se dispone de dos procedimientos distintos para obtener la aproximación en dichas formas integrales. El primero es el ***método de los residuos ponderados***(también conocido como método de Galerkin), y el segundo consiste en determinar ***funcionales variacionales*** y buscar sus valores estacionarios. Ambos procedimientos serán tratados sucesivamente.

Si las ecuaciones diferenciales son lineales, o sea, si podemos escribir (9.1) y (9.2) como

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{p} = 0 \quad \text{en } \Omega \tag{9.6}$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{t} = 0 \quad \text{en } \Gamma \tag{9.7}$$

el sistema de ecuaciones de la aproximación (9.4) se convierte en un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = 0 \tag{9.8}$$

siendo

$$\mathbf{K}_{ij} = \sum_{e=1}^{m} \mathbf{K}_{ij}^e \qquad \mathbf{f}_i = \sum_{e=1}^{m} \mathbf{f}_i^e \tag{9.9}$$

El lector no acostumbrado a la abstracción puede encontrarse confuso ahora con relación al significado de los distintos términos. Presentaremos entonces algunos sistemas de ecuaciones diferenciales clásicos cuya solución buscaremos (y que aclararán un poco más los problemas).

Ejemplo 1. Ecuaciones de transmisión estacionaria del calor por conducción en un dominio bidimensional:

$$\begin{aligned} A(\phi) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + Q = 0 \\ B(\phi) &= \phi - \overline{\phi} = 0 \qquad \text{en } \Gamma_\phi \\ &= k\frac{\partial \phi}{\partial n} - \overline{q} = 0 \qquad \text{en } \Gamma_q \end{aligned} \tag{9.10}$$

donde (siendo n la normal a Γ) $\phi \equiv \mathbf{u}$ representa la temperatura, k es la conductividad, y $\overline{\phi}$ y $\overline{q}$ son los valores de contorno, respectivamente, establecidos para la temperatura y el flujo térmico.

En la ecuación anterior k y Q pueden ser funciones de la posición y, en problemas no lineales, de ϕ y de sus derivadas.

Ejemplo 2. Ecuación de la transmisión estacionaria del calor en dos dimensiones por conducción y convección:

$$A(\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + Q = 0 \qquad (9.11)$$

con las mismas condiciones de contorno que en el ejemplo anterior. Aquí, u y v son funciones conocidas de la posición y representan velocidades del fluido a través del cual se transfiere el calor.

Ejemplo 3. Un sistema de tres ecuaciones equivalente al problema del Ejemplo 1:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x}(kq_x) + \frac{\partial}{\partial y}(kq_y) + Q \\ q_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ q_y - \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{array} \right\} = 0 \qquad (9.12)$$

en Ω y

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{u}) &= \phi - \overline{\phi} = 0 \qquad &\text{en } \Gamma_\phi \\ &= q_n - \overline{q} = 0 \qquad &\text{en } \Gamma_q \end{aligned}$$

donde q_n es el flujo normal al contorno.

Aquí la función incógnita $\mathbf{u}$ está representada por el vector

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{c} \phi \\ q_x \\ q_y \end{array} \right\}$$

Este último ejemplo es típico de la llamada *formulación mixta.* En este tipo de problemas el número de incógnitas independientes que aparecen en las ecuaciones puede reducirse siempre mediante operaciones algebraicas adecuadas, dejando no obstante un problema resoluble [ej., obteniendo la Ec. (9.10) a partir de (9.12) eliminando q_x y q_y].

Si esto no puede hacerse [viz. Ec. (9.10)] se tiene una *formulación irreducible.*

Los problemas de forma mixta presentan ciertas complicaciones en su solución que serán tratados en el Capítulo 12.

En el Capítulo 10 volveremos a dar ejemplos detallados dentro de este mismo campo, y a lo largo del texto presentaremos otros ejemplos diferentes. Estos tres tipos de problemas nos serán, sin embargo, muy útiles en su forma completa o en la reducida a una dimensión (suprimiendo la variación en y) para ilustrar los procedimientos que se explican en este capítulo.

MÉTODOS DE RESIDUOS PONDERADOS

9.2 Equivalencia entre las ecuaciones diferenciales y las formas integrales o "débiles"

Como el sistema de ecuaciones diferenciales (9.1) tiene que ser cero en todos los puntos del dominio Ω, se deduce que

$$\int \mathbf{v}^T\mathbf{A}(\mathbf{u})\,d\Omega \equiv \int [v_1A_1(\mathbf{u}) + v_2A_2(\mathbf{u}) + \cdots]\,d\Omega \equiv 0 \qquad (9.13)$$

donde

$$\mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{array} \right\} \qquad (9.14)$$

es un conjunto de funciones arbitrarias de número igual al de ecuaciones (o componentes de $\mathbf{u}$) del problema.

Esto tiene importantes consecuencias. *Puede afirmarse que si (9.13) se cumple para cualquier* $\mathbf{v}$, *las ecuaciones diferenciales (9.1) deberán satisfacerse en todos los puntos del dominio.* La prueba de la validez de esta afirmación es obvia si consideramos la posibilidad de que $\mathbf{A}(\mathbf{u}) \neq 0$ en un punto o porción del dominio. Inmediatamente se puede encontrar una función $\mathbf{v}$ que haga la integral (9.13) distinta de cero, con lo que se demuestra lo afirmado.

Si han de satisfacerse simultáneamente las condiciones de contorno (9.12), ello puede asegurarse eligiendo adecuadamente la función $\hat{\mathbf{u}}$ o bien imponiendo que

$$\int_\Gamma \mathbf{v}^T\mathbf{B}[\mathbf{u})\,d\Gamma \equiv \int (v_1B_1(\mathbf{u}) + v_2B_2(\mathbf{u}) + \cdots]\,d\Gamma = 0 \qquad (9.15)$$

para cualquier conjunto de funciones $\mathbf{v}$.

Que la expresión integral

$$\int_\Omega \mathbf{v}^T\mathbf{A}(\mathbf{u})\,d\Omega + \int_\Gamma \overline{\mathbf{v}}^T\mathbf{B}(\mathbf{u})\,d\Gamma = 0 \qquad (9.16)$$

se satisfaga para todos los $\mathbf{v}$ y $\overline{\mathbf{v}}$ equivale a que satisfagan las ecuaciones diferenciales (9.1) y sus condiciones de contorno (9.2).

En la discusión anterior hemos supuesto implícitamente que es posible calcular las integrales que aparecen en la ecuación (9.16). Esto nos restringe las posibles familias a las que deben pertenecer las funciones $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$. *En general trataremos de evitar funciones que hagan infinito algún término del integrando.*

Se limita así en la ecuación (9.16) la elección de $\mathbf{v}$ y $\overline{\mathbf{v}}$ a funciones finitas unívocas sin restringir la validez de las expresiones anteriores.

¿Qué restricciones han de imponerse a las funciones $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, etc.? La respuesta depende obviamente del orden de las derivadas que aparecen en las ecuaciones $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ [o $\mathbf{B}(\mathbf{u})$]. Consideremos, por ejemplo, una función $\mathbf{u}$ que sea continua pero cuya pendiente presente alguna discontinuidad en la dirección x, tal como se muestra en la Figura 9.2. Imaginemos que la discontinuidad se sustituye en una distancia muy pequeña Δ por una variable continua y que estudiamos el comportamiento de sus derivadas. Se ve fácilmente que aunque la derivada primera no esté definida, ésta es integrable; sin embargo, la derivada segunda tiende a infinito. Esta función sería adecuada

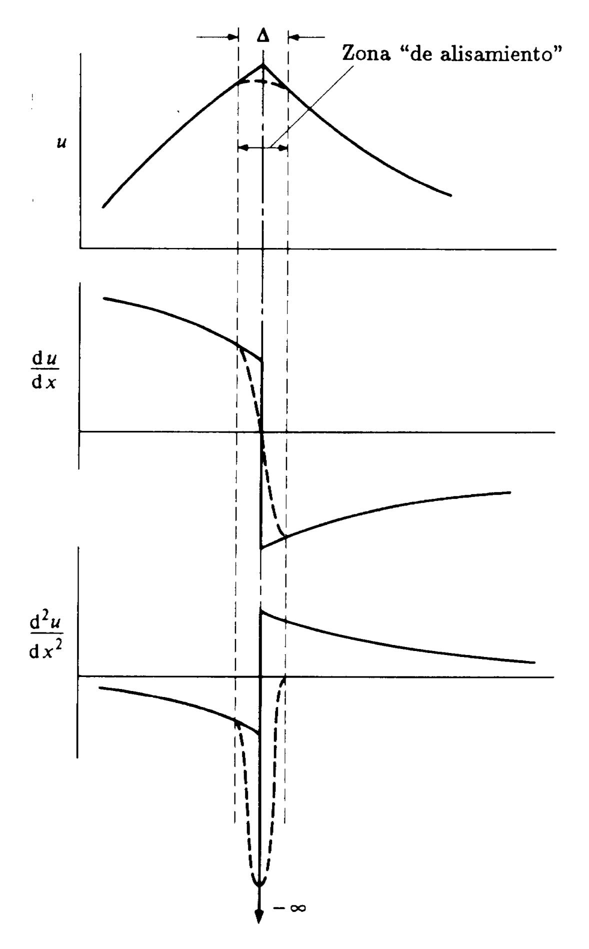


Figura 9.2 Diferenciación de una función con la primera derivada discontinua (continuidad C_0).

para representar a $\mathbf{u}$ si en la ecuación diferencial sólo apareciesen derivadas primeras. *Se dice que esta clase de funciones son de continuidad C_0.*

De manera similar es fácil ver que si en algún término de $\mathbf{A}$ o $\mathbf{B}$ aparecen derivadas de orden n, la función tendrá que ser tal que sus derivadas sean continuas hasta la de orden $n-1$ (continuidad C_{n-1}).

En muchas ocasiones es posible efectuar una integración por partes en la ecuación (9.16) y sustituirla por una expresión alternativa de la forma

$$\int_\Omega \mathbf{C}(\mathbf{v})^T\mathbf{D}(\mathbf{u})\,d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{E}(\overline{\mathbf{v}})^T\mathbf{F}(\mathbf{u})\,d\Gamma = 0 \tag{9.17}$$

Ahora las derivadas que aparecen en los operadores de $\mathbf{C}$ a $\mathbf{F}$ son de menor orden que las que aparecen en los operadores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$. En este caso se necesita una continuidad de menor orden al elegir las funciones $\mathbf{u}$ al precio de mayor orden de continuidad para $\mathbf{v}$ y $\overline{\mathbf{v}}$.

La expresión (9.17) es ahora más "permisiva" que las Ecs. (9.1), (9.2) o (9.16) que originalmente expresaban el problema y por ello es llamada *forma débil* de dichas ecuaciones. Es algo sorprendente, sin embargo, el hecho de que a menudo dicha forma sea físicamente más realista que la ecuación diferencial original, que implicaba un "alisamiento" excesivo de la verdadera solución.

Las expresiones integrales de las formas (9.16) y (9.17) son la base de las soluciones aproximadas por elementos finitos, y más adelante serán analizadas con más detalle. Antes de ello aplicaremos la nueva formulación a un ejemplo.

9.3 Forma débil de la ecuación de transmisión del calor por conducción con condiciones de contorno naturales y forzadas

Consideremos ahora la expresión integral de la Ec. (9.10). La expresión (9.16) se puede escribir así

$$\int_\Omega v\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+Q\right]dx\,dy + \int_{\Gamma_q}\overline{v}\left[k\frac{\partial\phi}{\partial n}-\overline{q}\right]d\Gamma = 0 \tag{9.18}$$

advirtiendo que v y $\overline{v}$ son funciones escalares y presuponiendo que una de las condiciones de contorno, tal como

$$\phi - \overline{\phi} = 0$$

se satisface automáticamente mediante la elección adecuada de las funciones ϕ.

Ahora podemos integrar por partes la Ec.(9.18) para obtener una forma débil similar a la Ec.(9.17). Haremos uso aquí de las fórmulas generales para

este tipo de integración (las fórmulas de Green) cuya deducción se expone en el Apéndice 6 y que nos serán útiles en muchas ocasiones.O sea,

$$\int_\Omega v\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx\,dy \equiv -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dx\,dy + \oint_\Gamma v\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)n_x\,d\Gamma$$

$$\int_\Omega v\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dx\,dy \equiv -\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial y}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dx\,dy + \oint_\Gamma v\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)n_y\,d\Gamma \tag{9.19}$$

Así pues, la Ec. (9.18) quedaría como

$$-\int_\Omega\left(\frac{\partial v}{\partial x}k\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}k\frac{\partial\phi}{\partial y}-Qv\right)dx\,dy+\oint_\Gamma vk\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x+\frac{\partial\phi}{\partial y}n_y\right)d\Gamma+ \\ +\int_{\Gamma_q}\bar{v}\left[k\frac{\partial\phi}{\partial n}-\bar{q}\right]d\Gamma=0 \tag{9.20}$$

Teniendo en cuenta que la derivada respecto de la normal viene dada por

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}\equiv\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x+\frac{\partial\phi}{\partial y}n_y \tag{9.21}$$

y, además haciendo

$$v=-\bar{v} \tag{9.22}$$

podemos escribir, sin pérdida de generalización (ya que ambas funciones son arbitrarias), la ecuación (9.20) como

$$\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}^T vk\boldsymbol{\nabla}\phi\,d\Omega-\int_\Omega vQ\,d\Omega-\int_{\Gamma_q}v\bar{q}\,d\Gamma-\int_{\Gamma_\phi}vk\frac{\partial\phi}{\partial n}\,d\Gamma=0 \tag{9.23}$$

donde el operador $\boldsymbol{\nabla}$ es simplemente

$$\boldsymbol{\nabla}=\left\{\begin{matrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\end{matrix}\right\}$$

Observemos que:

a) la variable ϕ desaparece de las integrales sobre el contorno Γ_q y que las condiciones de contorno

$$B(\phi)=k\frac{\partial\phi}{\partial n}-\bar{q}=0$$

correspondientes al mismo, se satisfacen automáticamente. Tal condición se conoce como condición de *contorno natural*, y

b) si ϕ se toma de manera que satisfaga las *condiciones de contorno forzadas* $\phi-\bar{\phi}=0$, podemos omitir el último término de (9.23) restringiendo la elección de las funciones v sólo a aquéllas que den $v=0$ en Γ_ϕ.

La expresión (9.23) es la *forma débil* de la ecuación de transmisión de calor por conducción equivalente a la Ec. (9.17). Admite coeficientes de conductividad k discontinuos y una temperatura ϕ que exhiba derivadas primeras discontinuas (posibilidad real que no admitía la forma diferencial).

9.4 Aproximación a formulaciones integrales: método de residuos ponderados (Galerkin)

Si para expresar la función incógnita $\mathbf{u}$ tomamos una expresión aproximada como la (9.3), o sea,

$$\mathbf{u}\approx\hat{\mathbf{u}}=\sum_1^r \mathbf{N}_i\mathbf{a}_i=\mathbf{N}\mathbf{a}$$

será evidentemente imposible que en el caso más general se satisfagan a la vez la ecuación diferencial y las condiciones de contorno. Las expresiones integrales (9.16) o (9.17) permiten efectuar una aproximación si, en lugar de *cualquier función* $\mathbf{v}$, tomamos un conjunto finito de funciones preestablecidas

$$\mathbf{v}=\mathbf{w}_j \qquad \overline{\mathbf{v}}=\overline{\mathbf{w}}_j \qquad j=1 \text{ a } n \tag{9.24}$$

donde n es el número de parámetros incógnita $\mathbf{a}_i$ que entran en el problema $(n\leq r)$.

Así pues, las ecuaciones (9.16) y (9.17) proporcionan un sistema de ecuaciones ordinarias, de las que pueden calcularse los parámetros $\mathbf{a}$. Es decir, en el caso de la ecuación (9.16) tendremos el sistema

$$\int_\Omega \mathbf{w}_j^T\mathbf{A}(\mathbf{Na})\,d\Omega+\int_\Gamma \overline{\mathbf{w}}_j^T\mathbf{B}(\mathbf{Na})\,d\Gamma=0 \qquad j=1 \text{ a } n \tag{9.25}$$

o bien, de (9.17),

$$\int_\Omega \mathbf{C}(\mathbf{w}_j)^T\mathbf{D}(\mathbf{Na})\,d\Omega+\int_\Gamma \mathbf{E}(\overline{\mathbf{w}}_j)^T\mathbf{F}(\mathbf{Na})\,d\Gamma=0 \qquad j=1 \text{ a } n \tag{9.26}$$

Si tenemos en cuenta que $\mathbf{A}(\mathbf{Na})$ representa el *residuo* o *error* que se obtiene al sustituir la solución aproximada en la ecuación diferencial [y $\mathbf{B}(\mathbf{Na})$ el residuo obtenido al hacer esta sustitución en las condiciones de contorno], la expresión (9.25) será la *integral ponderada de tales residuos*. Por

ello este procedimiento de aproximación puede recibir el nombre de *método de residuos ponderados*.

Fue Crandall[1] el primero en describir este método de la forma más general, señalando las diferentes expresiones con que ha sido utilizado desde finales del pasado siglo. Más recientemente, Finlayson[2] ha dado una exposición muy completa del mismo. Evidentemente, a efectos de ponderación se puede utilizar casi cualquier conjunto de funciones independientes $\mathbf{w}_j$, dando un nombre diferente a cada proceso de acuerdo con la función escogida. Así las funciones usadas más corrientemente son:

1. Colocación por puntos[3].
   $\mathbf{w}_j = \boldsymbol{\delta}_j$, donde $\boldsymbol{\delta}_j$ es tal que para $x \neq x_j$; $y \neq y_j$, $\mathbf{w}_j = 0$ pero $\int_\Omega \mathbf{w}_j \, d\Omega = \mathbf{I}$ (matriz unidad). Este procedimiento equivale simplemente a hacer nulo el residuo en n puntos dentro del dominio, resultando innecesaria la integración. ($\mathbf{w}_j$ es admisible a pesar de que no satisface el criterio de integración expresado en la Sección 9.2, en virtud de sus propiedades).
2. Colocación por subdominios.[4]
   $\mathbf{w}_j = \mathbf{I}$ en Ω_j y cero en cualquier otro punto. Esencialmente esto hace que la integral del error sobre el subdominio especificado del dominio sea nula.
3. Método de Galerkin (Bubnov-Galerkin).[5,6]
   $\mathbf{w}_j = \mathbf{N}_j$. Consiste simplemente en utilizar para la ponderación las funciones de forma originales. Como veremos, este método permite frecuentemente (pero no siempre) obtener matrices simétricas y por ésta y otras razones se adoptará casi exclusivamente para nuestras operaciones con elementos finitos.

La expresión de "residuos ponderados" es muy anterior a la de "método de los elementos finitos". Este último emplea principalmente funciones definidas localmente (en el elemento) en la aproximación definida por la Ec.(9.3), pero los esquemas generales son idénticos. Puesto que el proceso conduce siempre a ecuaciones que, debido a su forma integral, permiten ser obtenidas como suma de las contribuciones de distintos subdominios, agruparemos todas las soluciones aproximadas mediante residuos ponderados bajo el nombre de *método generalizado de los elementos finitos*. Se encontrará con frecuencia que es ventajoso utilizar simultáneamente funciones de prueba definidas local y "globalmente".

En matemática los nombres de Petrov-Galerkin[6] están frecuentemente asociados con el uso de funciones de ponderación tales que $\mathbf{w}_j \neq \mathbf{N}_j$. Es importante remarcar que el conocido método de aproximación de *diferencias finitas* es un caso particular de colocación con funciones base definidas localmente.

9.5 Ejemplos

Para ilustrar el método de aproximación mediante residuos ponderados y su relación con el método de los elementos finitos, consideramos algunos ejemplos concretos.

Ejemplo 1. Ecuación unidimensional de la transmisión del calor por conducción (Figura 9.3). El problema a analizar es el de la representación unidimensional de la transmisión del calor por conducción (9.10) con coeficiente de conductividad unidad (este problema podría igualmente representar muy bien otros muchos problemas de la Física, por ejemplo, la deformación de una cuerda bajo carga). En este caso, tenemos

$$A(\phi) = \frac{d^2\phi}{dx^2} + Q = 0 \quad (0 \leq x \leq L) \tag{9.27}$$

con $Q = Q(x)$ dado por $Q = 1$ $(0 \leq x < L/2)$ y $Q = 0$ $(L/2 \leq x \leq L)$. Las condiciones de contorno supuestas son simplemente $\phi = 0$, para $x = 0$ y $x = L$.

En primer lugar, consideramos una solución aproximada en forma de serie de Fourier de uno o dos términos, o sea,

$$\phi \approx \hat{\phi} = \sum a_i \operatorname{sen} \frac{\pi x i}{L} \qquad N_i = \operatorname{sen} \frac{\pi x i}{L} \tag{9.28}$$

donde $i = 1$ e $i = 1$ y 2. Estas expresiones satisfacen exactamente las condiciones de contorno y son continuas en todo el dominio. Por ello, para efectuar la aproximación podemos emplear con la misma validez la Ec.(9.16) o la (9.17). Emplearemos la primera, pues permite adoptar distintas funciones de ponderación. En la Figura 9.3 se representa el problema y su solución por colocación por puntos, por colocación por subdominios y por el método de Galerkin.†

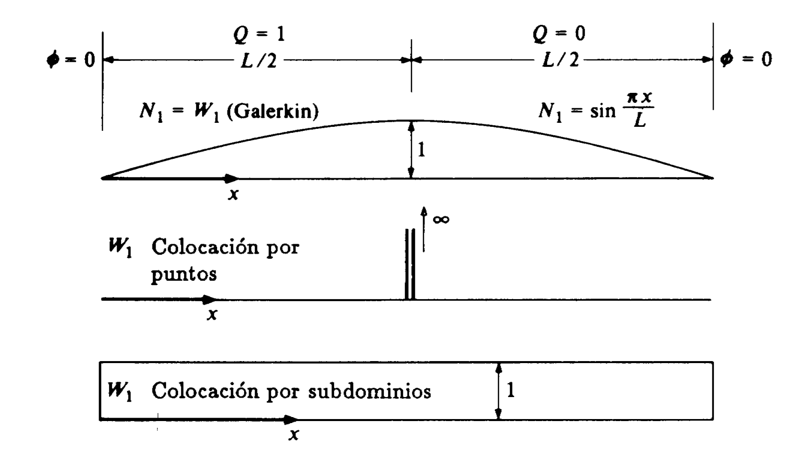
Puesto que el desarrollo en serie elegido satisface *a priori* las condiciones de contorno no es necesario introducir éstas en la formulación, que simplemente viene dada por

$$\int_0^L w_j \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\sum N_i a_i \right) + Q \right] dx = 0 \tag{9.29}$$

Dejamos como ejercicio para el lector el desarrollo completo de este problema.

En el campo de los elementos finitos es más interesante el uso de funciones definidas a intervalos (o localmente) en vez de funciones definidas globalmente

† En el caso de colocación por puntos, usando $i = 1$, $x_i = L/2$, nos encontramos con una dificultad acerca del valor de Q, ya que puede tomar los valores cero o uno. En este ejemplo hemos tomado el valor $1/2$.



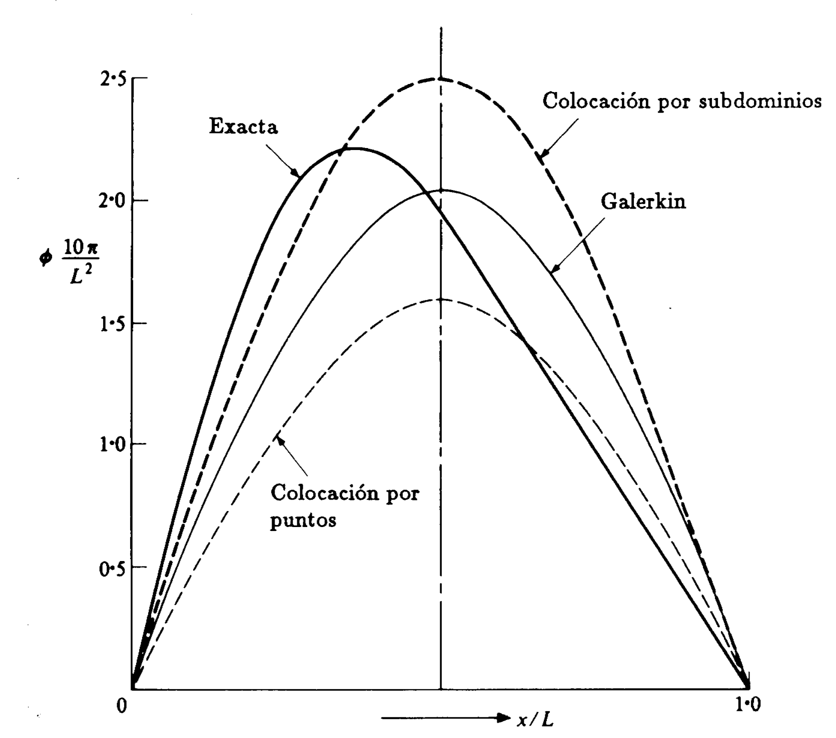
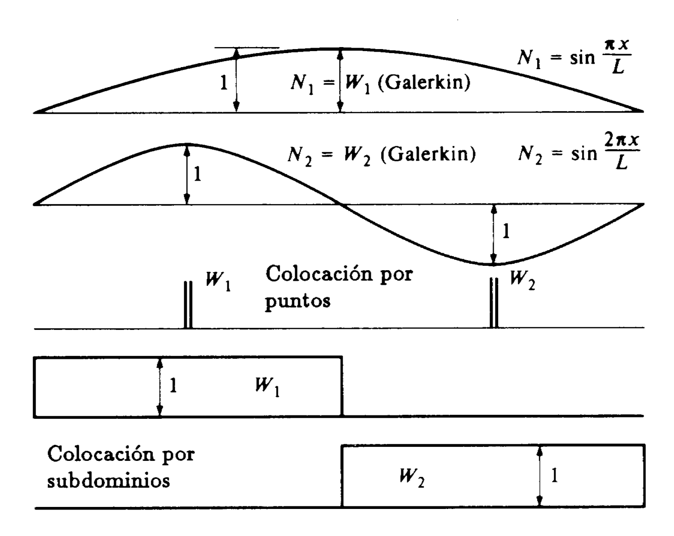


Figura 9.3 Conducción unidimensional del calor. (*a*) Solución con un término utilizando diferentes procedimientos de ponderación. (*b*) Solución con dos términos utilizando diferentes procedimientos de ponderación.



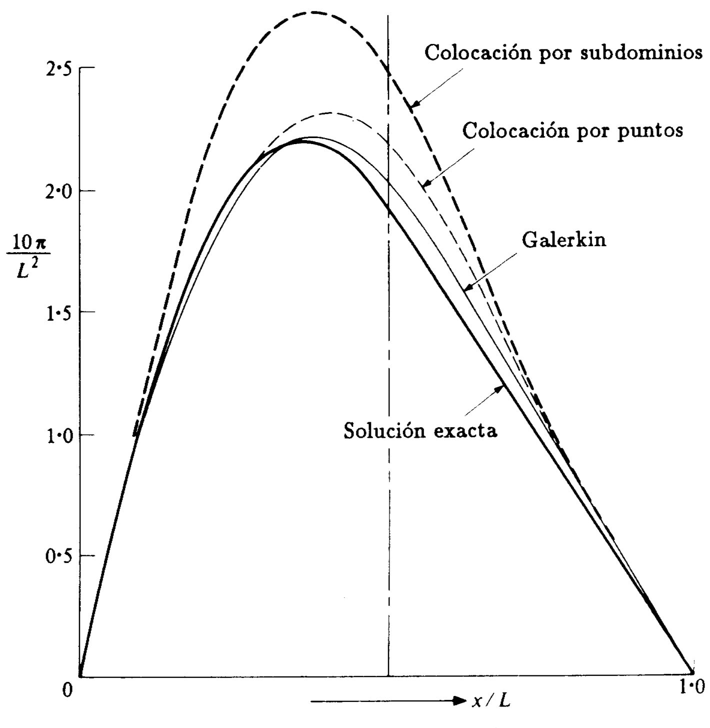


Figura 9.3 (continuación).

como en la Ec.(9.28). En este caso, para evitar imponer la continuidad de las derivadas primeras, emplearemos la expresión equivalente a la Ec.(9.17), que se obtiene integrando por partes la Ec.(9.29). Esto da

$$\int_0^L \left[\frac{dw_j}{dx} \frac{d}{dx} \sum N_i a_i - w_j Q \right] dx = 0 \tag{9.30}$$

Los términos correspondientes al contorno se anulan idénticamente si $w_j = 0$ en ambos extremos.

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse así

$$\mathbf{K a} + \mathbf{f} = 0 \tag{9.31}$$

donde para cada "elemento" de longitud L^e,

$$\begin{aligned} K_{ji}^e &= \int_0^{L^e} \frac{dw_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx \\ f_j^e &= -\int_0^{L^e} w_j Q \, dx \end{aligned} \tag{9.32}$$

manteniéndose las reglas corrientes de la adición, o sea,

$$K_{ji} = \int_0^L \frac{dw_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx \qquad f_j^e = -\int_0^L w_j \, Q \, dx \tag{9.33}$$

Para el cálculo seguiremos el método de Galerkin, esto es, $w_j = N_j$, y el lector observará que entonces la matriz $\mathbf{K}$ será simétrica, o sea, $K_{ij} = K_{ji}$.

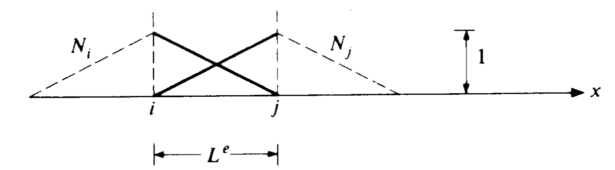
Puesto que las funciones de forma sólo necesitan la continuidad C_0, es conveniente buscar una solución aproximada lineal por intervalos, tal como se muestra en la Figura 9.4. Considerando un elemento típico ij como el representado, podemos escribir (trasladando el origen del eje x al punto i)

$$N_j = x/L^e \qquad N_i = (L^e - x)/L^e \tag{9.34}$$

obteniendo, para un elemento cualquiera,

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= K_{ji}^e = -1/L^e \\ K_{ii} &= K_{jj} = 1/L^e \\ f_j^e &= -QL^e/2 = f_i^e \end{aligned} \tag{9.35}$$

Dejamos para el lector el ensamblaje de una ecuación típica para el nodo i y le aconsejamos que lleve a cabo los cálculos que conducen a los resultados de la Figura 9.4 para subdivisiones en dos y tres elementos.



Funciones de forma lineales definidas localmente

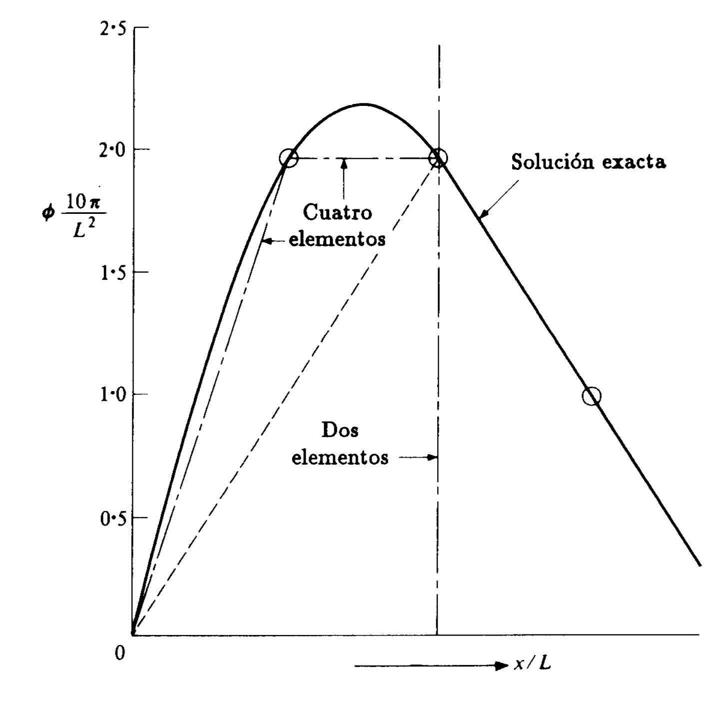


Figura 9.4 Solución por elementos finitos mediante el método de Galerkin del problema de la Figura 9.3, utilizando funciones de forma lineales definidas localmente.

Al comparar los resultados de las Figuras 9.3 y 9.4 surgen inmediatamente varios puntos interesantes. Con funciones de forma globales alisadas, el método de Galerkin proporciona mejores resultados de conjunto que los obtenidos para el mismo número de parámetros incógnita a con funciones definidas localmente (a intervalos). Hallaremos que esto es el caso general de las aproximaciones de mayor orden, que producen una mejor precisión. Aún más, se observará que la aproximación lineal proporciona la solución exacta en los puntos nodales. Esto es una propiedad de la ecuación particular resuelta y desafortunadamente no representa una regla general aplicable a

los problemas generales[7] (ver también Apéndice 7). Por último, observará el lector cuán fácil es formar las ecuaciones cualquiera que sea el grado de subdivisión, una vez deducidas las propiedades del elemento [Ec.(9.35)]. No ocurre lo mismo si la aproximación es global, siendo entonces preciso realizar nuevas integraciones para cada parámetro que se introduce. Esta característica de repetibilidad es una de las ventajas del método de los elementos finitos.

Ejemplo 2. Transmisión estacionaria del calor en dos dimensiones por conducción y convección. Formulación de Galerkin. Este problema ya ha sido presentado en la Sección 9.1, y definido mediante la Ec.(9.11) con las condiciones de contorno adecuadas. La única diferencia con la ecuación de la conducción simple de calor, cuya forma débil ya fue establecida mediante la Ec. (9.23), estriba en los términos relativos a la convección. Así pues, sustituyendo $v = w_j$ en (9.23) y añadiendo los términos de convección a la misma, podemos escribir inmediatamente la ecuación de residuos ponderados. Se obtiene así

$$\int_\Omega \nabla^T w_j k \nabla \hat{\phi}\, d\Omega - \int_\Omega w_j \left(u\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + v\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \right) d\Omega - \int_\Omega w_j Q\, d\Omega - \int_{\Gamma_q} w_j\, \bar{q}\, d\Gamma = 0 \tag{9.36}$$

siendo $\hat{\phi} = \sum N_i a_i$ tal que los valores impuestos de $\bar{\phi}$ se dan en el contorno $\Gamma = \phi$ y a la vez $w_j = 0$ en dicho contorno.

Estableciendo la aproximación de Galerkin, es decir, haciendo $w_j = N_j$, obtenemos inmediatamente un sistema de ecuaciones de la forma

$$\mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = 0 \tag{9.37}$$

donde

$$\begin{aligned} K_{ji} &= \int_\Omega \nabla^T N_j k \nabla N_i\, d\Omega - \int_\Omega \left(N_i u \frac{\partial N_i}{\partial x} + N_j v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega = \\ &= \int_\Omega \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} k \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} k \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega - \\ &\quad - \int_\Omega \left(N_j\, u \frac{\partial N_i}{\partial x} + N_j\, v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega \end{aligned} \tag{9.38a}$$

$$f_j = - \int_\Omega N_j Q d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_j \bar{q}\, d\Gamma \tag{9.38b}$$

De nuevo se pueden evaluar las componentes K_{ji} y f_i para un elemento o subdominio típicos y formar las ecuaciones de los sistemas mediante los procedimientos generales.

Es importante mencionar en este punto que es preciso prefijar los valores de algunos de los parámetros $\mathbf{a}_i$ para que satisfagan las condiciones de contorno, debiendo ser las ecuaciones de la aproximación iguales en número a los parámetros incógnita. No obstante esto, es conveniente formar todas las ecuaciones para todos los parámetros y establecer los valores fijos al final siguiendo las mismas técnicas descritas en el Capítulo 1 para la introducción de las condiciones de contorno en los problemas discretos generales.

Debemos hacer notar otro punto concerniente a los coeficientes de la matriz **K**. La primera parte, que corresponde a la conducción del calor pura es simétrica ($K_{ji} = K_{ij}$), pero la segunda no lo es y por ello es preciso resolver un sistema de ecuaciones asimétrico. Existe una razón básica para dicha asimetría que será analizada en la Sección 9.11.

Para concretar el problema, consideremos el dominio Ω dividido en elementos cuadrados iguales de lado h (Figura 9.5). Para conservar la continuidad C_0 con nodos situados en los vértices, se pueden escribir funciones de forma dadas como productos de desarrollos lineales. Por ejemplo, para el nodo i tenemos, tal como se muestra en la Figura 9.5,

$$N_i = \frac{x}{h}\frac{y}{h}$$

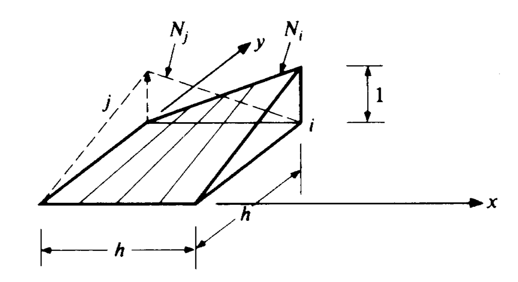
y para el nodo j,

$$N_j = \frac{(h-x)}{h}\frac{y}{h}, \qquad \text{etc.}$$

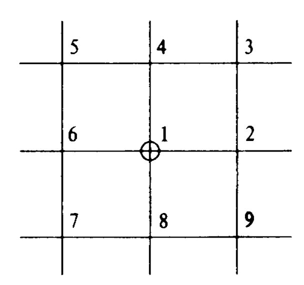
Con estas funciones de forma se invita al lector a que evalúe las contribuciones de cada elemento y a que ensamble las ecuaciones para el punto 1 de la malla numerada que se muestra en la Figura 9.5. El resultado será (si no existen contornos del tipo Γ_q y se supone que Q es constante dentro de cada elemento)

$$\begin{aligned} &\frac{8}{3}a_1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{uh}{3k} - \frac{vh}{6k}\right) a_2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{uh}{12k} - \frac{vh}{12k}\right) a_3 - \left(\frac{1}{3} - \frac{uh}{6k} - \frac{vh}{3k}\right) a_4 - \\ &- \left(\frac{1}{3} + \frac{uh}{12k} - \frac{vh}{12k}\right) a_5 - \left(\frac{1}{3} + \frac{uh}{3k} - \frac{vh}{6k}\right) a_6 - \left(\frac{1}{3} + \frac{uh}{12k} - \frac{vh}{6k}\right) a_7 - \\ &- \left(\frac{1}{3} - \frac{uh}{6k} + \frac{vh}{3k}\right) a_8 - \left(\frac{1}{3} + \frac{uh}{12k} + \frac{vh}{12k}\right) a_9 = 4h^2 Q \end{aligned} \tag{9.39}$$

Esta ecuación es similar a las que obtendríamos aproximando las mismas ecuaciones mediante el método de diferencias finitas[8,9] de una forma bastante estándar. En el ejemplo tratado aparecen algunas dificultades cuando los términos de convección son grandes; en tales casos, la ponderación por el método de Galerkin no es aceptable y tienen que emplearse otros procedimientos. Esto se analiza con detalle en el segundo volumen.



(*a*) Funciones de forma para un elemento cuadrado C_0.



(*b*) Nodos "conectados " por la ecuación del nodo 1.

Figura 9.5 Elemento cuadrado lineal de continuidad C_0. (*a*) Funciones de forma para un elemento cuadrado. (*b*) Ecuación "conectada" para el nodo 1.

9.6 El principio de los trabajos virtuales como "forma débil" de las ecuaciones de equilibrio en el análisis de sólidos y fluidos

En el Capítulo 2 presentamos el concepto de elemento finito mediante su aplicación a la elasticidad, como parte de la mecánica de sólidos. La expresión integral necesaria para formular la aproximación era el principio de los *trabajos virtuales*, que se supuso constituía un principio fundamental y, por tanto, no necesitaba demostración. Esta opinión es compartida por muchos, que consideran el principio de los trabajos virtuales como una expresión, dentro del campo de la mecánica, mucho más fundamental que las tradicionales condiciones de equilibrio expresadas por las leyes de Newton. Otros discrepan de este punto de vista y opinan que todos los teoremas de trabajo derivan de las leyes clásicas que gobiernan el equilibrio de la partícula. Demostraremos en esta sección que la expresión de los trabajos virtuales no es sino una "forma débil" de las ecuaciones de equilibrio.

En un continuo tridimensional cualquiera, las ecuaciones de equilibrio de un volumen elemental pueden escribirse en función de las componentes del tensor de tensiones, simétrico y cartesiano,[10] como sigue

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} = 0 \tag{9.40}$$

donde $\mathbf{b}^T = [b_x, b_y, b_z]$ representa las fuerzas que actúan por unidad de volumen (pudiendo muy bien incluir efectos inerciales).

En mecánica de sólidos, las seis componentes de la tensión serán generalmente funciones de las componentes del desplazamiento

$$\mathbf{u}^T = [u, v, w] \tag{9.41}$$

y en mecánica de fluidos lo serán del vector de velocidades $\mathbf{u}$, que tiene componentes similares. Así pues, las tres ecuaciones (9.40) se pueden considerar como una ecuación general de la misma forma que la (9.1), o sea, $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = 0$. Para obtener una forma débil procederemos como antes, introduciendo un vector de funciones de ponderación arbitrario $\delta\mathbf{u}$, definido como

$$\delta\mathbf{u}^T = [\delta u, \delta v, \delta w] \tag{9.42}$$

Podemos escribir ahora la expresión integral Ec.(9.13) como

$$\int_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{A}(\mathbf{u})\, dV = \int_V \left[\delta u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x\right) + \right. \\ \left. + \delta v(\ldots) + \delta w(\ldots)\right] dV \tag{9.43}$$

donde el volumen V es el dominio del problema.

Integrando por partes cada término podemos escribir la ecuación anterior, una vez reordenada, como sigue

$$- \int_V \left[\sigma_x \frac{\partial}{\partial x}(\delta u) + \tau_{xy}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\delta u) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta v)\right) + \ldots \right. \\ \left. - \delta u b_x - \delta v b_y - \delta w b_z \right] dV + \\ + \int_\Gamma [\delta u(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) + \delta v(\ldots) + \delta w(\ldots)]\, d\Gamma = 0 \tag{9.44}$$

donde la superficie Γ representa el área de la superficie del sólido (volvemos a emplear las fórmulas de Green del Apéndice 6).

Podemos reconocer inmediatamente en los términos encerrados en el primer corchete los operadores de pequeñas deformaciones que actúan sobre $\delta\mathbf{u}$, que pueden asociarse a su vez a un desplazamiento virtual (o a una velocidad virtual). Podemos por lo tanto introducir la deformación virtual (o velocidad de deformación) que por definición sería

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\delta u) \\ \frac{\partial}{\partial y}(\delta v) \\ \frac{\partial}{\partial z}(\delta w) \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\delta\mathbf{u} \tag{9.45}$$

donde los operadores de deformación se definen en el Capítulo 2 [Ec.(2.4)]. Análogamente, reconoceremos los términos de la segunda integral como correspondientes a fuerzas $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{t} = [t_x, t_y, t_z]^T \tag{9.46}$$

que actúan por unidad de área de la superficie Γ. Disponiendo las seis componentes de la tensión en un vector $\boldsymbol{\sigma}$ y similarmente las seis componentes de la deformación virtual (o velocidad de la deformación virtual) en un vector $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$, podemos escribir la ecuación (9.44) sencillamente así

$$\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}\, dV - \int_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b}\, dV - \int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t}\, d\Gamma = 0 \tag{9.47}$$

que es la expresión de los trabajos virtuales empleada en las Ecs.(2.10) y (2.22) del Capítulo 2.

Se deduce de lo anterior que el principio de los trabajos virtuales es precisamente una forma débil de las ecuaciones de equilibrio y es válido tanto si las relaciones entre tensiones y deformaciones (o entre tensiones y velocidades de deformación) son lineales como no lineales.

La solución aproximada mediante elementos finitos presentada en el Capítulo 2, *corresponde de hecho a una formulación de Galerkin del método de residuos ponderados aplicado a la ecuación de equilibrio.* Así pues, si tomamos $\delta\mathbf{u}$ como la función de forma

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{N} \tag{9.48}$$

con la que el campo de desplazamientos está discretizado, o sea,

$$\mathbf{u} = \sum \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i \tag{9.49}$$

junto con la relación constitutiva (2.5), nuevamente podremos determinar todas las expresiones fundamentales del Capítulo 2, que son tan esenciales para la solución de problemas de elasticidad.

Expresiones similares serán vitales en el momento de formular problemas equivalentes en mecánica de fluidos.

9.7 Discretización parcial

En la aproximación seguida para resolver la ecuación diferencial [Ecs.(9.1)], mediante un desarrollo de la forma general expresada en la Ec.(9.3), se ha supuesto que las funciones de forma $\mathbf{N}$ incluían *todas* las coordenadas independientes del problema y que $\mathbf{a}$ era simplemente un conjunto de constantes. Las ecuaciones de la aproximación finales eran siempre, por tanto, de forma algebraica, de la cual podía determinarse un conjunto de parámetros único.

En algunos problemas es conveniente proceder de una manera diferente. Así, por ejemplo, si las variables independientes son x, y y z podríamos expresar los parámetros $\mathbf{a}$ como funciones de z y efectuar la aproximación solamente en un dominio $\overline{\Omega}$ de x e y. Así, en lugar de la Ec. (9.3), tendríamos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N}\mathbf{a} \\ \mathbf{N} &= \mathbf{N}(x,y) \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a}(z) \end{aligned} \tag{9.50}$$

Evidentemente, en la discretización final quedarán las derivadas de $\mathbf{a}$ con respecto a z y el resultado será un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con z como variable independiente. En problemas lineales tal sistema de ecuaciones tendrá el aspecto

$$\mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{a}} + \cdots + \mathbf{f} = 0 \tag{9.51}$$

donde $\dot{\mathbf{a}} \equiv \frac{d}{dz}\mathbf{a}(\mathbf{z})$, etc.

Tal discretización parcial se puede emplear evidentemente de diferentes maneras, pero es especialmente útil cuando el subdominio $\overline{\Omega}$ no depende de z, o sea, cuando el *problema es prismático*. En tal caso, los coeficientes de la ecuación diferencial ordinaria (9.51) son independientes de z y la resolución del sistema puede llevarse a cabo eficazmente por los métodos analíticos corrientes.

Este tipo de discretización parcial ha sido aplicado extensamente por Kantorovitch[11] y frecuentemente recibe este nombre. En el segundo volumen analizaremos estos procedimientos semianalíticos en relación con los sólidos prismáticos, donde la solución final se obtiene en función de series de Fourier. El problema "prismático" más corriente es el que incluye el tiempo como variable, cuando el dominio $\overline{\Omega}$ no está sujeto a cambio. Es conveniente, a título de ejemplo, considerar aquí la ecuación de la conducción del calor en

dos dimensiones en régimen transitorio. Se obtiene ésta a partir de la Ec. (9.10) añadiendo el término que expresa el almacenamiento de calor $c\frac{\partial\phi}{\partial t}$, donde c es el calor específico. Tenemos ahora un problema definido en un dominio $\Omega(x,y,t)$ y gobernado por la siguiente ecuación:

$$A(\phi) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + Q - c\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \qquad (9.52)$$

con idénticas condiciones de contorno a las de (9.10). Tomando

$$\phi \approx \hat{\phi} = \sum N_i a_i \qquad (9.53)$$

con $a_i = a_i(t)$ y $N_i = N_i(x,y)$ y utilizando el método de Galerkin seguimos exactamente los pasos descritos en las Ecs. (9.36) a (9.38) para llegar a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\mathbf{Ka} + \mathbf{C}\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{f} = 0 \qquad (9.54)$$

En este caso, la expresión de K_{ij} es idéntica a la de la Ec. (9.38a) (prescindiendo de los términos de convección), la de f_i es idéntica a la de la Ec. (9.38b), y el lector puede comprobar que la matriz $\mathbf{C}$ viene definida por

$$C_{ij} = \int_\Omega N_i c N_j \, dx\, dy \qquad (9.55)$$

Como siempre, la matriz $\mathbf{C}$ puede formarse por ensamblaje de las contribuciones de cada elemento. Se pueden aplicar varios procedimientos analíticos y numéricos a la solución de tales ecuaciones transitorias, tal como se discutirá en el segundo volumen. Sin embargo, para aclarar los detalles y las posibles ventajas del proceso de la discretización parcial, consideraremos un problema muy sencillo.

Ejemplo. Consideremos un prisma cuadrangular de lado L en el que se satisface la ecuación de conducción del calor en régimen transitorio [Ec.(9.52)] y supongamos que la velocidad de producción de calor depende del tiempo según

$$Q = Q_0 e^{-\alpha t} \qquad (9.56)$$

(esto representa una aproximación a la cantidad de calor generado en la hidratación del hormigón). Se supone que para $t = 0$, $\phi = 0$ en todo el cuerpo. Además, tomaremos $\phi = 0$ en el contorno para todo instante.

Como primera aproximación tomamos una función de forma correspondiente a una solución con un solo término:

$$\phi = N_1 a_1$$
$$N_1 = \cos\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi y}{L} \qquad (9.57)$$

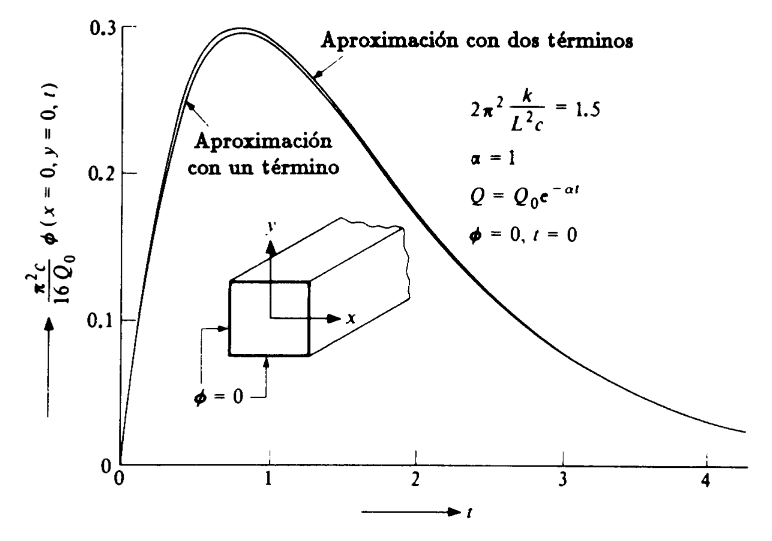


Figura 9.6 Evolución térmica bajo régimen transitorio bidimensional dentro de un prisma cuadrangular y representación gráfica de las temperaturas en el centro.

con x e y medidas desde el centro (Figura 9.6).
Calculando los coeficientes, tenemos

$$K_{11} = \int_{-L/2}^{L/2}\int_{-L/2}^{L/2}\left[k\left(\frac{\partial N_1}{\partial x}\right)^2 + k\left(\frac{\partial N_1}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \frac{\pi^2 k}{2}$$

$$C_{11} = \int_{-L/2}^{L/2}\int_{-L/2}^{L/2} c N_1^2 \, dx\, dy = \frac{L^2 c}{4} \qquad (9.58)$$

$$f_1 = \int_{-L/2}^{L/2}\int_{-L/2}^{L/2} N_1 Q_0 e^{-\alpha t}\, dx\, dy = \frac{4 Q_0 L^2}{\pi^2} e^{-\alpha t}$$

Lo que nos lleva a una ecuación diferencial ordinaria de una sola incógnita a_1

$$C_{11} = \frac{da_1}{dt} + K_{11} a_1 + f_1 = 0 \qquad (9.59)$$

con $a_1 = 0$ cuando $t = 0$. La solución de ésta se puede obtener fácilmente, tal como se muestra en la Figura 9.6 para valores específicos de los parámetros α y $k/L^2 c$.

En la misma figura se muestra una solución con dos términos, con

$$N_2 = \cos\frac{3\pi x}{L}\cos\frac{3\pi y}{L} \tag{9.60}$$

que el lector puede tratar de determinar para evaluar su comprensión del problema. Se ha omitido aquí el segundo término de la serie de Fourier, debido a la simetría de la solución.

Nótese la notable precisión obtenida en este ejemplo mediante la solución aproximada con un solo término.

9.8 Convergencia

En las secciones anteriores hemos examinado cómo pueden obtenerse soluciones aproximadas mediante un desarrollo de la función incógnita expresada por medio de funciones de prueba o de forma. Más aún, hemos establecido las condiciones necesarias que han de satisfacer dichas funciones para que puedan calcularse en el dominio distintas integrales. Así, si algunas de las integrales contienen sólo valores de N_i o de sus derivadas primeras, N_i tendrá que ser de continuidad C_0. Si contienen derivadas segundas, se necesita continuidad C_1, etc. El problema que todavía no nos hemos planteado es el del *grado de bondad de la aproximación y cómo podemos mejorarla sistemáticamente para acercarnos más a la solución exacta* (ver Capítulo 14). La primera pregunta es casi imposible de contestar y presupone el conocimiento de la solución exacta. La segunda es más racional y puede contestarse si consideramos algún procedimiento sistemático según el cual pueda suponerse que tiene lugar el aumento del número de parámetros a en el desarrollo estándar de la Ec. (9.3),

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{1}^{r} \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i$$

En algunos de los ejemplos hemos supuesto, en efecto, una serie de Fourier limitada a un número finito de términos, con una expresión única para las funciones de prueba en todo el dominio. En este caso, la adición de nuevos términos implicaría simplemente una ampliación del número de términos de la serie que se incluirían en el análisis, y como las series de Fourier presentan la conocida propiedad de representar cualquier función deseada con la precisión que se desee sin más que tomar el número de términos necesario, podemos decir que la aproximación *converge* a la solución exacta al aumentar el número de términos.

En otros ejemplos de este capítulo hemos empleado funciones definidas localmente, siendo éstas fundamentales en el análisis mediante elementos finitos. En este caso hemos supuesto tácitamente que *se obtiene convergencia al disminuir el tamaño de los elementos y, por consiguiente, al incrementar el número de parámetros nodales* **a**. Es este tipo de convergencia el que

nos importa, habiendo sido ésta examinada ya en el contexto del análisis de sólidos elásticos efectuado en el Capítulo 2 (Sección 2.6).

Evidentemente tenemos que determinar ahora:

a) que al aumentar el número de elementos se pueden aproximar las funciones incógnita tanto como se desee, y
b) de qué forma disminuye el error con el tamaño h de las subdivisiónes del dominio (h podría ser aquí alguna dimensión característica de un elemento).

El primer problema se refiere a estudiar si el desarrollo es completo (en el sentido de los términos que contiene), y aquí supondremos que todas las funciones de prueba son polinomios (o al menos, que incluyen ciertos términos de un desarrollo polinómico).

Obviamente, como la solución aproximada que aquí se analiza corresponde a la expresión integral débil tipificada por las Ecs. (9.13) o (9.17), es necesario que cada término que aparezca bajo el signo integral pueda ser aproximado en el límite tanto como sea posible y, en particular, tome un valor constante en una zona infinitesimal del dominio Ω.

Si en cualquiera de dichos términos aparece una derivada de orden m, será evidentemente necesario, para obtener en el límite dicho valor constante, que el polinomio definido localmente sea al menos de grado m.

Diremos, pues, que una condición necesaria para que el desarrollo sea convergente, es el *criterio de desarrollo completo*: si en la expresión integral aparecen derivadas m-ésimas, ha de ser alcanzable un valor constante en el dominio del elemento para la derivada m-ésima cuando el tamaño del elemento tienda a cero.

Este criterio se satisface automáticamente si los polinomios que aparecen en la función de forma N son completos hasta el grado m-ésimo. Este criterio es asimismo equivalente al de deformación constante postulado en el Capítulo 2 (Sección 2.5). Sin embargo, esto debe satisfacerse sólo en el límite cuando $h \to 0$.

Si el grado de un polinomio completo empleado en el desarrollo mediante elementos finitos es $p \geq m$, *podrá averiguarse el orden de convergencia* observando la aproximación con la cual dicho polinomio puede seguir el desarrollo en serie de Taylor local de la incógnita **u**. Evidentemente, el orden de error será simplemente $O(h^{p+1})$ puesto que sólo podemos obtener correctamente términos hasta un grado p.

El conocimiento del orden de convergencia es de gran ayuda para averiguar la bondad de la aproximación cuando se estudian diferentes mallas de tamaños decrecientes, aunque en el Capítulo 14 se verá que esta velocidad asintótica de convergencia dificilmente se alcanza si aparecen singularidades en el problema. Una vez más, hemos reestablecido algunas de las condiciones que se examinaron en el Capítulo 2.

A este nivel no se estudiarán las aproximaciones que no satisfagan las condiciones de continuidad postuladas, excepto para hacer la observación de que en muchos casos pueden ser convergentes y ciertamente dar mejores resultados (véase Capítulo 11).

En lo anterior nos hemos referido a la convergencia de un tipo de elemento dado a medida que el tamaño de éste se reduce. A menudo esto se denomina *convergencia tipo h.*

Por otro lado, es posible considerar una subdivisión en elementos de un tamaño dado y obtener convergencia a la solución exacta incrementando el orden p de los polinomios del elemento. A esto se le llama *convergencia tipo p*, que obviamente está asegurada.

En general, la convergencia tipo p es más rápida por grado de libertad introducido. Ambos tipos se discuten más a fondo en el Capítulo 14.

PRINCIPIOS VARIACIONALES

9.9 ¿Qué son los "principios variacionales"?

¿Qué son los principios variacionales y cómo pueden utilizarse para determinar soluciones aproximadas a problemas de medios continuos? A estas cuestiones están dirigidas las secciones siguientes.

Definamos primero: un "principio variacional" especifica una cantidad escalar (funcional) Π, definida por una expresión integral

$$\Pi = \int_\Omega F\left(\mathbf{u}, \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}, \dots\right) d\Omega + \int_\Gamma E\left(\mathbf{u}, \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u}, \dots\right) d\Gamma \tag{9.61}$$

en la cual $\mathbf{u}$ es la función incógnita y F y E son operadores especificados. La solución para el problema del continuo es una función $\mathbf{u}$ que hace estacionario a Π con respecto a variaciones pequeñas $\delta\mathbf{u}$. Así pues, en el caso de los problemas del continuo, la "variación" es

$$\delta\mathbf{\Pi} = 0. \tag{9.62}$$

Cuando pueda encontrarse un "principio variacional", inmediatamente podrán establecerse medios para obtener soluciones aproximadas bajo la forma integral general adecuada para el análisis mediante elementos finitos.

Suponiendo un desarrollo con funciones de prueba en la forma acostumbrada [Ec.(9.3)]

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_1^n \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i$$

podemos sustituir ésta en la Ec.(9.61) y escribir

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_1}\delta\mathbf{a}_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_2}\delta\mathbf{a}_2 + \dots = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_n}\delta\mathbf{a}_n = 0 \tag{9.63}$$

Siendo esto cierto, para cualquier variación $\delta\mathbf{a}$ se obtiene un sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_n} \end{Bmatrix} = 0 \tag{9.64}$$

de las que podemos determinar los parámetros $\mathbf{a}_i$. Estas ecuaciones son expresiones integrales similares a las necesarias para la aproximación mediante elementos finitos, puesto que la definición inicial de Π se dio en función de integrales definidas dentro del dominio y en el contorno.

El proceso de encontrar la estacionaridad respecto a los parámetros $\mathbf{a}$ es un problema clásico y está asociado a los nombres de Rayleigh[12] y Ritz.[13] Dicho proceso es de gran importancia en el análisis por elementos finitos y ha sido identificado por muchos investigadores como "proceso variacional".

Si el funcional Π es de "segundo grado", o sea, si la función $\mathbf{u}$ y sus derivadas aparecen con exponentes menores o iguales a dos, la ecuación (9.64) se reducirá a una expresión lineal del tipo general similar a la Ec.(9.8), es decir,

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}} \equiv \mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = 0 \tag{9.65}$$

Se demuestra fácilmente que entonces la matriz $\mathbf{K}$ será siempre simétrica. Para ello consideremos la variación más general del vector $\partial\Pi/\partial\mathbf{a}$. Se puede escribir ésta así

$$\delta\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial\mathbf{a}_1}\left(\dfrac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_1}\right)\delta\mathbf{a}_1, \dfrac{\partial}{\partial\mathbf{a}_2}\left(\dfrac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{a}_1}\right)\delta\mathbf{a}_2, \dots \\ \vdots \end{bmatrix} \equiv \mathbf{K}_T\delta\mathbf{a} \tag{9.66}$$

donde $\mathbf{K}_T$ es generalmente conocida como matriz tangente, teniendo gran importancia en los análisis no lineales. Ahora, es fácil ver que

$$\mathbf{K}_{T_{ij}} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\mathbf{a}_i\,\partial\mathbf{a}_j} = \mathbf{K}_{T_{ji}}^T \tag{9.67}$$

Por consiguiente, $\mathbf{K}_T$ es simétrica.

Para un funcional de segundo grado se obtiene, de la ecuación (9.65),

$$\delta\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{a}}\right) = \mathbf{K}\delta\mathbf{a} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{K} = \mathbf{K}^T \tag{9.68}$$

y, por tanto, existiría simetría.

El hecho de que *aparezcan matrices simétricas siempre que exista un principio variacional es una de las ventajas más importantes del empleo de procedimientos variacionales para la discretización.* Sin embargo, a menudo surgen formas simétricas directamente a partir del método de Galerkin. En tales casos se concluye que el principio variacional existe, pero no es preciso usarlo directamente.

¿Cómo se presentan entonces dichos principios variacionales? ¿Es siempre posible construir uno para problemas continuos?

Para responder a la primera pregunta advirtamos que con frecuencia los aspectos físicos del problema pueden expresarse directamente en forma variacional. Teoremas como el de la minimización de la energía potencial total para el equilibrio de los sistemas mecánicos, el principio de mínima disipación de la energía en fluidos viscosos, etc., pueden ser conocidos del lector y son considerados por muchos como las bases de la formulación. Ya hemos hecho referencia anteriormente al primero de dichos principios en la Sección 2.4 del Capítulo 2.

Los principios variacionales de esta clase se llaman "naturales", pero desgraciadamente no existen para todos los problemas de medios continuos, mientras que sí pueden formularse siempre ecuaciones diferenciales perfectamente definidas.

Sin embargo, hay otra categoría de principios variacionales que podríamos denominar "imaginarios". Tales principios imaginarios se pueden construir siempre para cualquier problema expresado por ecuaciones diferenciales, ya sea aumentando el número de funciones incógnita $\mathbf{u}$, mediante las variables adicionales conocidas como multiplicadores de Lagrange, o bien por procedimientos que impongan un mayor grado de continuidad, como en los problemas de mínimos cuadrados. En las secciones que siguen se discutirán, respectivamente, tales principios variacionales "naturales" e "imaginarios".

Antes de proseguir, vale la pena hacer notar que además de que las ecuaciones que se obtienen por medios variacionales son simétricas, a veces resultan otras ventajas. Cuando son aplicables los principios variacionales "naturales", la cantidad Π puede presentar por sí misma un interés especial. Si ello es así, el procedimiento variacional presenta la ventaja de que el cálculo de dicha cantidad es fácil.

Observará el lector que si el funcional es de segundo grado y lleva a la ecuación (9.65), el "funcional" aproximado Π se puede escribir simplemente como

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{a}^T\mathbf{f} \tag{9.69}$$

Que esto es cierto puede ser fácilmente comprobado por el lector mediante una sencilla diferenciación.†

9.10 Los principios variacionales "naturales" y su relación con las ecuaciones diferenciales del problema

9.10.1 *Ecuaciones de Euler.* Si consideramos las definiciones expresadas en la Ecs. (9.61) y (9.62), observaremos que para hacer el funcional estacionario podemos escribir, tras diferenciar,

$$\delta\Pi = \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{A}(\mathbf{u})\,d\Omega + \int_\Gamma \delta\mathbf{u}^T\mathbf{B}(\mathbf{u})\,d\Gamma = 0. \tag{9.70}$$

Como la expresión anterior ha de ser cierta para cualquier variación $\delta\mathbf{u}$, deberá ser

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = 0 \qquad \text{en} \quad \Omega \tag{9.71}$$

y

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma$$

Si $\mathbf{A}$ coincide exactamente con las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema y $\mathbf{B}$ con sus condiciones de contorno, el principio variacional será *natural.* Las ecuaciones (9.70) y (9.71) son conocidas como las ecuaciones diferenciales de Euler que corresponden al principio variacional que exige la estacionaridad de Π. Es fácil demostrar que para todo principio variacional se puede establecer el sistema de ecuaciones de Euler correspondiente. Desafortunadamente, la inversa no es cierta y sólo ciertas formas de ecuaciones diferenciales son ecuaciones de Euler de un funcional variacional. En la sección siguiente consideraremos las condiciones necesarias de existencia de principios variacionales y daremos las normas para establecer Π a partir de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales adecuadas. En esta sección continuaremos suponiendo que el principio variacional es conocido.

Para ilustrar el procedimiento, consideremos un ejemplo concreto. Supongamos que el problema se especifica exigiendo la estacionaridad del funcional

† Obsérvese que

$$\delta\Pi = \tfrac{1}{2}\delta(\mathbf{a}^T)\mathbf{K}\mathbf{a} + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{K}\delta\mathbf{a} + \delta\mathbf{a}^T\mathbf{f}$$

Como $\mathbf{K}$ es simétrica,

$$\delta\mathbf{a}^T\mathbf{K}\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}^T\mathbf{K}\delta\mathbf{a}$$

y resulta

$$\delta\Pi = \delta\mathbf{a}^T(\mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f}) = 0$$

que es cierto para todo $\delta\mathbf{a}^T$ y, por tanto,

$$\mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = 0$$

$$\Pi = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} k \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 - Q\phi \right] d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{q}\phi \, d\Gamma \tag{9.72}$$

en el cual k y Q dependen sólo de la posición y $\delta\phi$ es tal que $\delta\phi = 0$ en Γ_ϕ donde Γ_ϕ y Γ_q son los contornos del dominio Ω.

Efectuemos la variación siguiendo las reglas de la diferenciación. Se puede escribir

$$\delta\Pi = \int_\Omega \left[k\frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + k\frac{\partial \phi}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) - Q\delta\phi \right] d\Omega - \int_{\Gamma_q} (\bar{q}\,\delta\phi) \, d\Gamma \tag{9.73}$$

Como

$$\delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\delta\phi) \tag{9.74}$$

podemos integrar por partes (como en la Sección 9.3) y obtener, teniendo en cuenta que $\delta\phi = 0$ en Γ_ϕ,

$$\delta\Pi = -\int_\Omega \delta\phi \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + Q \right] d\Omega + \int_{\Gamma_q} \delta\phi \left(k\frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q}\right) d\Gamma = 0 \tag{9.75a}$$

Esta expresión es similar a la Ec.(9.70) e inmediatamente vemos que las ecuaciones de Euler son

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\phi) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + Q && \text{en } \Omega \\ \mathbf{B}(\phi) &= k\frac{\partial \phi}{\partial n} - \bar{q} = 0 && \text{en } \Gamma_q \end{aligned} \tag{9.75b}$$

Si imponemos el valor de ϕ de manera que $\phi = \bar{\phi}$ en Γ_ϕ y $\delta\phi = 0$ en ese contorno, el problema será exactamente el que ya se ha discutido en la Sección 9.3 y el funcional (9.72) representará una manera alternativa de definir el problema de la *conducción bidimensional del calor*.

En este caso hemos "adivinado" el funcional, pero el lector observará que la operación variacional podría haberse efectuado para cualquier funcional dado, y establecer así sus correspondientes ecuaciones de *Euler*.

Continuemos con el problema para obtener una solución aproximada al problema lineal de la conducción del calor. Tomando, como siempre,

$$\phi \approx \hat{\phi} = \sum N_i a_i = \mathbf{N}\mathbf{a} \tag{9.76}$$

si sustituimos esta aproximación en la expresión del funcional Π [Ec.(9.72)], obtenemos

$$\begin{aligned} \Pi = \int_\Omega \frac{1}{2} k \left(\sum \frac{\partial N_i}{\partial x} a_i\right)^2 d\Omega + \int_\Omega \frac{1}{2} k \left(\sum \frac{\partial N_i}{\partial y} a_i\right)^2 d\Omega - \\ - \int_\Omega Q \sum N_i\, a_i \, d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{q} \sum N_i\, a_i \, d\Gamma \end{aligned} \tag{9.77}$$

Y diferenciando respecto a uno cualquiera de los parámetros a_j tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_j} = \int_\Omega k \left(\sum \frac{\partial N_i}{\partial x} a_i\right) \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega + \int k \left(\sum \frac{\partial N_i}{\partial y} a_i\right) \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega - \\ - \int_\Omega Q\, N_j \, d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{q}\, N_j \, d\Gamma \end{aligned} \tag{9.78}$$

y el sistema de ecuaciones que soluciona el problema es

$$\mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = 0 \tag{9.79}$$

con

$$\begin{aligned} K_{ij} = K_{ji} &= \int_\Omega k \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega + \int_\Omega k \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \\ f_j &= -\int_\Omega N_j Q \, d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_j \bar{q} \, d\Gamma \end{aligned} \tag{9.80}$$

Observará el lector que las ecuaciones de aproximación son aquí idénticas a las obtenidas en la Sección 9.5 para el mismo problema según el método de Galerkin. No resulta aquí, pues, ninguna ventaja del empleo de la formulación variacional, e incluso podemos predecir ahora que el método de Galerkin y el variacional deben dar la misma solución en los casos en que existan principios variacionales naturales.

9.10.2 *Relación del método de Galerkin con las aproximaciones mediante principios variacionales.* En el ejemplo precedente hemos visto que las aproximaciones obtenidas siguiendo principios variacionales y el método de los residuos ponderados de Galerkin son idénticas. Que esto es así se deduce directamente de la ecuación (9.70), en donde la variación se dedujo en función de las ecuaciones diferenciales originales y de las condiciones de contorno asociadas al problema.

Si consideramos la aproximación polinómica habitual [Ec. (9.3)]

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\mathbf{a}$$

podemos escribir que la variación de esta aproximación es

$$\delta\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\delta\mathbf{a} \tag{9.81}$$

e introduciendo la expresión anterior en (9.70), obtenemos

$$\delta\Pi = \delta\mathbf{a}^T \int_\Omega \mathbf{N}^T \mathbf{A}(\mathbf{Na})\, d\Omega + \delta\mathbf{a}^T \int_\Gamma \mathbf{N}^T \mathbf{B}(\mathbf{Na})\, d\Gamma \tag{9.82}$$

Siendo cierto lo anterior para cualquier $\delta\mathbf{a}$, será necesario que la expresión que quede entre paréntesis sea cero. Como el lector reconocerá inmediatamente, esto es simplemente la forma de Galerkin del método de los residuos ponderados analizada con anterioridad [Ec.(9.25)], y con esto queda demostrada la identidad de ambos procesos.

Hemos de subrayar, no obstante, que esto sólo es cierto si las ecuaciones de Euler del principio variacional coinciden con las ecuaciones que gobiernan el problema original. Por ello, el método de Galerkin tiene un mayor campo de aplicabilidad.

Hemos de hacer notar en este punto otra particularidad. Si consideramos un *sistema* de ecuaciones [Ec.(9.1)]

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \left\{ \begin{matrix} A_1(\mathbf{u}) \\ A_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \end{matrix} \right\} = \mathbf{0}$$

donde $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{Na}$, la ecuación de los residuos ponderados de Galerkin se convierte en (prescindiendo de las condiciones de contorno)

$$\int_\Omega \mathbf{N}^T \mathbf{A}(\hat{\mathbf{u}})\, d\Omega = 0 \tag{9.83}$$

Esta expresión no es única ya que podemos ordenar el sistema de ecuaciones $\mathbf{A}$ de muchas maneras. Sólo una de éstas corresponderá exactamente con las ecuaciones de Euler de un principio variacional (si éste existe), y el lector puede comprobar que para un sistema de ecuaciones ponderadas según el procedimiento de Galerkin, en el mejor caso, solamente una de las diferentes maneras de ordenar el vector $\mathbf{A}$ nos dará un sistema de ecuaciones simétrico.

Consideremos como ejemplo el caso de la conducción unidimensional del calor (Ejemplo 1, Sección 9.5), redefinido como sistema de ecuaciones con dos incógnitas: la temperatura ϕ y el flujo de calor q. Sin tener en cuenta por ahora las condiciones de contorno, podemos escribir dichas ecuaciones como sigue

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \left\{ \begin{matrix} q - \dfrac{d\phi}{dx} \\ \dfrac{dq}{dx} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 0 \\ Q \end{matrix} \right\} = 0 \tag{9.84}$$

o como sistema de ecuaciones lineales,

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{Lu} + \mathbf{b} = 0$$

en las que

$$\mathbf{L} \equiv \begin{bmatrix} 1, & -\dfrac{d}{dx} \\ \dfrac{d}{dx}, & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ Q \end{matrix} \right\} \qquad \mathbf{u} = \left\{ \begin{matrix} q \\ \phi \end{matrix} \right\} \tag{9.85}$$

Escribimos la función de prueba empleando una interpolación distinta para cada función

$$\mathbf{u} = \sum \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i \qquad \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i^1 & 0 \\ 0 & N_i^2 \end{bmatrix}$$

y aplicando el método de Galerkin se llega a un sistema habitual de ecuaciones lineales con

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_\Omega \mathbf{N}_i^T \mathbf{L} \mathbf{N}_j\, dx = \int_\Omega \begin{bmatrix} N_i^1 N_j^1, & -N_i^1 \dfrac{d}{dx} N_j^2 \\ N_i^2 \dfrac{d}{dx} N_j^1, & 0 \end{bmatrix} dx \tag{9.86}$$

Esta expresión proporciona, tras integrar por partes, un sistema de ecuaciones simétrico, † y

$$K_{ij} = K_{ji} \tag{9.87}$$

Si simplemente se invirtiera el orden de las ecuaciones, o sea, poniendo

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \dfrac{dq}{dx} \\ q - \dfrac{d\phi}{dx} \end{bmatrix} + \left\{ \begin{matrix} Q \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0 \tag{9.88}$$

la aplicación del método de Galerkin nos conduciría a ecuaciones asimétricas, muy distintas a las que aparecen utilizando principios variacionales. Este segundo tipo de aproximación de Galerkin ofrece claramente menos ventajas, debido a la pérdida de la simetría en las ecuaciones resultantes. Se ve fácilmente que el primer sistema corresponde exactamente con las ecuaciones de Euler de un principio variacional.

† Puesto que $\int N_i^1 \dfrac{d}{dx} N_j^2\, dx \equiv -\int N_j^2 \dfrac{d}{dx} N_i^1\, dx +$ términos de contorno.

9.11 Establecimiento de principios variacionales naturales en el caso de ecuaciones diferenciales lineales autoadjuntas

9.11.1 *Teoremas generales.* Las reglas generales para deducir principios variacionales naturales a partir de ecuaciones diferenciales no lineales son complicadas, e incluso las comprobaciones a efectuar para determinar si dichos principios existen no son nada sencillas. Sin embargo, Veinberg,[14] Tonti[15] y Oden,[16] entre otros matemáticos, han trabajado mucho en este campo.

El problema es más sencillo si las ecuaciones diferenciales son lineales, pudiéndose encontrar un estudio completo para este caso en los trabajos realizados por Mikhlin,[17,18] que se presentan brevemente en esta sección.

Sólo consideraremos aquí el establecimiento de principios variacionales para sistemas de ecuaciones lineales con condiciones de contorno *forzadas*, tales que al efectuar la variación satisfagan $\delta \mathbf{u} = 0$ en el contorno. La ampliación a condiciones de contorno naturales es fácil y la omitimos.

Escribiendo un sistema de ecuaciones diferenciales lineales en la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) \equiv \mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{b} = 0 \tag{9.89}$$

en donde $\mathbf{L}$ es un operador diferencial lineal, se puede demostrar que los principios variacionales lineales exigen que el operador $\mathbf{L}$ sea tal que

$$\int_\Omega \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{L} \boldsymbol{\gamma}\, d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{L} \boldsymbol{\psi}\, d\Omega + \text{t.c.} \tag{9.90}$$

cualesquiera que sean los conjuntos de funciones $\boldsymbol{\psi}$ y $\boldsymbol{\gamma}$. En lo anterior, "t.c." representa los términos de contorno, de los cuales prescindimos en este contexto. La propiedad requerida para el operador anterior es la de ser *autoadjunto* o *simétrico.*

Si el operador $\mathbf{L}$ es autoadjunto, se puede escribir el principio variacional inmediatamente como

$$\Pi = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\mathbf{u}^T \mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{b}\right] d\Omega + \text{t.c.} \tag{9.91}$$

Para comprobar la veracidad de la expresión anterior, hay que considerar su variación. Así pues, escribimos

$$\delta\Pi = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\delta\mathbf{u}^T \mathbf{L}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \delta(\mathbf{L}\mathbf{u}) + \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b}\right] d\Omega + \text{t.c.} \tag{9.92}$$

Teniendo en cuenta que para todo operador lineal

$$\delta(\mathbf{L}\mathbf{u}) \equiv \mathbf{L}\delta\mathbf{u} \tag{9.93}$$

y que, en virtud de la identidad (9.90), $\mathbf{u}$ y $\delta\mathbf{u}$ se pueden considerar como dos funciones cualesquiera, podemos escribir la Ec.(9.92) como sigue

$$\delta\Pi = \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T (\mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{b})\, d\Omega + \text{t.c.} \tag{9.94}$$

Observemos inmediatamente que el término entre paréntesis, o sea la ecuación de Euler del funcional, es idéntica a la ecuación postulada originalmente y, por consiguiente, está verificado el principio variacional.

Todo esto nos proporciona una manera sencilla de obtener y comprobar expresiones variacionales naturales para las ecuaciones diferenciales del problema.

Consideremos dos ejemplos.

Ejemplo 1. Primeramente un problema regido por una ecuación diferencial similar a la conducción del calor, esto es,

$$\nabla^2\phi + c\phi + Q = 0 \tag{9.95}$$

donde c y Q dependen sólo de la posición.

Podemos escribir lo anterior de la manera general expresada por la Ec. (9.89) siendo

$$\mathbf{L} \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, c\right] \qquad \mathbf{b} \equiv Q \tag{9.96}$$

Comprobando que $\mathbf{L}$ es un operador autoadjunto (lo que se deja para el lector como ejercicio), obtenemos inmediatamente un principio variacional

$$\Pi = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}\phi\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + c\phi\right) + Q\phi\right] dx\, dy \tag{9.97}$$

satisfaciendo ϕ las condiciones de contorno forzadas, o sea, $\phi = \hat{\phi}$ en Γ_ϕ. Integrando por partes los dos primeros términos, obtenemos

$$\Pi = -\int_\Omega \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{2}c\phi^2 - Q\phi\right] dx\, dy \tag{9.98}$$

teniendo en cuenta que los términos del contorno con ϕ prefijada no alteran el principio.

Ejemplo 2. El segundo problema se refiere al sistema de ecuaciones ya examinado en la sección anterior [Ecs. (9.84)-(9.85)]. De nuevo se puede comprobar que el operador es autoadjunto. El funcional se escribe ahora así

$$\Pi = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} q \\ \phi \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1, & -\frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dx}, & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \phi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q \\ \phi \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ q \end{Bmatrix} \right) dx =$$

$$= \int_\Omega \left(q^2 - q\frac{d\phi}{\partial x} + \phi\frac{dq}{dx} + \phi q \right) dx \qquad (9.99)$$

Se deja para el lector la comprobación de que la expresión anterior es correcta efectuando su variación.

Los dos ejemplos anteriores ilustran la sencillez de la aplicación de las expresiones generales. Observará el lector que el operador será normalmente autoadjunto si el orden de diferenciación es par. Si el orden es impar, el operador sólo será autoadjunto cuando esté representado por una matriz antisimétrica, como ocurre en el segundo ejemplo.

9.11.2 *Corrección para obtener operadores autoadjuntos.* A veces, un operador lineal que no sea autoadjunto puede corregirse de manera que se transforme en autoadjunto sin alterar la ecuación básica. Consideremos, por ejemplo, un problema regido por la siguiente ecuación diferencial lineal,

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \alpha\frac{d\phi}{dx} + \beta\phi + q = 0 \qquad (9.100)$$

donde α y β son funciones de x. Es fácil ver que el operador $\mathbf{L}$ es escalar:

$$L \equiv \frac{d^2}{dx^2} + \alpha\frac{d}{dx} + \beta \qquad (9.101)$$

y que no es autoadjunto.

Sea p una función de x, por el momento indeterminada. Demostraremos que es posible convertir la ecuación (9.100) en una forma autoadjunta al multiplicarla por esta función. El nuevo operador se transforma en

$$\overline{L} = pL \qquad (9.102)$$

Para comprobar la simetría con dos funciones cualesquiera ψ y γ, escribimos

$$\int_\Omega \psi(pL\gamma)\, dx = \int_\Omega \left[\psi p\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \psi p\alpha\frac{d\gamma}{dx} + \psi\beta p\gamma \right] dx \qquad (9.103)$$

Integrando por partes el primer término, obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(-\frac{d(\psi p)}{dx}\,\frac{d\gamma}{dx} + \psi p\alpha\frac{d\gamma}{dx} + \psi\beta p\gamma\, dx \right) dx + \text{t.c.} = \\ &= \int \left[-\frac{d\psi}{dx}\, p\, \frac{d\gamma}{dx} + \psi\frac{d\gamma}{dx}\left(p\alpha - \frac{dp}{dx} \right) + \psi\beta p\gamma \right] dx + \text{t.c.} \end{aligned} \qquad (9.104)$$

Los términos que presentan simetría (y, por tanto, son autoadjuntos) son el primero y el último. El término central sólo será simétrico si se anula, es decir, si

$$p\alpha - \frac{dp}{dx} = 0 \qquad (9.105)$$

o

$$\frac{dp}{p} = \alpha dx$$
$$p = e^{\int \alpha dx} \qquad (9.106)$$

Con esta expresión de p el operador se convertirá en autoadjunto, y podrá encontrarse fácilmente un principio variacional para el problema representado por la expresión (9.100).

Guymon *et al.*[19] han utilizado procedimientos similares para deducir formas variacionales en el caso de una ecuación de difusión por convección no autoadjunta. (Esta falta de simetría se observa en la ecuación que aparece en la Sección 9.5, Ejemplo 2.). Este problema se discute más a fondo en el Apéndice 7.

Un método similar para crear funcionales variacionales se puede extender al caso particular de que la Ec. (9.89) no sea lineal, y

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{u}, x, \ldots) \qquad (9.107)$$

Observando bien la Ec. (9.92) vemos que podríamos escribir

$$\delta(\mathbf{u}^T\mathbf{b}) = \delta(\mathbf{g}) \qquad (9.108)$$

si

$$\mathbf{g} = \int \mathbf{b}^T\, d\mathbf{u}$$

Esta integración es generalmente muy fácil de realizar.

9.12 ¿Máximo, mínimo o punto de ensilladura?

Hasta ahora, al estudiar principios variacionales hemos supuesto simplemente que en el punto de la solución $\delta\Pi = 0$, o sea, que el funcional es estacionario. Con frecuencia se desea saber si Π es un máximo, un mínimo, o simplemente un punto de ensilladura. Si se trata de un máximo o un mínimo la aproximación estará siempre "acotada", es decir, que nos dará valores aproximados de Π que serán mayores o menores que los correctos. Esto en sí puede ser de importancia práctica.

Cuando en cálculo elemental consideramos un punto estacionario de una función Π de una sola variable a, estudiamos la variación de $d\Pi$ con da y escribimos

$$d(d\Pi) = d\left(\frac{\partial \Pi}{\partial a}da\right) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2}(da)^2 \tag{9.109}$$

El signo de la segunda derivada determina si Π es un mínimo, un máximo, o simplemente estacionario (punto de ensilladura), tal como se muestra en la Figura 9.7. Por analogía con el cálculo de variaciones consideremos los incrementos de $\delta\Pi$. Teniendo en cuenta que la expresión general de esta cantidad viene dada por la Ec. (9.63), y empleando la expresión de la segunda derivada dada por la Ec. (9.66), podemos escribir en función de los parámetros de la discretización

$$\delta(\delta\Pi) \equiv \delta\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{a}}\right)^T \delta\mathbf{a} = \delta\mathbf{a}^T \delta\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{a}}\right) = \delta\mathbf{a}^T \mathbf{K}_T \delta\mathbf{a} \tag{9.110}$$

Si en la expresión anterior $\delta(\delta\Pi)$ es siempre negativa, es obvio que Π se estará aproximando a un máximo. Si es siempre positiva, Π será un mínimo. Pero si el signo es indeterminado, ello nos indica que existe un punto de ensilladura.

Puesto que $\delta\mathbf{a}$ es un vector arbitrario, lo afirmado equivale a la condición de que la matriz $\mathbf{K}_T$ sea definida negativa para un máximo o definida positiva para un mínimo. Así pues, la forma de la matriz $\mathbf{K}_T$ (o de $\mathbf{K}$ en problemas lineales, que es igual a ella) es de gran importancia en los problemas variacionales.

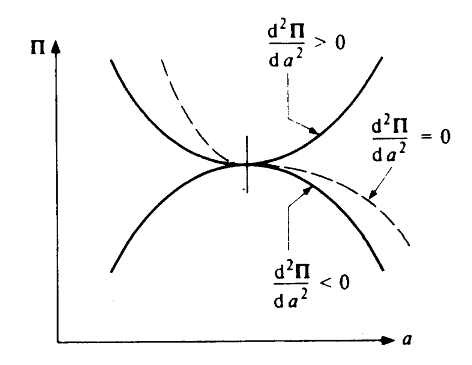


Figura 9.7 Máximo, mínimo y punto de ensilladura de un funcional Π de una variable.

9.13 Principios variacionales condicionados. Multiplicadores de Lagrange y funciones adjuntas

9.13.1 *Multiplicadores de Lagrange.* Consideremos el problema de hacer estacionario un funcional Π, función de la incógnita $\mathbf{u}$, la cual obedece un cierto sistema adicional de relaciones diferenciales

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{en } \Omega \tag{9.111}$$

Podemos introducir esta condición formando otro funcional

$$\overline{\Pi}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \Pi(\mathbf{u}) + \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}(\mathbf{u})\, d\Omega \tag{9.112}$$

en el cual $\boldsymbol{\lambda}$ es un conjunto de funciones de las coordenadas independientes en el dominio Ω conocidas como *multiplicadores de Lagrange*. La variación del nuevo funcional es ahora

$$\delta\overline{\Pi} = \delta\Pi + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}(\mathbf{u})\, d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\delta}\mathbf{C}(\mathbf{u})\, d\Omega \tag{9.113}$$

que es cero si $\mathbf{C}(\mathbf{u}) = 0$ (y, por tanto, $\boldsymbol{\delta}\mathbf{C} = 0$), y simultáneamente,

$$\delta\Pi = 0 \tag{9.114}$$

De una manera similar se pueden introducir condiciones en ciertos puntos o en el contorno. Por ejemplo, si se impone la condición de que $\mathbf{u}$ cumpla que

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{en } \Gamma \tag{9.115}$$

añadiremos al funcional original el término

$$\int_\Gamma \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{E}(\mathbf{u})\, d\Gamma \tag{9.116}$$

siendo $\boldsymbol{\lambda}$ ahora una función desconocida definida sólo en Γ. Alternativamente, si la condición definida por $\mathbf{C}$ es aplicable a uno o más puntos del sistema, entonces la simple adición de $\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{C}(\mathbf{u})$ al funcional original en dichos puntos introducirá un número discreto de condiciones.

Parece, por tanto, que siempre es posible modificar un funcional para incluir cualesquiera condiciones prescritas sin más que introducir funciones adicionales $\boldsymbol{\lambda}$. En el proceso de "discretización" tendremos que emplear ahora funciones de prueba para describir tanto $\mathbf{u}$ como $\boldsymbol{\lambda}$.

Escribiendo, por ejemplo,

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{N}\mathbf{a} \qquad \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \sum \bar{\mathbf{N}}_i \mathbf{b}_i = \bar{\mathbf{N}}\mathbf{b} \tag{9.117}$$

obtendremos un sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{c}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{a}} \\ \dfrac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{b}} \end{Bmatrix} = 0 \qquad \mathbf{c} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \tag{9.118}$$

del cual pueden obtenerse ambos conjuntos de parámetros **a** y **b**. Es, sin embargo, paradójico que el problema "condicionado" haya resultado tener mayor número de parámetros desconocidos que el original y realmente una solución más complicada. A pesar de todo, encontraremos que el empleo de los multiplicadores de Lagrange nos será muy útil para formular ciertas expresiones variacionales de física y haremos uso de ellos de forma más general en el Capítulo 12.

El hecho de que el número de parámetros aumente al introducir una condición quizás pueda ilustrarse mejor con un problema algebraicamente sencillo en el que se desea hallar el valor estacionario de una función de segundo grado de dos variables a_1 y a_2:

$$\Pi = 2a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + 18a_1 + 6a_2 \tag{9.119}$$

sujeta a la condición

$$a_1 - a_2 = 0 \tag{9.120}$$

La manera evidente de proceder sería introducir la "condición" en la función Π y obtener

$$\Pi = a_1^2 + 24a_1 \tag{9.121}$$

y para imponer la estacionaridad, escribir

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 = 2a_1 + 24 \qquad a_1 = a_2 = -12. \tag{9.122}$$

Introduciendo un multiplicador de Lagrange λ, se puede encontrar alternativamente la estacionaridad de

$$\bar{\Pi} = 2a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + 18a_1 + 6a_2 + \lambda(a_1 - a_2) \tag{9.123}$$

y escribir *tres* ecuaciones simultáneas

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a_1} = 0 \qquad \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a_2} = 0 \qquad \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial \lambda} = 0 \tag{9.124}$$

La solución del sistema anterior nos lleva de nuevo a la solución correcta

$$a_1 = a_2 = -12 \qquad \lambda = 6$$

pero con un esfuerzo considerablemente mayor. Desgraciadamente, en la mayoría de los problemas de medios continuos las condiciones no se pueden eliminar directamente de una forma tan fácil.†

Antes de proseguir, es interesante investigar la forma de las ecuaciones que resultan del funcional modificado Π expresado en la Ec.(9.112). Si las ecuaciones de Euler del funcional original Π formaban un sistema

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = 0 \tag{9.125}$$

tendremos entonces que

$$\delta\bar{\Pi} = \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{A}(\mathbf{u})\,d\Omega + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{C}(\mathbf{u})\,d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}^T\delta\mathbf{C}\,d\Omega \tag{9.126}$$

Sustituyendo las funciones de forma (9.117) podemos escribir, si las condiciones forman un sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}_1\mathbf{u} + \mathbf{C}_1 \\ &\delta\bar{\Pi} = \delta\mathbf{a}^T\int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{A}(\hat{\mathbf{u}})\,d\Omega + \delta\mathbf{b}^T\int_\Omega \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{L}_1\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_1)\,d\Omega + \\ &\qquad + \delta\mathbf{a}^T\int_\Omega (\mathbf{L}_1\mathbf{N})^T\hat{\boldsymbol{\lambda}}\,d\Omega = 0 \end{aligned} \tag{9.127}$$

Como esto ha de ser cierto para todas las variaciones $\delta\mathbf{a}$ y $\delta\mathbf{b}$, obtenemos un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{A}(\hat{\mathbf{u}})\,d\Omega + \int_\Omega (\mathbf{L}_1\mathbf{N})^T\hat{\boldsymbol{\lambda}}\,d\Omega = 0 \\ &\int_\Omega \bar{\mathbf{N}}^T(\mathbf{L}_1\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_1)\,d\Omega = 0 \end{aligned} \tag{9.128}$$

Si **A** es un sistema de ecuaciones lineales, el primer término de la ecuación primera es precisamente la aproximación variacional ordinaria sin condiciones

$$\mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} \tag{9.129}$$

e introduciendo de nuevo las funciones de prueba (9.117) podemos escribir las ecuaciones aproximadas (9.128) como un sistema lineal:

$$\mathbf{K}_c\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}, & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ab}^T, & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = 0 \tag{9.130}$$

† Szabo y Kassos[20] han empleado dicha eliminación directa en el campo de los elementos finitos, encontrando que, sin embargo, implica una considerable manipulación algebraica.

donde

$$\mathbf{K}_{ab}^T = \int_\Omega \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{L}_1 \mathbf{N}\, d\Omega \qquad (9.131)$$

Evidentemente el sistema de ecuaciones es simétrico pero ahora tiene ceros en la diagonal y, por tanto, la cantidad variacional Π es puramente estacionaria. Podrán encontrarse dificultades de cálculo más adelante a menos que el proceso que se siga para solucionar el sistema permita que haya términos nulos en la diagonal.

9.13.2 *Identificación de los multiplicadores de Lagrange. Condiciones de contorno forzadas y principios variacionales modificados.* Aunque se han introducido los multiplicadores de Lagrange como un artifico matemático, necesario para hacer que se cumplan ciertas condiciones exteriores que ha de satisfacer la expresión variacional original, encontraremos que en la mayoría de las situaciones reales pueden identificarse con ciertas cantidades físicas, de importancia para el modelo matemático original. Esta identificación se deducirá inmediatamente de la definición del principio variacional establecida en la Ec. (9.112) y a través de la segunda de las ecuaciones de Euler correspondientes al mismo. La variación $\delta\bar{\Pi}$, escrita en la Ec. (9.113), nos proporciona a través de sus dos primeros términos la ecuación de Euler original del problema correspondiente al funcional Π y la ecuación de la condición. El último término se puede siempre volver a escribir como sigue

$$\int_\Omega \boldsymbol{\lambda}^T \delta \mathbf{C}(\mathbf{u})\, d\Omega \equiv \int_\Omega \delta \mathbf{u}^T \mathbf{R}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u})\, d\Omega + \text{t.c.} \qquad (9.132)$$

imponiendo la condición de que

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) = 0 \qquad (9.133)$$

Esto nos permite identificar $\boldsymbol{\lambda}$.

En los tratados de cálculo variacional aparece con frecuencia esta identificación y dirigimos al lector al excelente texto de Washizu[21] donde encontrará numerosos ejemplos.

Aquí introduciremos esta identificación mediante el ejemplo considerado en la Sección 9.10.1. Como hemos visto, el principio variacional de la Ec.(9.72) establecía la ecuación que rige el problema de la conducción del calor y sus condiciones de contorno naturales, con tal que la condición de contorno forzada

$$\mathbf{C}(\phi) = \phi - \bar{\phi} = 0 \qquad (9.134)$$

se cumpliera en Γ_ϕ al elegir las funciones de prueba para ϕ.

Esta condición de contorno forzada puede considerarse siempre como una condición impuesta al problema original. Podemos escribir como sigue la expresión variacional condicionada

$$\bar{\Pi} = \Pi + \int_{\Gamma_\phi} \lambda(\phi - \bar{\phi})\, d\Gamma \qquad (9.135)$$

donde Π viene dado por la Ec.(9.72).

Al efectuar la variación, podemos escribir

$$\delta\bar{\Pi} = \delta\Pi + \int_{\Gamma_\phi} \delta\lambda(\phi - \bar{\phi})\, d\Gamma + \int_{\Gamma_\phi} \delta\phi\lambda\, d\Gamma \qquad (9.136)$$

con $\delta\Pi$ dado ahora por la expresión (9.75a) aumentada en la integral

$$\int_{\Gamma_\phi} \delta\phi k \frac{\partial\phi}{\partial n}\, d\Gamma \qquad (9.137)$$

de la cual habíamos prescindido anteriormente (puesto que habíamos supuesto $\delta\phi = 0$ en Γ_ϕ). Además de las condiciones expresadas en la Ec. (9.75b), exigimos ahora que se cumpla

$$\int_{\Gamma_\phi} \delta\lambda(\phi - \bar{\phi})\, d\Gamma + \int_{\Gamma_\phi} \delta\phi \left(\lambda + k\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) d\Gamma = 0 \qquad (9.138)$$

lo que debe ser cierto para todas las variaciones $\delta\lambda$ y $\delta\phi$. La primera integral simplemente reitera la condición

$$\phi - \bar{\phi} = 0 \quad \text{en } \Gamma_\phi \qquad (9.139)$$

La segunda *define* λ como

$$\lambda = -k\frac{\partial\phi}{\partial n} \qquad (9.140)$$

Teniendo en cuenta que $k\frac{\partial\phi}{\partial n}$ es igual al flujo $-q$ en el contorno Γ_ϕ, se ha conseguido una interpretación física del multiplicador.

Una vez que se ha identificado la variable lagrangiana, podemos establecer un principio variacional modificado reemplazando λ por su valor identificado.

Podríamos así escribir una nueva expresión para el ejemplo anterior:

$$\bar{\bar{\Pi}} = \Pi - \int_{\Gamma_\phi} k\frac{\partial\phi}{\partial n}(\phi - \bar{\phi})\, d\Gamma \qquad (9.141)$$

en la que Π viene dado de nuevo por la expresión (9.72), pero ϕ no está sometida a ninguna condición de contorno. El empleo de estos principios

variacionales modificados puede servir para restablecer la continuidad entre elementos, y parece que con este objeto han sido introducidos por Kikuchi y Ando[22]. En general, éstos presentan interesantes nuevos procedimientos para establecer principios variacionales útiles.

Chen y Mei[23] y Zienkiewicz *et al.*[24] han ampliado aún más estas expresiones. Washizu[21] analiza muchas de estas aplicaciones en el campo de la mecánica de estructuras. El lector puede comprobar que el principio variacional definido en la expresión (9.141) conduce a que todas las condiciones de contorno del ejemplo considerado se satisfacen automáticamente.

La utilización de principios variacionales modificados devuelve el problema al número inicial de funciones o parámetros incógnita por lo que resulta ventajosa desde el punto de vista del cálculo.

9.13.3 *Un principio variacional general. Funciones y operadores adjuntos.* El método de los multiplicadores de Lagrange conduce a un procedimiento inmediato para "crear" un principio variacional para cualquier sistema de ecuaciones:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = 0 \tag{9.142}$$

Si consideramos las ecuaciones anteriores como un sistema de condiciones, podemos obtener en general un funcional variacional sin más que hacer $\Pi = 0$ en la Ec. (9.112) y escribir

$$\overline{\Pi} = \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A}(\mathbf{u})\, d\Omega \tag{9.143}$$

imponiendo ahora la condición de estacionaridad para todas las variaciones $\delta\boldsymbol{\lambda}$ y $\delta\mathbf{u}$. La nueva expresión variacional ha sido, sin embargo, introducida a expensas de duplicar el número de variables del problema discretizado. Considerando únicamente el caso de ecuaciones lineales, o sea,

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{g} = 0 \tag{9.144}$$

y discretizando vemos que, siguiendo los pasos implicados en las ecuaciones (9.126) a (9.130), el sistema final de ecuaciones adquiere ahora la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ab}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} = 0 \tag{9.145}$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ab}^T &= \int_\Omega \bar{\mathbf{N}} \mathbf{L}^T \mathbf{N}\, d\Omega \\ \mathbf{f} &= \int_\Omega \bar{\mathbf{N}}^T \mathbf{g}\, d\Omega \end{aligned} \tag{9.146}$$

Las ecuaciones son completamente independientes una de otra y el segundo sistema se puede resolver separadamente para obtener todos los parámetros **a**, que describen las incógnitas en las que estábamos originalmente interesados, sin considerar los parámetros **b**. Obsérvese que este segundo sistema de ecuaciones es *idéntico al que resulta de seguir un proceso, a primera vista arbitrario, de residuos ponderados.* Hemos, pues, cerrado el ciclo y obtenido las expresiones de residuos ponderados de la Sección 9.9 a partir de un principio variacional general.

La función $\boldsymbol{\lambda}$ que aparece en el principio variacional de la Ec. (9.143) se conoce como *función adjunta de* **u**.

Efectuando la variación de la Ec. (9.143) es fácil ver que las ecuaciones de Euler correspondientes son tales que

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = 0 \tag{9.147}$$

y

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{u}) = 0 \tag{9.148}$$

donde el operador $\mathbf{A}^*$ es tal que

$$\int \boldsymbol{\lambda}^T \delta\mathbf{A}(\mathbf{u}) d\Omega = \int \delta\mathbf{u}^T \mathbf{A}^*(\lambda)\, d\Omega \tag{9.149}$$

El operador $\mathbf{A}^*$ es el llamado operador adjunto y solamente aparece en problemas lineales (ver Apéndice 7).

Para comprender el significado total del operador adjunto se recomienda al lector que consulte textos de matemáticas.[25]

9.14 Principios variacionales condicionados. Funciones de penalización y el método de los mínimos cuadrados

9.14.1 *Funciones de penalización.* En la sección anterior hemos visto cómo el proceso de introducción de multiplicadores de Lagrange nos permite obtener principios variacionales condicionados a expensas de aumentar el número total de incógnitas. Más aún, hemos mostrado que incluso en problemas lineales las ecuaciones algebraicas que han de resolverse se complican con la aparición de términos diagonales nulos. En esta sección consideraremos un procedimiento alternativo para la introducción de condiciones carente de estos inconvenientes.

Considerando nuevamente el problema de obtener la estacionaridad de Π con un sistema de condiciones $\mathbf{C}(\mathbf{u}) = 0$ en el dominio Ω, observamos que el producto

$$\mathbf{C}^T\mathbf{C} = C_1^2 + C_2^2 + \dots \tag{9.150}$$

donde

$$\mathbf{C}^T = [C_1,\ C_2,\ \dots]$$

debe ser siempre una cantidad positiva o nula. Evidentemente se encuentra este último valor cuando se satisfacen las condiciones y obviamente la variación

$$\delta(\mathbf{C}^T\mathbf{C}) = 0 \tag{9.151}$$

cuando el producto alcanza dicho mínimo.

Ahora podemos escribir inmediatamente un nuevo funcional,

$$\overline{\overline{\Pi}} = \Pi + \alpha \int \mathbf{C}^T(\mathbf{u})\mathbf{C}(\mathbf{u})\, d\Omega \tag{9.152}$$

donde α es un "número de penalización", e imponer que la solución del problema condicionado sea estacionaria. Si Π es de por sí un mínimo de la solución, α debe ser entonces un número positivo. La solución obtenida haciendo estacionario el funcional $\overline{\overline{\Pi}}$ satisfará las condiciones sólo aproximadamente. Cuanto mayor sea el valor de α más cerca estaremos de satisfacer las condiciones. Más aún, parece evidente que el procedimiento es más adecuado para casos en que Π sea un mínimo (o máximo) absoluto, pero incluso se puede usar provechosamente cuando es simplemente un punto de ensilladura. El procedimiento es igualmente aplicable tanto para condiciones en el contorno, como para simples condiciones aisladas. En este último caso no es necesario efectuar la integración.

Para aclarar ideas consideremos de nuevo el problema algebraico de la Sección 9.13, en donde se buscaba hacer estacionario el funcional dado por la Ec. (9.119) sujeto a una condición. Siguiendo el método de la función de penalización podríamos buscar ahora el mínimo del funcional

$$\overline{\overline{\Pi}} = 2a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + 18a_1 + 6a_2 + \alpha(a_1 - a_2)^2 \tag{9.153}$$

respecto de la variación de ambos parámetros a_1 y a_2. Escribiendo las dos ecuaciones simultáneas

$$\frac{\partial\overline{\overline{\Pi}}}{\partial a_1} = 0 \qquad \frac{\partial\overline{\overline{\Pi}}}{\partial a_2} = 0 \tag{9.154}$$

encontramos que a medida que el valor de α aumenta nos acercamos a la solución correcta. En la Tabla 9.1 se muestran los resultados que demuestran la convergencia.

Observará el lector que en un problema formulado de la forma precedente la condición no introduce parámetros incógnita adicionales, pero tampoco disminuye su número inicial. Si el principio variacional original es de mínimo,

TABLA 9.1

α	=	1	2	6	10	100
a_1	=	−12·00	−12·00	−12·00	− 12·00	−12·00
a_2	=	−13·50	−13·00	−12·43	− 12·78	−12·03

las matrices obtenidas por este procedimiento serán siempre de definición marcadamente positiva.

El método de las funciones de penalización ha demostrado ser muy efectivo para aplicaciones prácticas, [26] y en realidad muchas veces se emplea intuitivamente. Una de tales aplicaciones "intuitivas" se ha efectuado ya cuando impusimos los valores de los parámetros de contorno de la forma indicada en el Capítulo 1, Sección 1.4.

En el ejemplo allí presentado (y frecuentemente en el ensamblaje de ecuaciones de elementos finitos), las condiciones de contorno forzadas no se introducen *a priori*, y el problema da por resultado, tras el ensamblaje, un sistema de ecuaciones

$$\mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = 0 \tag{9.155}$$

que se puede obtener de un funcional (si $\mathbf{K}$ es simétrica)

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{a}^T\mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{a}^T\mathbf{f} \tag{9.156}$$

Introduciendo un valor de a_1, o sea, escribiendo

$$a_1 - \bar{a}_1 = 0 \tag{9.157}$$

se puede modificar el funcional para dar

$$\overline{\overline{\Pi}} = \Pi + \alpha(a_1 - \bar{a}_1)^2 \tag{9.158}$$

obteniéndose

$$\overline{\overline{K}}_{11} = K_{11} + 2\alpha \qquad \overline{\overline{f}}_1 = f_1 - 2\alpha\bar{a}_1 \tag{9.159}$$

quedando invariables el resto de los coeficientes de la matriz. Este procedimiento es el mismo que adoptamos en el Capítulo 1 para modificar las ecuaciones, introduciendo valores dados de a_1 (aquí 2α sustituye a α,

el "número elevado" de la Sección 1.4). Campbell[27] ha estudiado muchas aplicaciones de esta naturaleza "discreta".

Como segundo ejemplo consideraremos el problema de la flexión de una viga, examinado ya en el Capítulo 2 (Sección 2.10). Este problema se puede plantear como la minimización de la energía potencial total, dada por

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^L wq\,dx \qquad (9.160)$$

Como la formulación anterior exige que w sea de continuidad C_1, es interesante investigar la posibilidad de una reformulación que imponga sólo continuidad C_0. Tal alternativa sería imponer la minimización de

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2}EI\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 dx - \int_0^L wq\,dx \qquad (9.161)$$

sujeta a la condición

$$C \equiv \frac{dw}{dx} - \theta = 0 \qquad (9.162)$$

Evidentemente, θ es aquí la aproximación del giro y Π es ahora una función de dos variables, θ y w, que puede ser interpolada con continuidad C_0.

Podemos introducir ahora una expresión variacional modificada usando la función de penalización:

$$\overline{\overline{\Pi}} = \Pi + \alpha\int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \theta\right)^2 \qquad (9.163)$$

donde α es un número grande.

El ingeniero de estructuras reconocerá inmediatamente el significado físico de α, que no es otro que el de la rigidez al esfuerzo cortante

$$\alpha = \frac{1}{2}GA \qquad (9.164)$$

y que la formulación presentada corresponde a una viga en la que las flechas y los giros de las secciones varían independientemente, y el término adicional representa la energía de deformación absorbida por los esfuerzos cortantes.

Los elementos de placa y láminas gruesas estudiados en el segundo volumen no son sino extensiones del proceso expuesto aquí.

En otro contexto,[26,28] es fácil demostrar que el empleo de un coeficiente de Poisson elevado ($\nu \to 0,5$) para el estudio de sólidos o fluidos incompresibles

equivale de hecho a introducir un término de penalización para suprimir toda compresibilidad permitida por una variación arbitraria del desplazamiento.

El uso de una función de penalización en el contexto de elementos finitos presenta ciertas dificultades:

Primero, el funcional condicionado (9.152) lleva a ecuaciones de la forma

$$(\mathbf{K}_1 + \alpha\mathbf{K}_2)\mathbf{a} + \mathbf{f} = 0 \qquad (9.165)$$

donde $\mathbf{K}_1$ deriva de las funciones originales y $\mathbf{K}_2$ de las condiciones impuestas. Cuando α aumenta, la ecuación anterior degenera en:

$$\mathbf{K}_2\mathbf{a} = -\mathbf{f}/\alpha \to 0$$

y $\mathbf{a} = 0$ a menos que $\mathbf{K}_2$ sea una matriz singular. Esta singularidad no se produce siempre y en el Capítulo 12 examinaremos los procedimientos para introducirla.

Segundo, con valores de α finitos pero elevados se encuentran dificultades numéricas. Teniendo en cuenta que los errores de discretización pueden ser de orden comparable a los debidos a no *satisfacerse* las condiciones, podemos hacer

$$\alpha = \text{constante}(1/h)^n$$

asegurando una convergencia hacia la solución correcta. Fried[29,30] estudia detalladamente este problema.

En la referencia 31 se encontrará un estudio más general acerca del tema completo, así como en el Capítulo 12 donde se aclara la relación entre los multiplicadores de Lagrange y las formas penalizadas.

9.14.2 *Aproximación mediante mínimos cuadrados.* En la Sección 9.13.3 hemos visto cómo mediante principios variacionales condicionados se puede obtener un principio variacional general si las ecuaciones de las condiciones se transforman en las ecuaciones que gobiernan el problema

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}(\mathbf{u}) \qquad (9.166)$$

Obviamente se puede seguir el mismo procedimiento para el método de la función de corrección imponiendo que $\Pi = 0$ en la Ec. (9.152). Podemos, por tanto, escribir una "expresión variacional"

$$\overline{\overline{\Pi}} = \int_\Omega (A_1^2 + A_2^2 + \cdots)\,d\Omega = \int_\Omega \mathbf{A}^T(\mathbf{u})\mathbf{A}(\mathbf{u})\,d\Omega \qquad (9.167)$$

para cualquier sistema de ecuaciones diferenciales. En la expresión anterior se supone que $\mathbf{u}$ satisface las condiciones de contorno (condición de contorno

forzada), y se prescinde del parámetro α puesto que éste se transforma simplemente en un multiplicador.

Evidentemente la expresión anterior equivale simplemente a la condición de que la suma de los cuadrados de los residuos de las ecuaciones diferenciales sea mínima para la solución correcta. Dicho mínimo es obviamente cero, y el proceso es simplemente el conocido método de aproximación de *mínimos cuadrados.*

Es igualmente evidente que la solución correcta podría obtenerse minimizando cualquier funcional de la forma

$$\overline{\overline{\Pi}} = \int_\Omega (p_1 A_1^2 + p_2 A_2^2 + \cdots)\, d\Omega = \int_\Omega \mathbf{A}^T(\mathbf{u})\mathbf{p}\mathbf{A}(\mathbf{u})\, d\Omega \tag{9.168}$$

donde p_1, p_2, ... , etc., son funciones o constantes de valor positivo y $\mathbf{p}$ es una matriz diagonal

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 & & & 0 \\ & p_2 & & \\ & & p_3 & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{9.169}$$

La anterior alternativa es conveniente a veces puesto que da diferente importancia a la satisfacción de componentes individuales de la ecuación y permite mayor libertad para escoger la solución aproximada. Una vez más, dicha función de ponderación se podría escoger de manera que asegurase una relación constante entre los términos contribuidos por los distintos elementos, aunque este método no ha sido todavía puesto en práctica.

Los métodos de mínimos cuadrados del tipo que acabamos de mostrar constituyen un procedimiento alternativo muy eficaz para obtener formas integrales a partir de las que se puede iniciar una solución aproximada, habiéndose usado recientemente con considerable provecho.[32,33] Puesto que los principios variacionales de mínimos cuadrados se pueden escribir para *cualquier* sistema de ecuaciones diferenciales sin introducir variables adicionales, se plantea la pregunta de cuál es la diferencia entre éstas y las obtenidas de los *principios variacionales naturales* examinados previamente. Efectuando la variación en algún caso particular, encontrará el lector que las ecuaciones de Euler que se obtienen ya no coinciden con las ecuaciones diferenciales originales, sino que resultan ser derivadas de mayor orden de las mismas. Esto introduce la posibilidad de que, si se utilizan condiciones de contorno incorrectas, aparezcan soluciones falsas. Aún más, generalmente se necesitarán funciones de prueba cuyo orden de continuidad sea superior. Esto puede ser un inconveniente grave, pero frecuentemente evitable definiendo el problema originalmente mediante un sistema de ecuaciones de menor orden.

Consideramos ahora la forma general de las ecuaciones discretizadas que resultan de la aproximación por mínimos cuadrados en el caso de los sistemas de ecuaciones lineales (prescindiendo de nuevo de las condiciones de contorno que se impongan). Así pues, si tomamos

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{b} \tag{9.170}$$

y empleamos la aproximación habitual

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\mathbf{a} \tag{9.171}$$

podemos escribir, tras sustituir en (9.168),

$$\overline{\overline{\Pi}} = \int [(\mathbf{L}\mathbf{N})\mathbf{a} + \mathbf{b}]^T \mathbf{p} [(\mathbf{L}\mathbf{N})\mathbf{a} + \mathbf{b}]\, d\Omega \tag{9.172}$$

y

$$\delta\overline{\overline{\Pi}} = \int_\Omega \delta\mathbf{a}^T(\mathbf{L}\mathbf{N})^T\mathbf{p}[(\mathbf{L}\mathbf{N})\mathbf{a}+\mathbf{b}]\, d\Omega + \int_\Omega [(\mathbf{L}\mathbf{N})\mathbf{a}+\mathbf{b}]^T\mathbf{p}(\mathbf{L}\mathbf{N})\delta\mathbf{a}\, d\Omega \tag{9.173}$$

o, puesto que $\mathbf{p}$ es simétrica,

$$\delta\overline{\overline{\Pi}} = \delta\mathbf{a}^T \left\{ \left[2\int_\Omega (\mathbf{L}\mathbf{N})^T\mathbf{p}(\mathbf{L}\mathbf{N})\, d\Omega \right] \mathbf{a} + \int_\Omega (\mathbf{L}\mathbf{N})^T\mathbf{p}\mathbf{b}\, d\Omega \right\} \tag{9.174}$$

Esto conduce inmediatamente a la ecuación de la aproximación bajo su forma usual:

$$\mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = 0 \tag{9.175}$$

y el lector puede observar que la matriz $\mathbf{K}$ es simétrica y definida positiva.

Para ilustrar lo anterior con un ejemplo real, consideremos un problema regido por la ecuación (9.95) de este capítulo, para el cual ya hemos obtenido una expresión variacional *natural* [Ec.(9.98)] en el que sólo estaban implicadas las derivadas primeras que exigen continuidad C_0 para $\mathbf{u}$. Si utilizamos ahora el operador $\mathbf{L}$ y el término $\mathbf{b}$ definido en la Ec. (9.96), obtenemos el sistema de ecuaciones de la aproximación, donde

$$\begin{aligned} K_{ij} &= 2\int_\Omega (\nabla^2 N_i + cN_i)(\nabla^2 N_j + cN_j)\, dx\, dy \\ f_i &= \int_\Omega (\nabla^2 N_i + cN_i) Q\, dx\, dy \end{aligned} \tag{9.176}$$

Observará el lector que en este caso es necesario que las funciones de forma $\mathbf{N}$ sean de continuidad C_1.

Un procedimiento alternativo para evitar esta dificultad es escribir la Ec. (9.95) como sistema de primer orden. Este puede escribirse así

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial \phi x}{\partial x} + \dfrac{\partial \phi y}{\partial y} + c\phi + Q \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x} - \phi_x \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} - \phi_y \end{array} \right\} = 0 \tag{9.177}$$

o, introduciendo un vector $\mathbf{u}$ como incógnita,

$$\mathbf{u}^T = [\phi, \phi_x, \phi_y] = (\mathbf{Na})^T \tag{9.178}$$

la forma lineal general (9.170) puede escribirse como

$$\mathbf{Lu} + \mathbf{b} = 0$$

donde

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} c, & \dfrac{\partial}{\partial x}, & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}, & -1, & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}, & 0, & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} Q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{9.179}$$

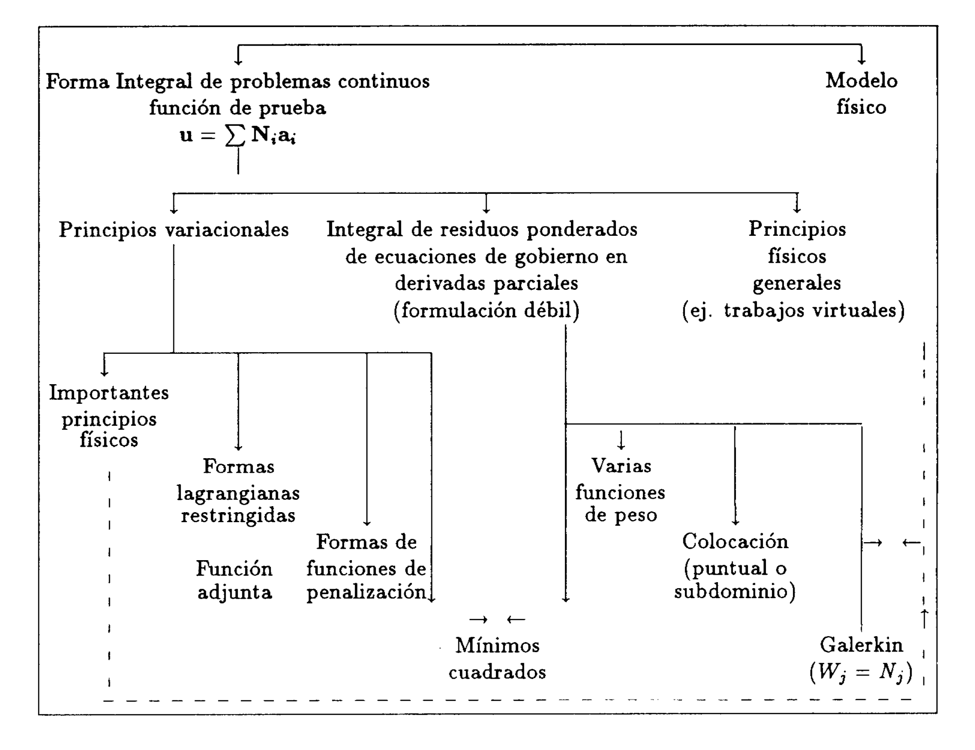
El lector puede sustituir ahora dicha ecuación en la Ec.(9.174) para obtener las ecuaciones de la aproximación bajo formas que sólo exigen un orden de continuidad C_0, obtenido, sin embargo, a costa de introducir variables adicionales. Estas formas se han empleado extensivamente dentro del contexto de elementos finitos.[32,33]

9.15 Observaciones finales

En este extenso capítulo se han presentado las posibilidades generales de empleo del método de los elementos finitos para casi todo problema matemático o físico que admita un modelo matemático. Los procedimientos esenciales de la aproximación se han expuesto de la forma más sencilla posible, presentando al mismo tiempo un panorama absolutamente completo que debe permitir entender al lector toda la literatura especializada y desde luego efectuar ejercicios por su cuenta. En los capítulos que siguen

TABLA 9.2

APROXIMACIÓN MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS



aplicaremos a distintos problemas reales únicamente una selección limitada de los métodos que aquí se han mencionado. No obstante, en algunos mostraremos que es posible efectuar determinadas ampliaciones del proceso (Capítulo 12), y en otros (Capítulo 11) cómo la violación de algunas de las reglas expuestas aquí puede efectuarse provechosamente.

Los numerosos procedimientos de aproximación examinados caen dentro de varias categorías. Para recordar éstas al lector, se presenta en el Cuadro 9.2 una clasificación de los métodos seguidos *aquí* y en el Capítulo 2. Solamente uno de los aspectos del método de los elementos finitos mostrados en el cuadro no ha sido considerado aquí y es el *modelo físico directo*. En dichos modelos se parte de un concepto "atómico" más que de uno continuo. A pesar de que las posibilidades que ofrecen dichos modelos son de gran interés, su estudio cae fuera del alcance de este libro.

En todos los problemas continuos examinados, el primer paso es siempre elegir funciones de forma o de prueba adecuadas. Ya se han introducido

algunas expresiones sencillas de dichas funciones a medida que ha sido necesario, pero pueden utilizarse algunas de las funciones de forma más elaboradas presentadas en los ejemplos de elasticidad. El lector que haya captado la esencia del presente capítulo, no tendrá ninguna dificultad para aplicar el método de los elementos finitos a cualquier problema físico debidamente definido. Se puede consultar las referencias 34 a 38 para ampliar la lectura.

Los métodos tratados no incluyen específicamente dos técnicas conocidas: los métodos de *diferencias finitas* y los métodos de *solución de contorno* (a veces llamados elementos de contorno). En un sentido general éstos pertenecen al *método de los elementos finitos generalizados* que se han discutido aquí.[34]

1. Los procedimientos de diferencias finitas siempre representan una aproximación basada en funciones de forma locales, discontínuas, con ponderación por colocación (aunque la derivación real del algoritmo de aproximación se basa en desarrollos de Taylor y es generalmente más simple).
   Dado que los métodos de Galerkin o variacionales dan, en un sentido energético, la aproximación óptima, este subconjunto tiene únicamente la ventaja de su simplicidad computacional, a menudo a costa de pérdida de precisión.
2. Los métodos de solución de contorno eligen las funciones de prueba de forma que la ecuación de gobierno se satisfaga automáticamente. Comenzando, por tanto, a partir de la ecuación general de aproximación (9.25) se observa que sólo restan los términos de contorno. Volveremos sobre tales aproximaciones en el Capítulo 13.

Referencias

1. S.H. CRANDALL, *Engineering Analysis*, McGraw-Hill, 1956.
2. B.A. FINLAYSON, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*, Academic Press, 1972.
3. R.A. FRAZER, W.P. JONES y S.W. SKEN, *Approximations to functions and to the solutions of differential equations*, Aero. Research Committee Report 1799, 1937.
4. C.B. BIEZENO y R. GRAMMEL, *Technische Dynamik*, p. 142, Springer-Verlag, 1933.
5. B.G. GALERKIN, "Solución en serie de algunos problemas de equilibrio elástico de barras y placas" (ruso), *Vestn. Inzh. Tech.*, **19**, pp. 897–908, 1915.
6. Atribuido también a BUBNOV, 1913: véase S. C. MIKHLIN, *Variational Methods in Mathematical Physics*, Macmillan, 1964.
7. P.TONG, "Exact solution of certain problems by the finite element method", *J.AIAA*, **7**, pp. 179–180, 1969.
8. R.V. SOUTHWELL, *Relaxation Methods in Theoretical Physics*, Clarendon Press, 1946.

9. R.S. VARGA, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, 1962.
10. S. TIMOSHENKO y J.N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, 2nd. ed., McGraw-Hill, 1951.
11. L.V. KANTOROVITCH y V.I. KRYLOV, *Approximate Methods of Higher Analysis*, Wiley (International), 1958.
12. (J.W. STRUTT)(Lord Rayleigh), "On the theory of resonance", *Trans. Roy. Soc. (London)*, **A 161**, pp. 77–118, 1870.
13. W. RITZ, "Über eine neue Methode zur Lösung gewissen Variations - Probleme der mathematischen Physik", *J. Reine angew. Math.*, **135**, pp. 1–61, 1909.
14. M.M. VEINBERG, *Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators*, Holden-Day, 1964.
15. E. TONTI, "Variational formulation of non-linear differential equations", *Bull. Acad. Roy. Belg. (Classe Sci.)*, **55**, pp. 137–65 y 262–78, 1969.
16. J.T. ODEN, "A general theory of finite elements – I: Topological considerations", pp. 205–21, y "II: Applications", pp. 247–60, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **1**, 1969.
17. S.C. MIKHLIN, *Variational Methods in Mathematical Physics*, Macmillan, 1964.
18. S.C. MIKHLIN, *The Problems of the Minimum of a Quadratic Functional*, Holden-Day, 1965.
19. G.L. GUYMON, V.H. SCOTT y L.R. HERRMANN, "A general numerical solution of the two-dimensional differential-convection equation by the finite element method", *Water Res.*, **6**, pp. 1611–15, 1970.
20. B.A. SZABO y T. KASSOS, "Linear equation constraints in finite element approximations", *Int. J. Num. Meth. Eng*, **9**, pp. 563–80, 1975.
21. K. WASHIZU, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 2nd. ed., Pergamon Press, 1975.
22. F. KIKUCHI y Y. ANDO, "A new variational functional for the finite element method and its application to plate and shell problems", *Nucl. Eng. Des.*, **21**, pp. 95–113, 1972.
23. H.S. CHEN y C.C. MEI, *Oscillations and water forces in an offshore harbour*, Ralph M. Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics, Report 190, Cambridge, Mass., 1974.
24. O.C. ZIENKIEWICZ, D.W. KELLY y P. BETTESS, "The coupling of the finite element method and boundary solution procedures", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**, pp. 355–75, 1977.
25. I. STAKGOLD, Boundary Value Problems of Mathematical Physics, MacMillan, 1967.
26. O.C. ZIENKIEWICZ, "Constrained variational principles and penalty function methods in the finite element analysis", *Lecture Notes in Mathematics*, No. 363, pp. 207–14, Springer-Verlag, 1974.
27. J. CAMPBELL, *A finite element system for analysis and design*, Ph. D. Thesis, Swansea, 1974.
28. D.J. NAYLOR, "Stresses in nearly incompressible materials for finite elements with application to the calculation of excess pore pressures", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **8**, pp. 443–60, 1974.
29. I. FRIED, "Finite element analysis of incompressible materials by residual energy balancing", *Int. J. Solids Struct.*, **10**, pp. 993–1002, 1974.
30. I. FRIED, "Shear in C^0 and C^1 bending finite elements", *Int. J. Solids Struct.*,

9, pp. 449–460, 1973.
31. O.C. ZIENKIEWICZ y E. HINTON, "Reduced integration, function smoothing and non-conformity in finite element analysis", *J. Franklin Inst.*, **302**, pp. 443–461, 1976.
32. P.P. LYNN and S.K. ARYA, "Finite elements formulation by the weighted discrete least squares method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **8**, pp. 71–90, 1974.
33. O.C. ZIENKIEWICZ, D.R.J. OWEN y K.N. LEE, "Least square finite element for elasto-static problems - use of reduced integration", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **8**, pp. 341–58, 1974.
34. O.C. ZIENKIEWICZ y K. MORGAN, *Finite Elements and Approximation*, Wiley, 1983.
35. E.B. BECKER, G.F. CAREY and J.T. ODEN, *Finite Elements: An Introduction*, Vol 1, Prentice Hall, 1981.
36. I. FRIED, *Numerical Solution of Differential Equations*, Academic Press, New York, 1979.
37. A.J. DAVIES, *The Finite Element Method*, Clarendon, Oxford, 1980.
38. C.A.T. FLETCHER, *Computational Galerkin Methods*, Springer Verlag, 1984.

Capítulo 10

PROBLEMAS DE CAMPOS EN RÉGIMEN PERMANENTE: TRANSMISIÓN DEL CALOR, POTENCIAL ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO, FLUJO DE UN FLUIDO, ETC.

10.1 Introducción

Si bien los detalles de la mayor parte de los capítulos precedentes han tratado de problemas relativos a medios continuos elásticos, los mismos métodos generales son aplicables a una gran variedad de problemas físicos. Esta posibilidad se ha señalado ya en el Capítulo 9, y en éste estudiaremos con más detalle una amplia categoría de dichos problemas.

En primer lugar, consideraremos situaciones regidas por la ecuación "cuasi-armónica" general, de la que son casos particulares las conocidas ecuaciones de Laplace y Poisson[1–6]. Los problemas físicos abarcados por esta categoría son numerosos y variados. Citando sólo aquéllos que aparecen con mayor frecuencia en la ingeniería, señalaremos:

- Transmisión del calor por conducción
- Filtración a través de medios porosos
- Flujo irrotacional de fluidos ideales
- Distribución del potencial eléctrico (o magnético)
- Torsión de barras prismáticas
- Flexión de vigas prismáticas, etc.
- Lubricación de cojinetes

La formulación desarrollada en este capítulo puede aplicarse por igual a todos estos problemas, por lo que se hará poca mención de las magnitudes físicas reales. Con la misma facilidad pueden tratarse dominios isótropos que anisótropos.

En la primera parte del capítulo se estudian problemas bidimensionales para generalizar seguidamente los conceptos a tres dimensiones. Se observará que de nuevo intervienen las mismas "funciones de forma" de continuidad C_0 ya utilizadas anteriormente en la formulación de problemas de elasticidad bi o tridimensionales. La diferencia principal reside en que ahora cada punto del espacio está asociado sólo a una cantidad escalar desconocida (la función incógnita), mientras que en los ejemplos estudiados anteriormente

se buscaban varias cantidades desconocidas representadas por el vector de desplazamientos.

En el Capítulo 9 se estudiaron las formulaciones "débil" y variacional aplicables a las ecuaciones de Laplace y Poisson (véase Secciones 9.3 y 9.10.1). En las secciones que siguen se generalizan estos procedimientos para una ecuación cuasi-armónica general, indicándose el campo de aplicación de un *procedimiento unificado único* mediante el cual los ordenadores pueden resolver una gran variedad de problemas físicos.

10.2 Ecuación cuasi-armónica general

10.2.1 *Expresión general.* En muchos problemas físicos se estudia el fenómeno de *difusión* o flujo de una cierta cantidad, como el calor, la masa, o una sustancia química, etc. En tales problemas, la velocidad de transferencia por unidad de superficie, $\mathbf{q}$, puede escribirse en función de sus componentes cartesianas:

$$\mathbf{q}^T = [q_x, \ q_y, \ q_z] \tag{10.1}$$

Si la velocidad a la que se genera (o desaparece) esa cantidad por unidad de volumen es Q, en régimen estacionario o permanente, la condición de continuidad o de equilibrio dará

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = Q \tag{10.2}$$

Introduciendo el operador gradiente

$$\boldsymbol{\nabla} = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{array} \right\} \tag{10.3}$$

la ecuación anterior puede escribirse

$$\boldsymbol{\nabla}^T \mathbf{q} - Q = 0 \tag{10.4}$$

En general, las velocidades de flujo están relacionadas con el *gradiente* de algún potencial ϕ. Éste puede ser la temperatura en el caso del flujo de calor, etc. La relación más general será de la forma

$$\mathbf{q} = \left\{ \begin{array}{c} q_x \\ q_y \\ q_z \end{array} \right\} = -\mathbf{k} \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{array} \right\} = -\mathbf{k}\, \boldsymbol{\nabla} \phi \tag{10.5}$$

donde $\mathbf{k}$ es una matriz de dimensiones 3×3, generalmente simétrica por razonamientos energéticos.

La ecuación final de comportamiento del "potencial" ϕ se obtiene sustituyendo la expresión (10.5) en la ecuación (10.4), para dar

$$\boldsymbol{\nabla}^T \mathbf{k}\, \boldsymbol{\nabla} \phi + Q = 0 \tag{10.6}$$

ecuación que tiene que resolverse en el dominio Ω. Las condiciones de contorno para dicho dominio serán una u otra de las siguientes:

1. En Γ_ϕ,
$$\phi = \overline{\phi} \tag{10.7a}$$
esto es, el potencial está prescrito.
2. En Γ_q, la componente normal del flujo, q_n, viene dada por
$$q_n = \overline{q} + \alpha \phi \tag{10.7b}$$
donde α es un coeficiente de transferencia o radiación.
Puesto que
$$q_n = \mathbf{q}^T \mathbf{n} \qquad \mathbf{n}^T = [n_x, \ n_y, \ n_z]$$
donde $\mathbf{n}$ es el vector de cosenos directores de la normal a la superficie; esta condición puede volver a escribirse inmediatamente como
$$-(\mathbf{k}\boldsymbol{\nabla}\phi)^T \mathbf{n} - \overline{q} - \alpha\phi = 0 \tag{10.7c}$$
donde $\overline{q}$ y α son valores dados.

10.2.2 *Formas particulares.* Si consideramos la expresión general de la Ec. (10.5), definida para un sistema de coordenadas x, y, z arbitrario, se encontrará que siempre puede determinarse otro sistema de coordenadas locales x', y', z', en el que la matriz $\mathbf{k}'$ sea diagonal. En dicho sistema tendremos

$$\mathbf{k}' = \begin{bmatrix} k_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & k_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & k_{z'} \end{bmatrix} \tag{10.8}$$

y la ecuación de comportamiento [Ec. (10.6)] se puede escribir (prescindiendo del índice prima)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+Q=0 \qquad (10.9)$$

cambiando convenientemente las condiciones de contorno.

Finalmente, para un material isótropo podemos escribir

$$\mathbf{k}=k\mathbf{I} \qquad (10.10)$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz unidad. Esto conduce a la sencilla ecuación (9.10) ya discutida con detalle en el Capítulo 9.

10.2.3 *Forma débil de la ecuación cuasi-armónica general [Ec. (10.6)].* Siguiendo los razonamientos del Capítulo 9, Sección 9.2, se puede obtener la forma débil de la Ec. (10.6) escribiendo que

$$\int_\Omega v[\boldsymbol{\nabla}^T\mathbf{k}\boldsymbol{\nabla}\phi+Q]\,d\Omega-\int_{\Gamma_q} v[(\mathbf{k}\boldsymbol{\nabla}\phi)^T\mathbf{n}-\bar{q}-\alpha\phi]\,d\Gamma=0 \qquad (10.11)$$

para todas las funciones v que sean nulas en Γ_ϕ.

Integrando por partes (véase Apéndice 6) resulta la expresión débil siguiente, que equivale a que se satisfagan las ecuaciones diferenciales de comportamiento del sistema y las condiciones de contorno *naturales* (10.7b):

$$\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}^T v\mathbf{k}\boldsymbol{\nabla}\phi\; d\Omega-\int_\Omega vQ\; d\Omega-\int_{\Gamma_q} v(\alpha\phi+\bar{q})\; d\Gamma=0 \qquad (10.12)$$

Nos quedan por imponer las condiciones de contorno *forzadas* (10.7a).

10.2.4 *Principio variacional.* Dejaremos como ejercicio para el lector la comprobación de que el funcional

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_\Omega(\boldsymbol{\nabla}\phi)^T\mathbf{k}\boldsymbol{\nabla}\phi\; d\Omega-\int_\Omega Q\phi\; d\Omega+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_q}\alpha\phi^2\; d\Gamma+\int_{\Gamma_q}\bar{q}\phi\; d\Gamma \qquad (10.13)$$

satisface, al ser minimizado [con la restricción expresada por la condición (10.7a)], las ecuaciones originales del problema establecidas por las Ecs. (10.6) y (10.7).

Las operaciones algebraicas necesarias son exactamente las mismas que las expuestas en la Sección 9.10 del Capítulo 9 y pueden efectuarse como ejercicio.

10.3 Discretización en elementos finitos

Esto puede efectuarse sobre la hipótesis de una función de interpolación

$$\phi=\sum N_i a_i=\mathbf{Na} \qquad (10.14)$$

que empleará bien la formulación débil expresada en la Ec. (10.12), o la forma variacional de la Ec. (10.13). En el primer caso, si de acuerdo con el método de Galerkin tomamos

$$v=N_i \qquad (10.15)$$

la expresión resultante será idéntica a la obtenida minimizando la expresión variacional.

Así pues, sustituyendo la Ec. (10.5) en la Ec. (10.12), se obtiene la expresión general

$$\left(\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}^T N_i\mathbf{k}\boldsymbol{\nabla}\mathbf{N}\; d\Omega-\int_{\Gamma_q} N_i\alpha\mathbf{N}\; d\Gamma\right)\mathbf{a}-\int_\Omega N_iQ\; d\Omega+\int_{\Gamma_q} N_i\bar{q}\; d\Gamma=0$$
$$(i=1,\dots,n) \qquad (10.16)$$

o un sistema general de ecuaciones de discretización de la forma

$$\mathbf{Ha}+\mathbf{f}=0 \qquad (10.17)$$

con

$$H_{ij}=\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}^T N_i\,\mathbf{k}\,\boldsymbol{\nabla}N_j\; d\Omega+\int_{\Gamma_q} N_i\alpha N_j\; d\Gamma$$

$$f_i=-\int_\Omega N_iQ\; d\Omega+\int_{\Gamma_q} N_i\bar{q}\; d\Gamma$$

teniéndose que imponer en los contornos Γ_ϕ los valores prescritos de $\bar{\phi}$.

Advirtamos que aparece una "rigidez" adicional asociada a los contornos especificada por una constante de radiación α, pero aparte de esto la analogía con los problemas de estructuras elásticas es completa.

Efectivamente, las operaciones a realizar en un programa de ordenador serían las mismas, incluso las de cálculo de cantidades análogas a las tensiones. Tales cantidades son, obviamente, las velocidades de flujo

$$q\;\equiv-\mathbf{k}\;\boldsymbol{\nabla}\phi=-(\mathbf{k}\;\boldsymbol{\nabla}\mathbf{N})\mathbf{a} \qquad (10.18)$$

y, de acuerdo con las indicaciones del Capítulo 12, deben calcularse en los puntos óptimos (de integración), en concordancia con el grado de la expresión polinómica empleada.

Puede volver a utilizarse cualquiera de los desarrollos C_0, transformaciones isoparamétricas, etc., estudiadas en los Capítulos 7 y 8.

10.4 Casos particulares desde el punto de vista económico

10.4.1 *Medios anisótropos y heterogéneos.* Es evidente que las propiedades del material, definidas por la matriz $\mathbf{k}$ pueden variar de elemento a elemento en forma discontinua. Esto está implícito para las dos maneras de expresar

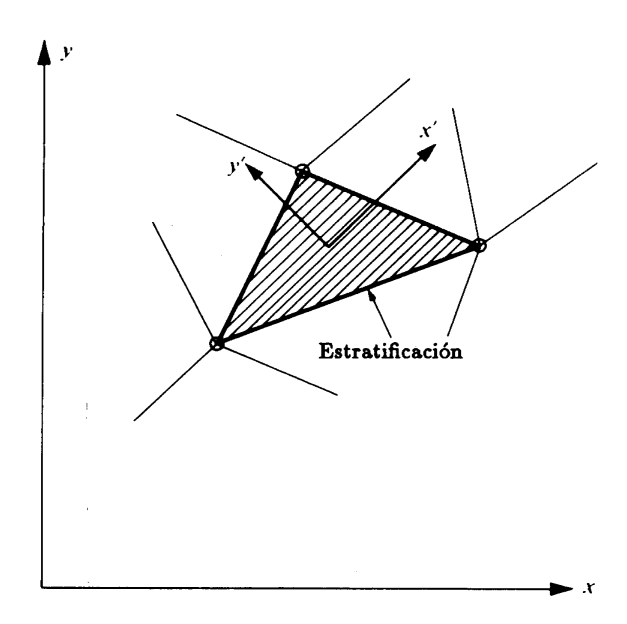


Figura 10.1 Material anisótropo. Coordenadas locales según las direcciones principales de estratificación.

el problema, la forma débil y el principio variacional.

Generalmente, las propiedades del material sólo se conocen con respecto a los ejes principales (o de simetría); si estas direcciones son constantes en el interior del elemento conviene emplear en la formulación ejes locales definidos para cada elemento, tal como se muestra en la Figura 10.1.

Operando en dichos ejes, solamente es necesario definir tres coeficientes k_x, k_y y k_z, obteniéndose por supuesto una considerable economía en el volumen de cálculos, ya que para obtener los coeficientes de la matriz **H** [Ec. (10.17)] sólo es preciso efectuar una multiplicación por una matriz diagonal.

Es importante advertir que puesto que los parámetros **a** *son escalares, no es necesario transformar las matrices calculadas en coordenadas locales antes del ensamblaje de las matrices globales.*

Por consiguiente, en la mayoría de los programas de cálculo sólo se define la diagonal de la matriz **k**.

10.4.2 *Problemas bidimensionales.* Expresando la ecuación de comportamiento (10.9) en coordenadas locales se obtiene, para dos dimensiones

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+Q=0 \qquad (10.19)$$

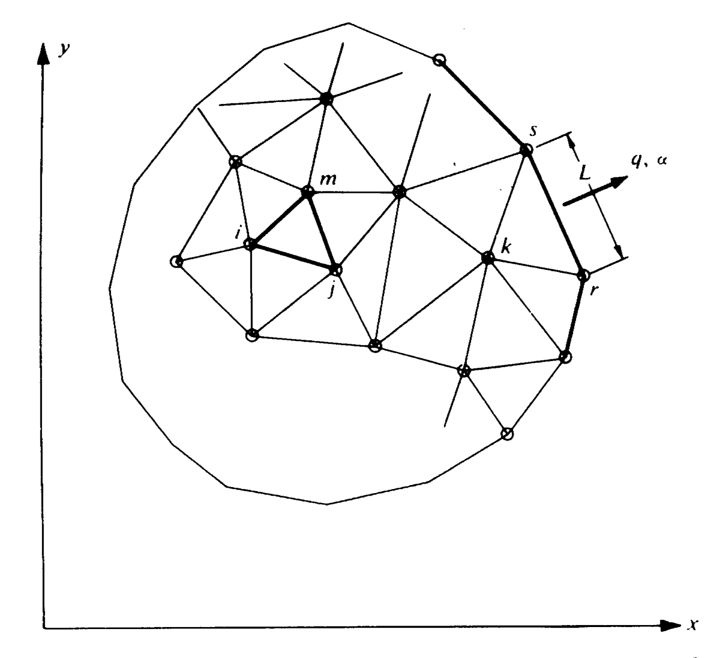


Figura 10.2 División de una región bidimensional en elementos triangulares.

Discretizando según la ecuación (10.16) se llega a unas matrices de formas ligeramente simplificadas. Prescindiendo de los términos en α y q, podemos escribir

$$H_{ij}^e=\int_{V^e}\left(k_x\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+k_y\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)\,dx\,dy \qquad (10.20)$$

No parecen necesarias en este punto más consideraciones. Puede sin embargo ser interesante particularizar la expresión anterior para el elemento triangular más sencillo, que no obstante es de gran eficacia (Figura 10.2).

Haciendo

$$N_i=\frac{a_i+b_ix+c_iy}{2\Delta}$$

como en la Ec. (3.8) del Capítulo 3, se puede escribir la matriz de "rigidez" del elemento, como

$$\mathbf{H}^e=\frac{k_x}{4\Delta}\begin{bmatrix} b_ib_i & b_ib_j & b_ib_m\\ & b_jb_j & b_jb_m\\ \text{sim.} & & b_mb_m\end{bmatrix}+\frac{k_y}{4\Delta}\begin{bmatrix} c_ic_i & c_ic_j & c_ic_m\\ & c_jc_j & c_jc_m\\ \text{sim.} & & c_mc_m\end{bmatrix} \qquad (10.21)$$

Las matrices de carga se obtienen sencillamente de la misma manera y así el lector podrá demostrar, por ejemplo, que la matriz correspondiente a Q tiene por expresión

$$\mathbf{f}^e = -\frac{Q\Delta}{3}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix} \tag{10.22}$$

resultado muy simple (prácticamente "evidente").

Se puede también expresar la ecuación en coordenadas cilíndricas, forma que se utiliza para la resolución de problemas de revolución. La ecuación diferencial es en tal caso

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(k_r r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z r\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) + Q = 0 \tag{10.23}$$

La expresión variacional podría ahora ser transformada adecuadamente pero es más sencillo sustituir los valores $(k_r r)$ y $(k_z r)$ como "conductividades" modificadas y utilizar directamente las expresiones anteriores. En este caso será preferible efectuar las integrales numéricamente como se hizo en los problemas equivalentes del Capítulo 4.

10.5 Ejemplos. Estimaciones de la precisión

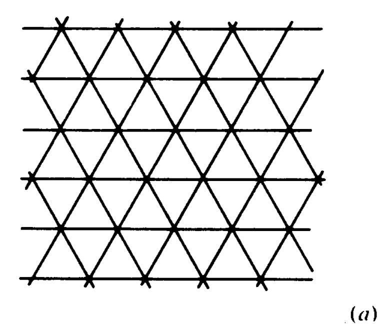
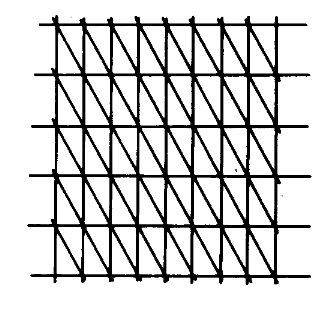
Se demuestra fácilmente que si se ensamblan las matrices de "rigidez" obtenidas explícitamente para elementos triangulares en mallas "regulares", como las de la Figura 10.3(a), se obtienen ecuaciones de distribución *idénticas* a las que se obtendrían utilizando los métodos conocidos de diferencias finitas[7].

Evidentemente, las soluciones obtenidas por ambos métodos serán coincidentes, e igualmente lo serán los órdenes de aproximación.†

Si se utiliza una malla "irregular" basada en una distribución de nodos en vértices cuadrados, aparece una diferencia evidente entre los dos métodos [Figura 10.3(b)], la cual se limita al vector de "cargas" $\mathbf{f}^e$. Las ecuaciones ensambladas presentarán "cargas" ligeramente diferentes de un nodo a otro, pero cuya suma seguirá siendo la que se obtiene mediante las expresiones establecidas según el método de las diferencias finitas. Así pues, los resultados sólo difieren localmente y tendrán los mismos valores medios.

Se muestra en la Figura 10.4 un ejemplo comparativo entre los resultados obtenidos mediante una malla "irregular" y una solución por relajación mediante la aproximación por diferencias finitas de menor orden. Los dos métodos dan resultados del mismo orden de magnitud, como era de esperar. Sin embargo, puede demostrarse que en los problemas unidimensionales el algoritmo de los elementos finitos da soluciones *exactas* en los nodos, mientras

† Esto sólo es cierto en caso de que únicamente se impongan los valores de $\overline{\phi}$ en el contorno.

(a)

(b)

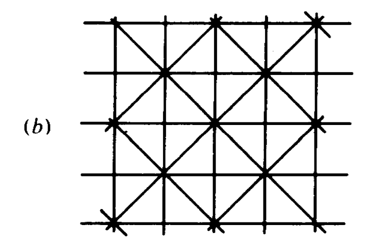


Figura 10.3 Formas de subdivisión "regular" e "irregular".

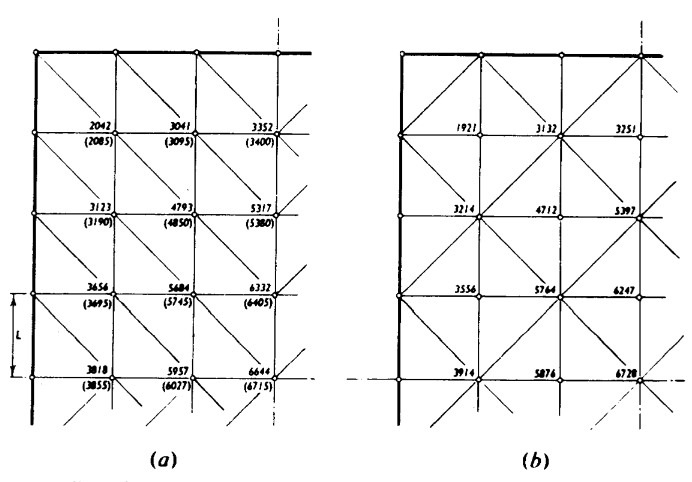


Figura 10.4 Torsión de una barra de sección rectangular. Los números entre paréntesis muestran una solución más exacta obtenida por Southwell mediante una malla 12 × 16 (valores de $\phi/G\theta L^2$).

que en general el método de las diferencias finitas no. Por consiguiente, en general podrá obtenerse una precisión superior mediante el método de los elementos finitos. Otras ventajas de los elementos finitos son:

1. Permiten tratar con simplicidad medios heterogéneos y anisótropos (particularmente cuando la dirección de anisotropía es variable).
2. Se puede variar la forma y dimensiones de los elementos de manera que se adapten a contornos arbitrarios y permitan analizar con mayor precisión dominios en los que la variación del funcional buscado es rápida (ver, Capítulo 14).
3. Las condiciones de contorno correspondientes a una "radiación" o a un gradiente dado se introducen de manera natural y con una precisión mejor que en los procedimientos clásicos de diferencias finitas.
4. Se pueden utilizar fácilmente elementos de órdenes elevados para aumentar la precisión sin complicar la definición de las condiciones de contorno, dificultad que siempre surge cuando se utilizan aproximaciones mediante diferencias finitas de orden elevado.
5. Finalmente, pero de gran importancia, se pueden utilizar para el ensamblaje y la solución programas estándar para cálculo de estructuras.

Se presentarán ahora dos ejemplos más sofisticados que servirán para ilustrar la precisión alcanzable en la práctica. El primero es el problema de la torsión pura de la barra heterogénea representada en la Figura 10.5. La ecuación diferencial fundamental es, en este caso,

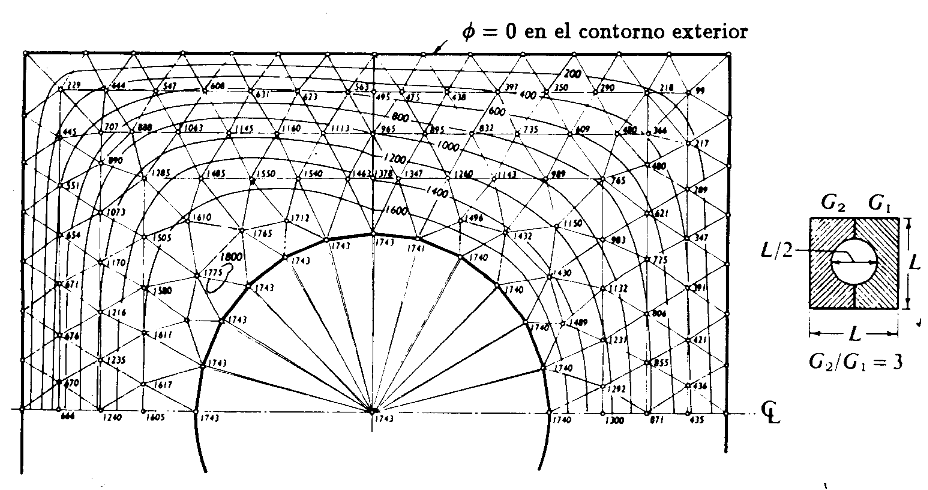


Figura 10.5 Torsión de una barra hueca compuesta de dos metales. $\phi/G\theta L^2 \times 10^4$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + 2\theta = 0 \tag{10.24}$$

donde ϕ es la función de tensión, G es el módulo de rigidez transversal y θ el ángulo girado por unidad de longitud de la barra.

En la solución mediante elementos finitos que aquí se presenta, la sección hueca estaba representada por un material cuyo módulo de rigidez transversal es del orden de 10^{-3} comparada con el del resto de los materiales.† Los resultados coinciden bastante bien con los obtenidos mediante una solución precisa obtenida por diferencias finitas[8].

En la Figura 10.6 se muestra un ejemplo relativo al flujo a través de una cimentación porosa anisótropa.

En este caso, la ecuación de comportamiento es

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial H}{\partial y}\right) = 0 \tag{10.25}$$

en la que H es la altura piezométrica y k_x y k_y representan los coeficientes de permeabilidad en la dirección de los ejes principales (oblicuos). Los resultados se comparan en este caso con los obtenidos mediante la solución exacta. En este ejemplo se aprecian claramente las ventajas de las mallas con elmentos de tamaño variable.

10.6 Algunas aplicaciones prácticas

10.6.1 *Filtración en un medio anisótropo.* El primero de los problemas trata sobre el flujo a través de un medio estratificado heterogéneo, anisótropo y de geometría compleja. La ecuación fundamental sigue siendo la Ec. (10.25). Sin embargo, es necesario introducir en el programa de cálculo una modificación que permita tener en cuenta la variación de las direcciones principales x' e y' al pasar de un elemento a otro.

El cálculo no presenta dificultades y la definición del problema junto con su solución se representa en la Figura 10.7.[3]

10.6.2 *Flujo térmico de revolución.* La ecuación de la transmisión del calor para los problemas con simetría de revolución puede escribirse como sigue en su forma clásica

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk\frac{\partial T}{\partial z}\right) = 0 \tag{10.26}$$

† Se empleó este artificio para evitar ciertas dificultades debidas a la "conexión múltiple" del dominio estudiado y permitir así el uso de un programa general.

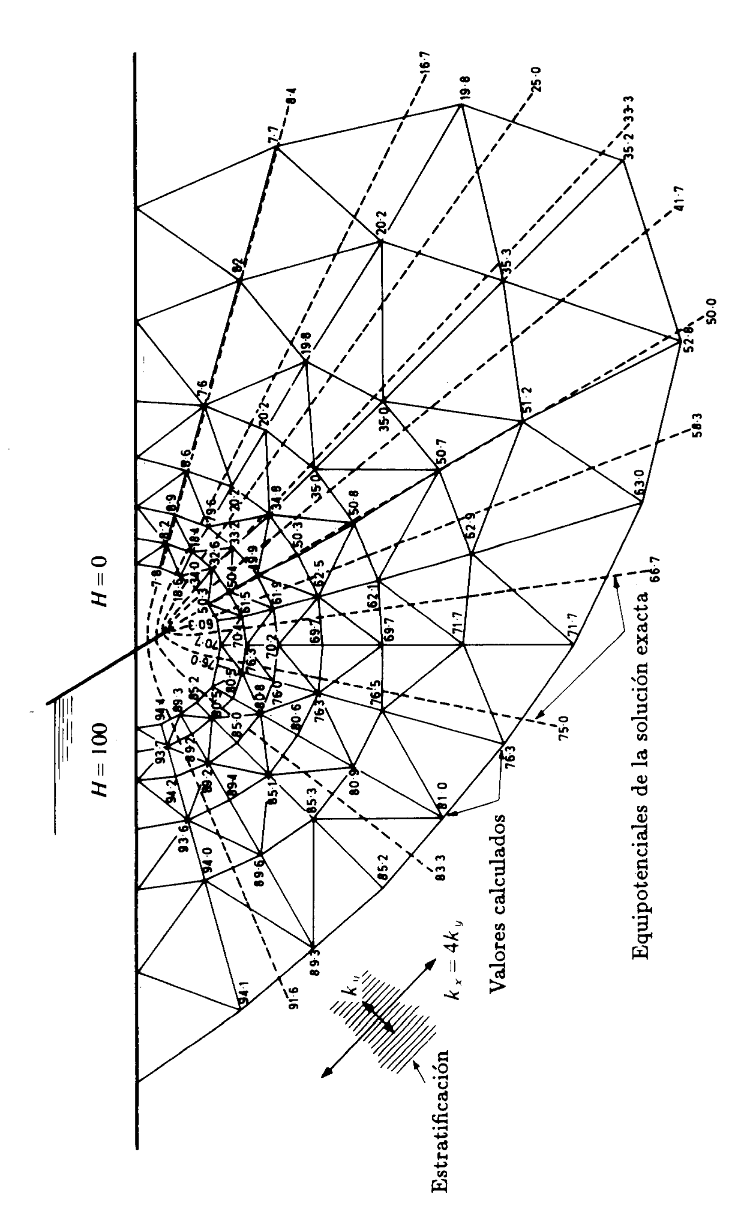


Figura 10.6 Filtración bajo un muro de pilotes inclinados cimentado en un terreno estratificado. No se representa la malla más tupida usada en las proximidades del extremo del pilote. Las líneas punteadas corresponden a la solución exacta para comparación.

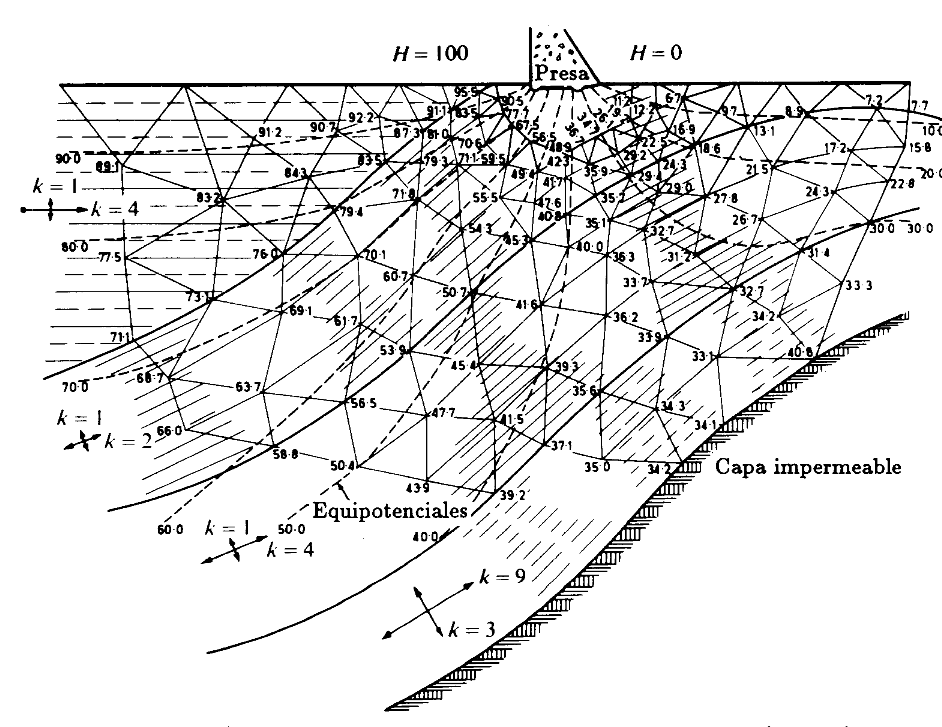


Figura 10.7 Filtración bajo una presa cimentada en un terreno muy heterogéneo y deformado.

si no hay fuentes generadoras de calor. En esta expresión, T representa la temperatura y k la conductividad. Las coordenadas x e y se reemplazan aquí por las cilíndricas r y z, que representan las distancias radial y axial, respectivamente.

En la Figura 10.8 se ha representado la distribución de temperatura en la vasija de presión de un reactor nuclear[1] para una transmisión estacionaria de calor cuando se somete la cara interior a un incremento uniforme de temperatura.

10.6.3 *Presiones hidrodinámicas sobre superficies en movimiento.* Si una superficie sumergida se desplaza en un fluido con una distribución de aceleraciones dada y un movimiento de pequeña amplitud, se puede demostrar[9] que, prescindiendo de la compresibilidad del fluido, las sobrepresiones resultantes satisfacen la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 p = 0$$

En los contornos, fijos o móviles, las condiciones de contorno son del tipo 2

[véase Ec. (10.7b)] y vienen dadas por

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho a_n \tag{10.27}$$

en la que ρ es la densidad del fluido y a_n la componente normal de la aceleración de los puntos en el contorno.

En las superficies libres, la condición de contorno es simplemente (ignorando las ondas de superficie)

$$p = 0 \tag{10.28}$$

El problema entra, por tanto, dentro de la categoría de los estudiados en este capítulo.

Consideremos, a título de ejemplo, el caso del muro vertical sometido a la presión del agua contenida en un depósito representado en la Figura (10.9), y determinemos la distribución de presiones en los puntos de la superficie del muro y del fondo del depósito para cualquier movimiento de los puntos 1 a 7 del contorno.

Se representa la división del dominio en elementos (42 en total), habiéndose empleado en este caso elementos cuadrilaterales. Para que los resultados sean válidos *cualquiera que sea* el sistema de aceleraciones, se han resuelto siete problemas distintos. En cada uno de ellos, sucesivamente, se ha impuesto a la porción de contorno adyacente al punto considerado, una aceleración unidad, lo que equivale a aplicar sucesivamente en los puntos 1 a 7 "cargas" de valor $\rho\frac{1}{2}L$, ρL, ..., ρL, $\rho\frac{1}{2}L$. Para una distribución de aceleraciones arbitraria, las presiones que se producen en los puntos 1 a 56 se pueden agrupar en forma de matriz función de la aceleración de los puntos 1 a 7. Así pues

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_7 \\ p_{14} \\ p_{21} \\ p_{28} \\ p_{35} \\ p_{42} \\ p_{49} \\ p_{56} \end{Bmatrix} = \mathbf{M} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_7 \end{Bmatrix} \tag{10.29}$$

donde la matriz $\mathbf{M}$ viene dada en la Tabla 10.1

Se pueden calcular ahora las presiones correspondientes a una distribución de aceleraciones cualquiera. Por ejemplo, si la aceleración $\bar{a}$ es uniforme, las presiones se calcularán haciendo

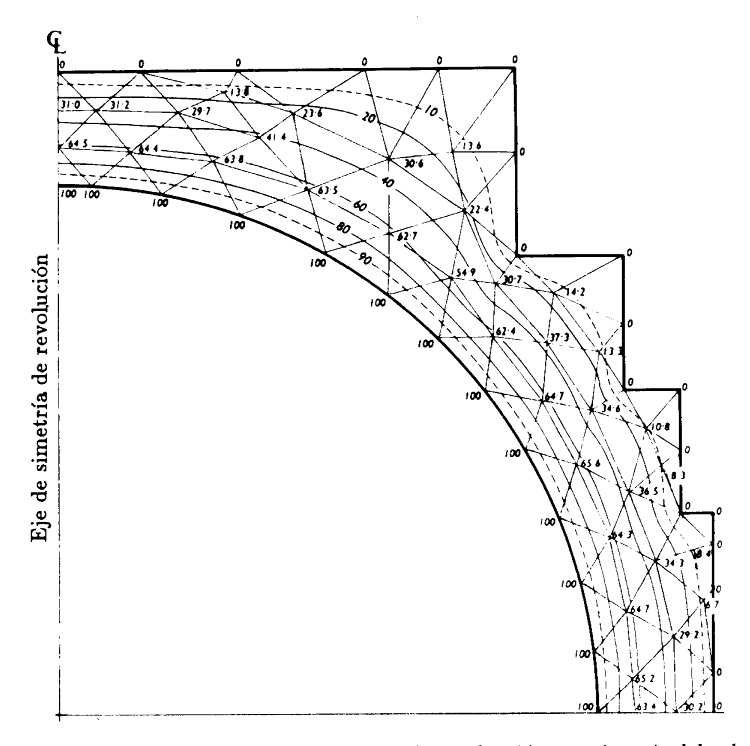


Figura 10.8 Distribución de la temperatura en la conducción estacionaria del calor en una vasija de presión con simetría de revolución.

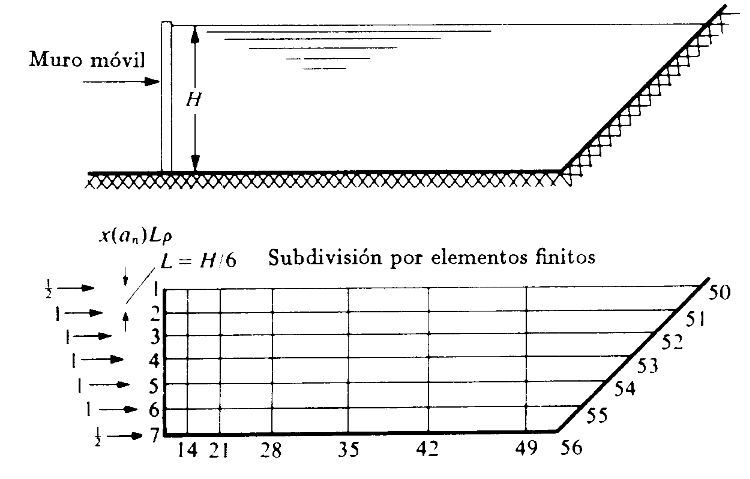


Figura 10.9 Problema de un muro que se desplaza horizontalmente en un depósito.

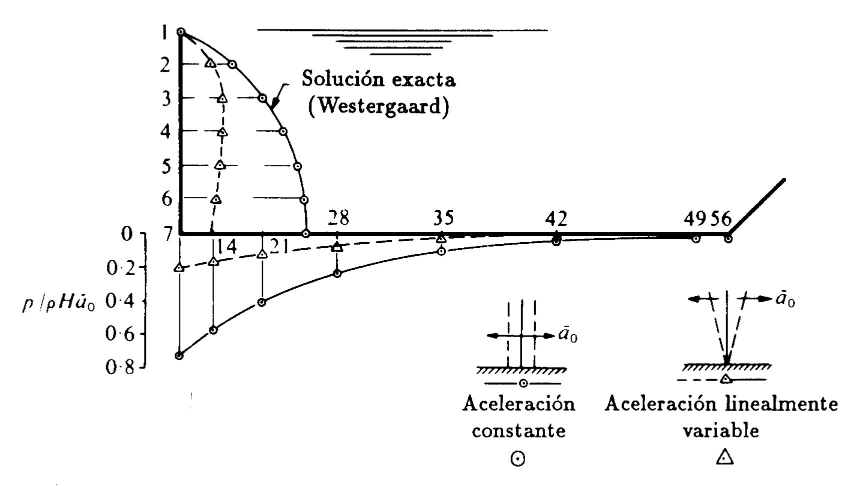


Figura 10.10 Distribución de presiones en el muro móvil y en el fondo del depósito.

TABLA 10.1

$\mathbf{M} = \rho \frac{H}{6}$

1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0·7249	0·3685	0·2466	0·1963	0·1743	0·0840
3	0	0·3685	0·9715	0·5648	0·4210	0·3644	0·1744
4	0	0·2466	0·5648	1·1459	0·7329	0·5954	0·2804
5	0	0·1963	0·4210	0·7329	1·3203	0·9292	0·4210
6	0	0·1744	0·3644	0·5954	0·9292	1·5669	0·6489
7	0	0·1680	0·3488	0·5607	0·8420	1·2977	1·1459
14	0	0·1617	0·3332	0·5260	0·7548	1·0285	0·6429
21	0	0·1365	0·2754	0·4171	0·5573	0·6793	0·3710
28	0	0·0879	0·1731	0·2519	0·3187	0·3657	0·1918
35	0	0·0431	0·0838	0·1195	0·1478	0·1661	0·0863
42	0	0·0186	0·0359	0·0150	0·0626	0·0699	0·0362
49	0	0·0078	0·0150	0·0213	0·0261	0·0291	0·0151
56	0	0·0069	0·0134	0·0190	0·0232	0·0259	0·0134

$(L = H/6)$

$$\left\{ \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_7 \end{matrix} \right\} = \bar{a} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \right\} \tag{10.30}$$

La distribución de presiones resultante sobre el muro y el fondo del depósito se ha representado en la Figura 10.10. Los resultados para las presiones sobre el muro coinciden con un error inferior al 1% con la conocida solución exacta obtenida por Westergaard[10].

Para cualquier otro movimiento se pueden obtener las presiones de manera análoga. Si, por ejemplo, el muro está articulado en su base y oscila alrededor de ese punto, estando el punto más alto (punto 1) sometido a una aceleración $\bar{a}$, se tiene

$$\left\{ \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_7 \end{matrix} \right\} = \bar{a} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \frac{5}{6} \\ \frac{4}{6} \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} \tag{10.31}$$

De esta expresión resulta la distribución de presiones representada en la Figura 10.10.

La importancia de la obtención de una "matriz de influencia" como ésta es considerable en problemas de vibraciones. Si el "muro" oscila, en general su aceleración no será conocida. Según la Ec. (10.29) podemos escribir la relación entre las presiones de los puntos 1 a 7 y sus aceleraciones; así, llamando $\mathbf{M}_0$ a la parte superior de la matriz $\mathbf{M}$, tendremos

$$\left\{ \begin{matrix} p_1 \\ \vdots \\ p_7 \end{matrix} \right\} = \mathbf{M}_0 \left\{ \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_7 \end{matrix} \right\} = \mathbf{M}_0 \mathbf{a} \tag{10.32}$$

Estas presiones se traducen en las fuerzas nodales

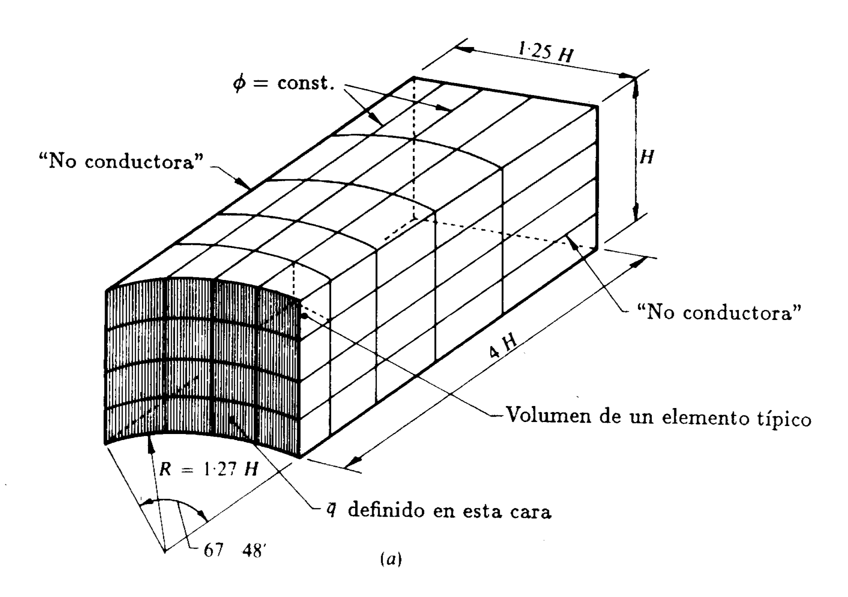
$$\mathbf{f} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_7 \end{matrix} \right\} = \mathbf{A}\mathbf{M}_0 \left\{ \begin{matrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_7 \end{matrix} \right\} \tag{10.33}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz adecuada que distribuye el efecto de las cargas, y $\mathbf{a}$ representa las aceleraciones de los puntos nodales del muro. En el segundo volumen de este libro se discutirán con más detalle este problema y otros similares.

En la Figura 10.11 se muestra la solución de un problema bidimensional análogo.[4] En este caso se ha obtenido una buena precisión utilizando elementos tetraédricos sencillos.

En muchos problemas prácticos basta con calcular dichas masas "adicionales" simplificadas y el método descrito aquí se ha empleado para ello en numerosas ocasiones.[11–13]

10.6.4 *Problemas de electrostática y magnetostática.* En este tipo de problemas es frecuente la necesidad de determinar intensidades de campo adecuadas, siendo las ecuaciones de comportamiento del tipo cuasi-armónico general aquí estudiado. Así pues, se pueden usar directamente las mismas fórmulas. Una de las primeras aplicaciones a este tema, realizada ya en 1967,[4]



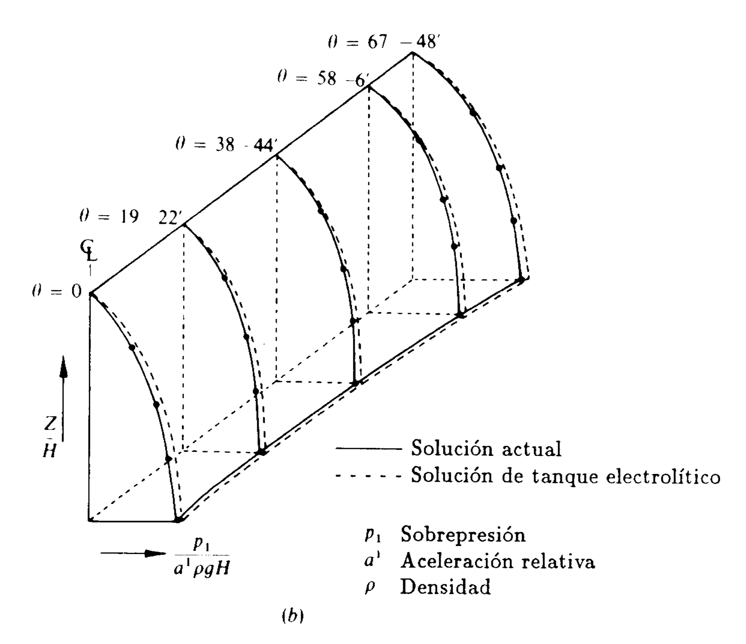


Figura 10.11 Presiones en una superficie de retención acelerada en un fluido incompresible.

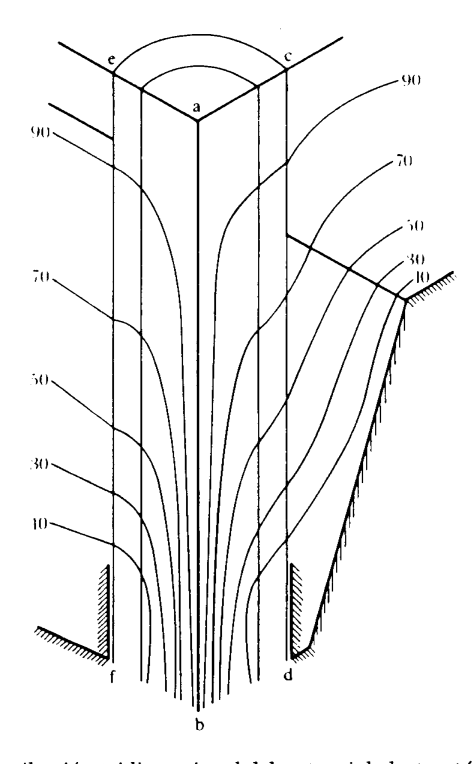


Figura 10.12 Distribución tridimensional del potencial electrostático alrededor de un aislante de porcelana en un recipiente conectado a tierra[9].

fue al estudio de las distribuciones de campos electrostáticos totalmente tridimensionales regidas por ecuaciones de Laplace (Figura 10.12).

En la Figura 10.13 se muestran los resultados obtenidos por Winslow[6] en 1966 utilizando elementos triangulares para analizar campos magnéticos bidimensionales. Estos primeros trabajos estimularon una considerable actividad en este área de estudio, habiéndose publicado desde entonces numerosos trabajos sobre el tema.[14–17]

Los problemas de magnetismo son de particular interés puesto que en su formulación interviene un *vector potencial* de tres componentes, lo que hace que la formulación de estos problemas sea diferente a la estudiada en este capítulo. Vale la pena, por tanto, presentar aquí una variante reciente que permite emplear los programas generales de esta sección para el análisis de este problema.[18–20]

En la teoría del electromagnetismo para campos estacionarios, el problema está regido por las ecuaciones de Maxwell, que son

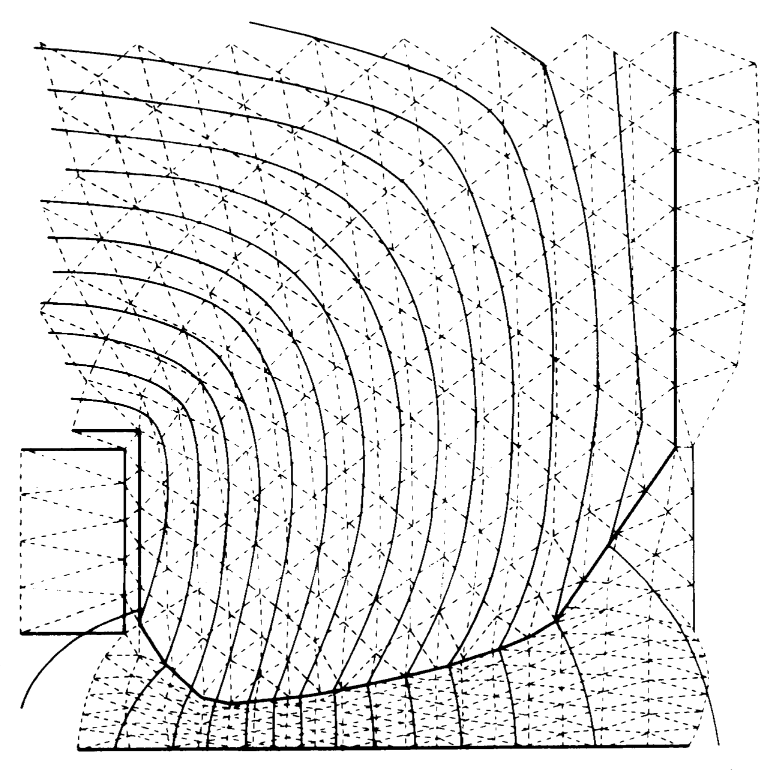


Figura 10.13 Campo en las proximidades de un imán (según Winslow[6]).

$$\begin{aligned} \nabla^T \times \mathbf{H} &= -\,\mathbf{J} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \\ \nabla^T \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \qquad (10.34)$$

siendo las condiciones de contorno tales que para una distancia infinita a la perturbación, **H** y **B** tienden a cero. En la expresión anterior, **J** es una densidad de corriente eléctrica dada, que circula por conductores; **H** y **B** son vectores de tres componentes que representan la intensidad del campo magnético y la densidad de flujo, respectivamente; μ es la permeabilidad magnética que varía (en un sistema absoluto de unidades) desde la unidad en el *vacío* a varios miles en los cuerpos magnéticos, y $\times$ representa el producto definido en el Apéndice 5.

Las fórmulas anteriores dependen del hecho de que es relativamente fácil calcular un campo $\mathbf{H}_s$, que satisfaga exactamente las ecuaciones (10.34) cuando $\mu \equiv 1$ en todo el dominio. Este campo está dado en cada punto, definido por un vector de posición **r**, por la integral

$$\mathbf{H}_s = \frac{1}{4}\pi \int_\Omega \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} d\Omega \qquad (10.35)$$

En la expresión anterior, $\mathbf{r}'$ se refiere a las coordenadas de $d\Omega$ y obviamente el dominio de integración sólo incluye conductores eléctricos donde $\mathbf{J} \neq 0$.

Una vez conocido $\mathbf{H}_s$ se puede escribir

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m$$

y sustituyendo en la Ec. (10.34) se tiene un sistema

$$\begin{aligned} \nabla^T \times \mathbf{H}_m &= 0 \\ \mathbf{B} &= \mu(\mathbf{H}_s + \mathbf{H}_m) \\ \nabla^T \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \qquad (10.36)$$

Si introducimos ahora un potencial *escalar* ϕ que defina $\mathbf{H}_m$ como

$$\mathbf{H}_m \equiv \nabla \phi \qquad (10.37)$$

encontramos que la primera de las Ecs. (10.36) se satisface automáticamente y, tras eliminar **B** en las otras dos, la ecuación fundamental se convierte en

$$\nabla^T \mu \nabla \phi + \nabla^T \mu \mathbf{H}_s = 0 \qquad (10.38)$$

con $\phi \to 0$ en el infinito. Esta ecuación tiene precisamente la forma general de las estudiadas en este capítulo [Ec. (10.6)], estando Q representado por el segundo término, que ahora *sí* está definido.

Surge, sin embargo, una dificultad manifiesta si μ varía en forma discontinua, como efectivamente cabe esperar que ocurra en los límites de separación entre dos materiales.

El término Q no estará entonces definido, y en la discretización estándar de la Ec. (10.16) o (10.17) el término

$$\int_\Omega N_i Q \, d\Omega \equiv \int_\Omega N_i \nabla^T \mu \mathbf{H}_s \, d\Omega \qquad (10.39)$$

aparentemente no tiene significado.

La integración por partes viene nuevamente en nuestra ayuda y observamos que

$$\int_\Omega N_i \nabla^T \mu \mathbf{H}_s \, d\Omega \equiv -\int_\Omega \nabla^T N_i \mu \mathbf{H}_s + \int_\Gamma N_i \mu \mathbf{H}_s \mathbf{n} \, d\Gamma \qquad (10.40)$$

Como en las regiones en que μ es constante, $\nabla^T \mathbf{H}_s \equiv 0$, la única contribución a los términos relativos a las fuerzas viene dada por la integral de

superficie del segundo término sobre los límites de separación donde existan discontinuidades.

La introducción del potencial escalar permite que los problemas de magnetostática bi y tridimensionales puedan resolverse mediante el programa general empleado para todos los problemas de esta sección. En la Figura 10.14 se representa la solución del caso tridimensional típico de un transformador. En este caso se emplearon elementos isoparamétricos cuadráticos del tipo "ladrillo".[18]

Los problemas de magnetostática típicos son de gran no linealidad puesto que

$$\mu = \mu(|\mathbf{H}|) \quad \text{donde} \quad |\mathbf{H}| = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2} \tag{10.41}$$

En el Volumen 2 se estudiará el tratamiento de esta clase de no linealidades.

En éste y otros problemas en que los contornos se extienden hasta el infinito se puede obtener una economía considerable haciendo uso de elementos *infinitos*, discutidos en el Capítulo 8.

Las Figuras 10.15 y 10.16 muestran aplicaciones más complejas de los procedimientos descritos anteriormente en problemas asociados a reactores nucleares de fusión.[20,21,22] En este caso se usó una formulación con dos potenciales, que es computacionalmente más eficiente.[22]

10.6.5 *Problemas de lubricación.* De nuevo nos encontramos una ecuación de Poisson de tipo general que rige la distribución del lubricante bajo un patín que resbala sobre un plano. En el caso más sencillo de un lubricante de densidad y viscosidad constantes, la ecuación que ha de resolverse (ecuación de Reynolds) es la siguiente:

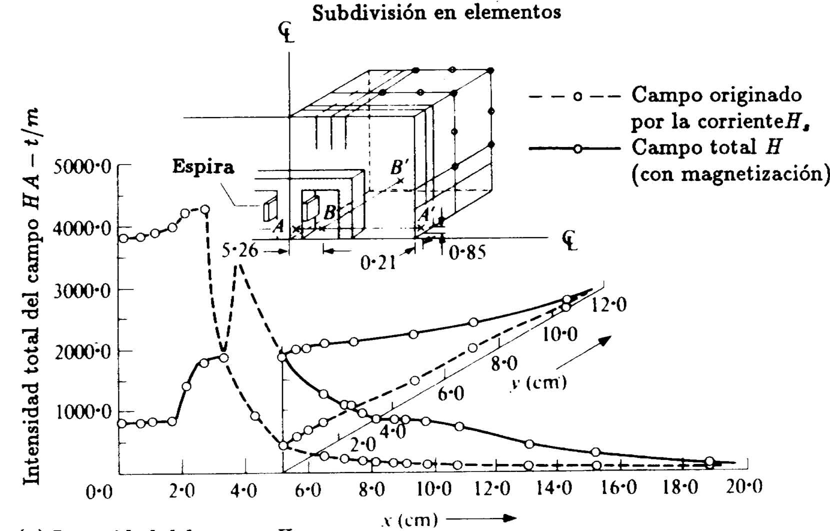
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 6\mu V\frac{\partial h}{\partial x} \tag{10.42}$$

donde h es el espesor de la película de lubricante, p la presión desarrollada, μ la viscosidad y V la velocidad del patín en la dirección x.

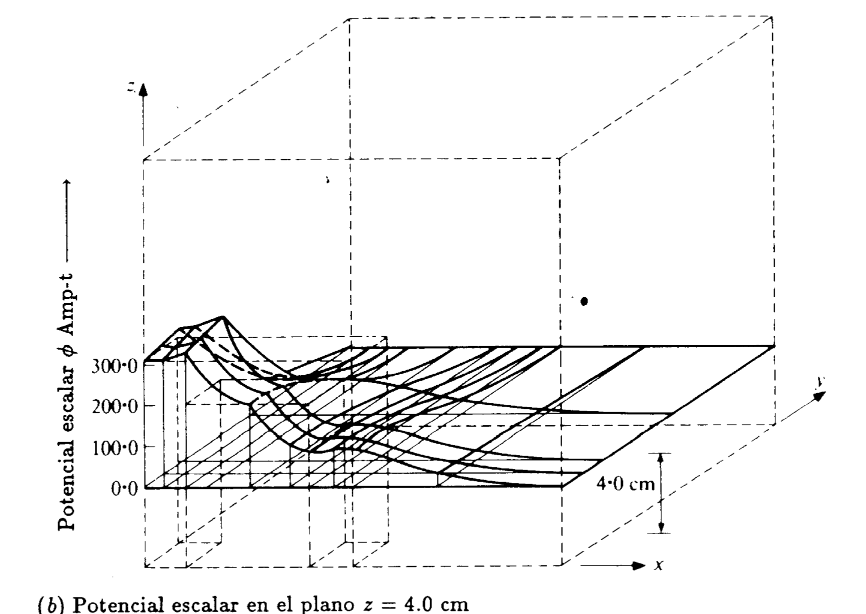
La Figura 10.17 representa la distribución de presiones para un caso típico de un patín con un escalón.[23] La condición de contorno es simplemente que la presión en el mismo sea nula; es interesante advertir que el escalón, tras integrar el segundo miembro de la ecuación (10.42) es equivalente a una "carga lineal", tal como ocurría en el caso de discontinuidad magnética mencionado antes.

Evidentemente pueden tratarse casos más generales de problemas de lubricación tomando en consideración movimientos verticales del patín (compresión de la película) y la compresibilidad del lubricante; en este campo se han realizado numerosos trabajos.[24–31]

Flujos irrotacionales y flujos con superficie libre. La ecuación



(a) Intensidad del campo H



(b) Potencial escalar en el plano $z = 4.0$ cm

Figura 10.14 Transformador tridimensional.

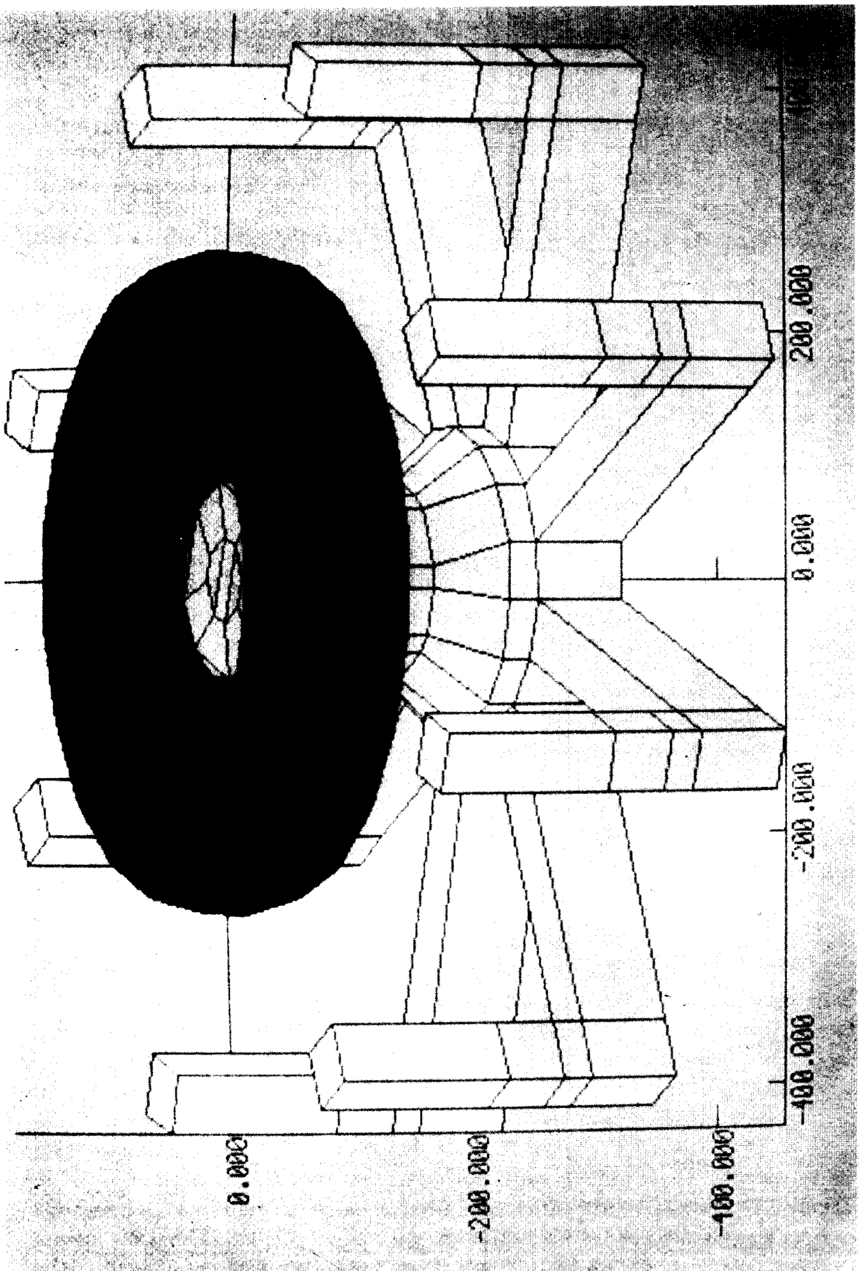
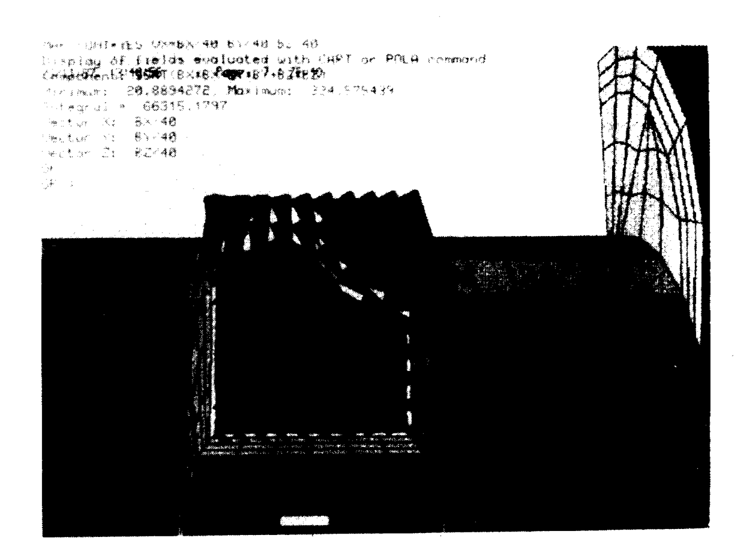


Figura 10.15 Sección de un modelo de elementos finitos para el Tokamak JET (Programa TOSCA, cortesía de Vector Fields Ltd., Oxford, Reino Unido).



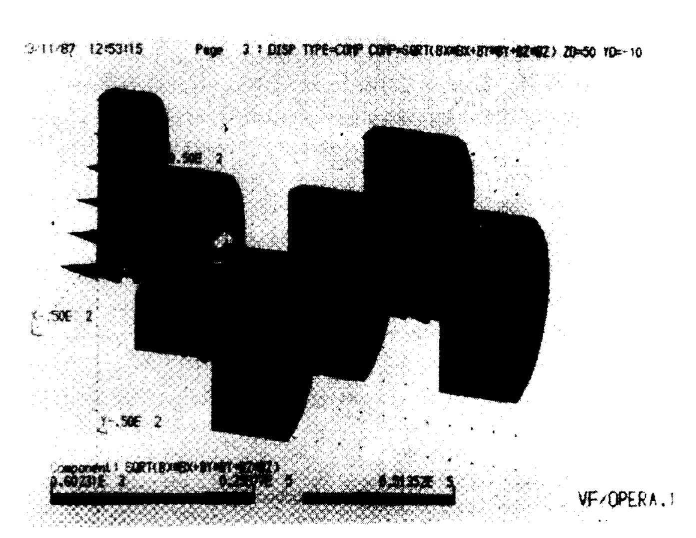


Figura 10.16 Dos vistas de un árbol de levas para una aplicación de inspección de partículas magnéticas, mostrando isolíneas de densidad de flujo y vectores de campo (Programa TOSCA, cortesía de Vector Fields Ltd., Oxford, Reino Unido)

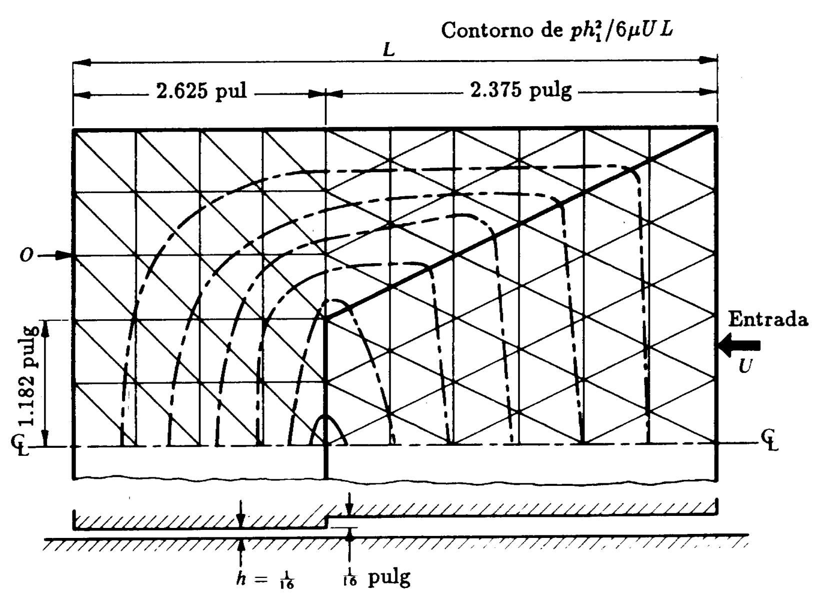


Figura 10.17 Patín plano escalonado. Distribución de presiones.

fundamental de Laplace que rige el flujo de fluidos viscosos en problemas de filtración se puede aplicar también a problemas de flujo irrotacional de fluidos en el exterior de la capa límite creada por efecto de viscosidad. Los ejemplos que ya hemos visto bastan para ilustrar la aplicabilidad general del método en relación con este tipo de problemas. Martin[32] y otros[33-38] citan diversos ejemplos suplementarios.

Si no intervienen efectos de viscosidad, puede demostrarse entonces que el flujo de un fluido que parta del reposo debe ser irrotacional, o sea,

$$\omega_z \equiv \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \text{etc.} \tag{10.43}$$

donde u y v son las componentes de la velocidad.

Esto implica la existencia de un potencial de velocidades que dé

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{10.44}$$
$$(\text{o } \mathbf{u} = -\nabla\phi)$$

Si, además, el flujo es incompresible, la ecuación de continuidad [véase Ec. (10.2)] ha de satisfacerse; es decir,

$$\nabla^T \mathbf{u} = 0 \tag{10.45}$$

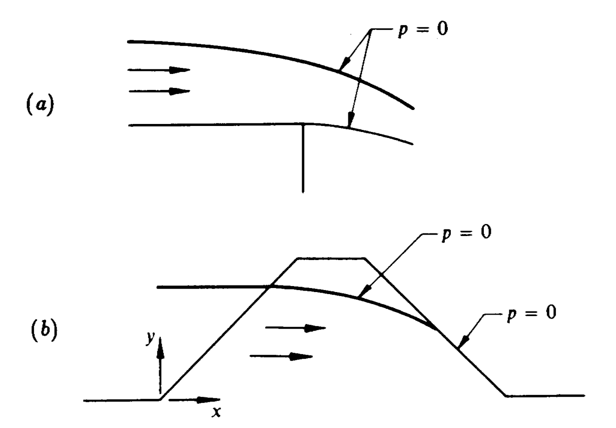


Figura 10.18 Problemas típicos de superficie libre con una línea de corriente que satisface también una condición adicional de presión = 0. (*a*) Corriente en cascada. (*b*) Filtración en una presa de tierra.

y, por tanto,

$$\nabla^T \nabla \phi = 0 \tag{10.46}$$

Alternativamente, para un flujo bidimensional puede introducirse una función de corriente que defina las velocidades como

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{10.47}$$

y estas componentes satisfacen idénticamente la ecuación de continuidad. La condición de irrotacionalidad es ahora

$$\nabla^T \nabla \psi = 0 \tag{10.48}$$

y así, el problema del flujo de un fluido puede formularse de una forma u otra. Puesto que de nuevo es aplicable la formulación general, hay poco más que añadir, y si el lector desea conocer algunos ejemplos puede consultar las referencias citadas.

Salta a la vista la similitud de este tipo de problemas con los de filtración previamente estudiados.[39,40]

Un tipo particular de flujo merece atención especial. Nos referimos al caso en que el flujo está limitado por una superficie libre no conocida *a priori*.

Este tipo de problemas está representado por dos casos típicos: el de una corriente en cascada [Figura 10.18(*a*)] y el flujo a través de una presa de tierra [Figura 10.18(*b*)]. En ambos la superficie libre es una línea de corriente y su posición es en los dos casos desconocida *a priori*, pero debe determinarse de

manera que en esa superficie se cumpla una *condición suplementaria*. Por ejemplo, el segundo problema, si se formula en función del potencial H, viene regido por la ecuación (10.25).

Al ser la superficie libre una línea de corriente, se debe satisfacer en ella la condición

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0 \qquad (10.49)$$

Además, la presión debe ser nula en dicha superficie por estar en contacto con la atmósfera. Como

$$H = \frac{p}{\gamma} + y \qquad (10.50)$$

donde γ es el peso específico del fluido, p la presión del fluido e y la altura con respecto a un sistema de referencia arbitrario (horizontal), se debe cumplir en la superficie que

$$H = y \qquad (10.51)$$

Puede procederse de manera iterativa para hallar la solución. Partiendo de una superficie libre dada, se resuelve el problema estándar. Luego se lleva a cabo una comprobación para ver si se verifica la Ec. (10.51), y si no, se ajusta la superficie haciendo la nueva y igual a la H recién hallada. Basta con algunas iteraciones para ver que la convergencia es bastante rápida. Taylor y Brown[41] describen un proceso de este tipo. Se han desarrollado principios variacionales especiales para tratar este problema y los lectores interesados pueden consultar las referencias 42 a 50.

10.7 Observaciones finales

Hemos mostrado cómo puede escribirse una formulación general para la solución de problemas cuasi-armónicos estacionarios y cómo un programa único basado en dicha formulación es aplicable a una gran variedad de problemas físicos. Desde luego, la selección de problemas tratados no es en absoluto exhaustiva y existen muchos otros ejemplos de aplicación de gran interés práctico. Sin duda, el lector encontrará analogías adecuadas para sus propios problemas.

Referencias

1. O.C ZIENKIEWICZ y Y.K. CHEUNG, "Finite elements in the solution of field problems", *The Engineer*, pp. 507–10, Sept. 1965.
2. W. VISSER, "A finite element method for the determination of non-stationary temperature distribution and thermal deformations", *Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. Tech., Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1965.

3. O.C ZIENKIEWICZ, P. MAYER y Y.K. CHEUNG, "Solution of anisotropic seepage problems by finite elements", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **92**, EM1, pp. 111–20, 1966.
4. O.C ZIENKIEWICZ, P.L. ARLETT y A.K. BAHRANI, "Solution of three-dimensional field problems by finite element method", *The Engineer*, 27 Oct. 1967.
5. L.R. HERRMANN, "Elastic torsion analysis of irregular shapes", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **91**, EM6, pp. 11–19, 1965.
6. A.M. WINSLOW, "Numerical solution of the quasi-linear Poisson equation in a non-uniform triangle "mesh" ", *J. Comp. Phys.*, **1**, pp. 149–72, 1966.
7. D.N. de G. ALLEN, *Relaxation Methods*, p. 199, Mc. Graw-Hill, 1955.
8. J.F. ELY y O.C ZIENKIEWICZ, "Torsion of compound bars – a relaxation solution", *Int. J. Mech. Sci.*, **1**, pp. 356–65, 1960.
9. O.C ZIENKIEWICZ y B. NATH, "Earthquake hydrodinamic pressures on arch dams – an electric analogue solution", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, **25**, pp. 165–76, 1963.
10. H.M. WESTERGAARD, "Water pressure on dams during earthquakes", *Trans Am. Soc. Civ. Eng.*, **98**, pp. 418–33, 1933.
11. O.C ZIENKIEWICZ y R.E. NEWTON, "Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid", *Proc. Symp. on Finite Element Techniques*, pp. 359–71, Stuttgart, 1969.
12. R.E. NEWTON, "Finite element analysis of two-dimensional added mass and damping", in *Finite Elements in Fluid*, (eds. R.H. Gallagher, J.T. Oden, C. Taylor y O.C. Zienkiewicz), Vol. **I**, pp. 219–32, Wiley, 1975.
13. P.A.A. BACK, A.C. CASSELL, R. DUNGAR y R.T. SEVERN, "The seismic study of a double curvature dam", *Proc. Inst. Civ. Eng.*, **43**, pp. 217–48, 1969.
14. P. SILVESTER y M.V.K. CHARI, "Non-linear magnetic field analaysis of D.C. machines", *Trans. IEEE*, No. 7, pp. 5–89, 1970.
15. P. SILVESTER y M.S. HSIEH, "Finite element solution of two dimensional exterior field problems", *Proc. IEEE*, **118**, 1971.
16. B.H. McDONALD y A. WEXLER, "Finite element solution of unbounded field problems", *Proc. IEEE*, MTT-20, No. 12, 1972.
17. E. MUNRO, "Computer design of electron lenses by the finite element method", in *Image Processing and Computer Aided Design in Electron Optics*, p. 284, Academic Press, 1973.
18. O.C ZIENKIEWICZ, J.F. LYNESS y D.R.J. OWEN, "Three dimensional magnetic field determination using a scalar potential. A finite element solution", *IEEE, Trans. Magnetics MAG*, **13**, 1649–56, 1977.
19. J. SIMKIN y C.W. TROWBRIDGE, "On the use of the total scalar potential in the numerical solution of field problems in electromagnets", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **14**, 423–40, 1979.
20. J. SIMKIM y C.W. TROWBRIDGE, "Three-dimensional non-linear electromagnetic field computations using scalar potentials", *Proc. Inst. Elec. Eng.*, **127**, B(6), 1980.
21. C.W. TROWBRIDGE, "Low frequency electromagnetic field computations in flow simulation.' ' , *Comp. Mech. Appl. Meth. Eng.*, **52**, 653–79, 1985.
22. M.M. SUSSMAN, "Remarks on computational magnestostatics", *Int. J. Num.*

Meth Eng., **26**, 987–1000, 1988.
23. D.V. TANESA y I.C. RAO, *Student project report on lubrication*, Royal Naval College, Dartmouth, 1966.
24. M.M. REDDI, "Finite element solution of the incompressible lubrication problem", *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, **91**, (Ser. F.), p. 524, 1969.
25. M.M. REDDI y T.Y. CHU, "Finite element solution of the steady state compressible lubrication problem", *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, **92**, (Ser. F), p. 495, 1970.
26. J.H. ARGYRIS y D.W. SCHARPF, "The incompressible lubrication problem", *J. Roy. Aero. Soc.*, **73**, pp. 1044–6, 1969.
27. J.F. BOOKER y K.H. HUEBNER, "Application of finite element methods to lubrication: an engineering approach", *J. Lubr. Techn., Trans Am. Soc. Mech. Eng.*, **14**, (Ser. F), p. 313, 1972.
28. K.H. HUEBNER, "Application of finite element methods to thermo-hydrodynamic lubrication", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **8**, pp. 139–68, 1974.
29. S.M. ROHDE y K.P. OH, "Higher order finite element methods for the solution of compressible porous bearing problems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **9**, pp. 903–12, 1975.
30. A.K. TIEU, "Oil film temperature distributions in an infinitely wide glider bearing: an application of the finite element method", *J. Mech. Eng. Sci.*, **15**, p. 311, 1973.
31. K.H. HUEBNER, "Finite element analysis of fluid film lubrication – a survey", in *Finite Elements in Fluids*, (eds. R.H. Gallagher, J.T. Oden, C. Taylor y O.C. Zienkiewicz), Vol. **II**, pp. 225–54, Wiley, 1975.
32. H.C. MARTIN, "Finite element analysis of fluid flows", *Proc. 2nd. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Air Force Inst. Tech., Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1968.
33. G. de VRIES y D.H. NORRIE, *Application of the finite element technique to potential flow problems*, Reports 7 and 8, Dept. Mech. Eng., Univ. of Calgary, Alberta, Canadá, 1969.
34. J.H. ARGYRIS, G. MARECKZEC y D.W. SCHARPF, "Two and three dimensional flow using finite elements", *J. Roy. Aero. Soc.*, **73**, pp. 961–4, 1969.
35. L.J. DOCTORS, "An application of finite element technique to boundary value problems of potential flow", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **2**, pp. 243–52, 1970.
36. G. de VRIES y D.H. NORRIE, "The application of the finite element technique to potential flow problems", *J. Appl. Mech., Am. Soc. Mech. Eng.*, **38**, pp. 778–802, 1971.
37. S.T.K. CHAN, B.E. LAROCK y L.R. HERRMANN, "Free surface ideal fluid flows by finite elements", *Proc. Am. J. Civ. Eng.*, **99**, HY6, 1973.
38. B.E. LAROCK, "Jets from two dimensional symmetric nozzles of arbitrary shape", *J. Fluid Mech.*, **37**, pp. 479–83, 1969.
39. C.S. DESAI, "Finite element methods for flow in porous media", in *Finite Elements in Fluids*, (ed. R.H. Gallagher), Vol. **1**, pp. 157–82, Wiley, 1975.
40. I. JAVANDEL y P.A. WITHERSPOON, "Applications of finite element method to transient flow in porous media", *Trans. Soc. Petrol. Eng.*, **243**, pp. 241–51, 1968.
41. R.L. TAYLOR y C.B. BROWN, "Darcy flow solutions with a free surface", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **93**, HY2, pp. 25–33, 1967.
42. J.C. LUKE, "A variational principle for a fluid with a free surface", *J. Fluid Mech.*, **27**, pp. 395–7, 1957.
43. K. WASHIZU, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 2nd. ed., Pergamon Press, 1975.
44. J.C. BRUCH, "A survey of free-boundary value problems in the thory of fluid flow through porous media", *Advances in Water Resources*, **3**, 65–80, 1980.
45. C. BAIOCCHI, V. COMICIOLI y V. MAIONE, "Unconfined flow through porous media' ' , *Meccanice, Ital. Ass. Theor. Appl. MEch.*, **10**, 51–60, 1975.
46. J.M. SLOSS y J.C. BRUCH, "Free surface seepage problem", *Proc. ASCE*, **108**, EM5, 1099–1111, 1978.
47. N. KIKUCHI, "Seepage flow problems by variational inequalities", *Int. J. Num. Anal. Meth. geomech.*, **1**, 283–90, 1977.
48. C.S. DESAI "Finite element residual schemes for unconfined flow", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **10**, 1415–18, 1976.
49. C.S. DESAI y G.C. LI, " A residual flow procedure and application for free surface, and porous media", *Advances in Water Resources*, **6**, 27–40, 1983.
50. K.J. BATHE y M. KOSHGOFTAR, "Finite elements from surface seepage analysis without mesh iteration", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, **3**, 13–22, 1979.

Capítulo 11

EL TEST DE LA PARCELA, INTEGRACIÓN REDUCIDA Y ELEMENTOS NO CONFORMES

11.1 Introducción

En el Capítulo 2 se ha hecho referencia brevemente al test de la parcela como una forma de probar la convergencia de los elementos en desplazamientos para problemas de elasticidad en los que las funciones de forma violan los requisitos de continuidad. En este capítulo se tratará con más detalle este test, aplicable a todas las formas de elementos finitos, y se mostrará que:

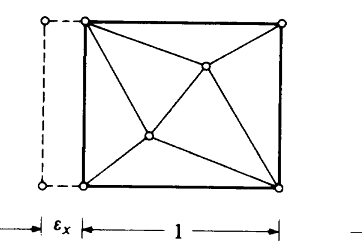
a) es una condición *necesaria* para probar la convergencia de cualquier aproximación de elementos finitos y, además, que debidamente extendido e interpretado, puede proporcionar
b) una condición *suficiente* de convergencia,
c) una valoración de la velocidad (asintótica) de convergencia del elemento probado,
d) una prueba de la robustez del algoritmo, y
e) un procedimiento para desarrollar nuevas y precisas formas de elementos finitos que violen los requisitos de compatibilidad (continuidad).

Aunque el test es en principio superfluo para elementos que satisfacen *a priori* todos los requisitos de continuidad, mediante aproximaciones polinómicas correctas e integración exacta, tiene, no obstante, gran utilidad ya que proporciona:

f) una prueba de que la programación ha sido correcta.

Por todas las razones citadas anteriormente el test de la parcela ha sido desde sus comienzos, y continúa siendo, la prueba más importante para los programas prácticos de elementos finitos.

El test original fue introducido por Irons[1-3] basado en razonamientos físicos y podría ser interpretado como una prueba que determinara si una parcela de elementos (Figura 11.1) sujeta a deformación constante reproducía exactamente el comportamiento constitutivo del material y proporcionaba las tensiones correctas cuando se hacía infinitamente pequeña. Si así era, se podía argumentar que el modelo de elementos finitos representaba el comportamiento del material real y, en el límite, a medida que el tamaño de los elementos disminuyese reproduciría, por tanto, exactamente



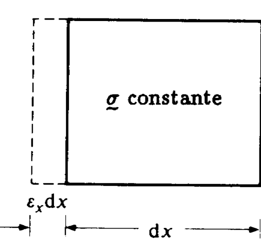


Figura 11.1 Una parcela de elementos y un volumen de continuo sujetos a deformación constante ε_x. Una interpolación física del test de la parcela de deformación constante o de desplazamiento lineal.

el comportamiento de la estructura real.

Claramente, aunque este test tendría que ser superado solamente cuando el tamaño del elemento de la parcela fuera infinitesimal, para la mayoría de los elementos en los que se usan polinomio el tamaño de la parcela no tendría de hecho relevancia y el requisito de que el test de la parcela fuese superado para cualquier tamaño de elemento se convirtió en rutinario.

Obviamente el desplazamiento de sólido rígido de la parcela no causaría deformación, y si se reprodujeran las leyes contitutivas adecuadas no se producirán cambios de tensión. El test de la parcela garantiza, por lo tanto, que no se produzca deformación bajo movimientos de sólido rígido.

Cuando se utilizan coordenadas curvilíneas el test de la parcela debe satisfacerse en el límite, pero generalmente no ocurrirá así para una parcela de tamaño finito. (Una excepción a esto es el sistema de coordenadas isoparamétricas en los problemas discutidos en el Capítulo 8). Por tanto, para muchos problemas como los de láminas, donde se usan coordenadas curvilíneas locales, este test debe retringirse a parcelas de tamaño infinitesimal y, basándose en consideraciones físicas solamente, parece ser una *condición necesaria y suficiente* de convergencia.

Numerosas publicaciones sobre la teoría y la práctica del test han seguido a las citadas publicaciones originales,[4–6] y Strang[7,8] les añadió respetabilidad matemática. Aunque algunos autores han formulado dudas sobre su validez,[9,10] éstas han sido totalmente refutadas,[11,12] y si el test se usa como aquí se describe satisface los requisitos *a)* a *d)* mencionados anteriormente.

11.2 Requisitos de convergencia

Se considera en lo sucesivo el test de la parcela aplicado a la solución de un conjunto de ecuaciones diferenciales

$$A(u) \equiv L(u) + g = 0 \tag{11.1}$$

en el dominio Ω junto con las condiciones

$$B(u) = 0 \tag{11.2}$$

en el contorno Γ del dominio.

La aproximación de elementos finitos es de la forma

$$u \approx \hat{u} = \mathbf{N}\mathbf{a} \tag{11.3}$$

donde $\mathbf{N}$ son las funciones de forma definidas en cada elemento, Ω_e, y $\mathbf{a}$ son parámetros incógnita.

Aplicando los procedimientos estándar de aproximación por elementos finitos (ver Capítulos 2 y 9) el problema se reduce en el caso lineal a un conjunto de ecuaciones algebraicas

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \tag{11.4}$$

que al ser resuelto proporciona una aproximación a la ecuación diferencial y a sus condiciones de contorno.

Lo que se entiende por "convergencia" en el sentido de la aproximación es que la solución aproximada, $\hat{u}$, debería tender a la solución exacta u cuando el tamaño de los elementos h se acerca al cero (con un esquema de subdivisión determinado). Expresado matemáticamente, se debe encontrar que el error en cualquier punto (cuando h es suficientemente pequeño) llega a ser

$$|u - \hat{u}| = O(h^q) \leq Ch^q \tag{11.5}$$

donde $q > 0$ y C son constantes positivas dependientes de la posición.

Esto debe cumplirse también para todas las derivadas de u definidas en la aproximación.

Llamamos orden de convergencia en la variable u al valor del índice q en la definición anterior.

Para asegurar convergencia es necesario que la aproximación satisfaga tanto las condiciones de consistencia como de estabilidad.[13]

El *requisito de consistencia* asegura que a medida que el tamaño de los elementos h tiende a cero, la ecuación de aproximación (11.4) representa de forma exacta la ecuación diferencial (11.1) y las condiciones de contorno (11.2) (al menos en sentido débil).

La *condición de estabilidad* se traduce simplemente en el requisito de que la solución del sistema de ecuaciones discretas (11.4) sea única y evite mecanismos espúreos que pueden estropear la solución para cualquier tamaño de los elementos.

Para problemas lineales en los que se resuelve el sistema de ecuaciones algebraicas (11.4) como

$$\mathbf{a} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} \tag{11.6}$$

esto significa simplemente que la matriz $\mathbf{K}$ debe ser no-singular para todos los posibles ensamblajes de elementos. Sin embargo, este requisito puede ser a veces demasiado exigente si, por ejemplo, se adopta una solución iterativa.

El test de la parcela se ha usado tradicionalmente como un procedimento para verificar el requisito de consistencia; la estabilidad se comprobaba independientemente asegurando la no-singularidad de las matrices.[14] Más aún, generalmente se probaba sólo la consistencia en la satisfacción de la ecuación diferencial (11.1), pero no de sus condiciones de contorno naturales. En lo que sigue se mostrará cómo todos los requisitos necesarios de convergencia pueden ser verificados mediante un test de la parcela concebido adecuadamente.

Una singularidad "débil" en un elemento aislado puede a veces ser permisible y algunos elementos que la muestran han sido, y todavía son, usados en la práctica con éxito. Uno de estos casos es el elemento isoparamétrico de ocho nodos con una cuadratura de Gauss de 2×2, al que nos referiremos más tarde. Se observa que este elemento muestra a veces un comportamiente peculiar (aunque su uso tiene muchas ventajas que se describen en el Capítulo 12). Un elemento que falla ocasionalmente se denomina *no robusto* y el test de la parcela proporciona un medio para valorar el grado de robustez.

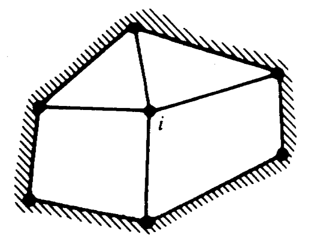
11.3 El test de la parcela simple (formas A y B)—una condición necesaria de convergencia

Consideremos primero la condición de consistencia que requiere que en el límite (cuando h tiende a cero) la aproximación de elementos finitos de la Ec. (11.4) modelice exactamente la ecuación diferencial (11.1) y las condiciones de contorno (11.2).

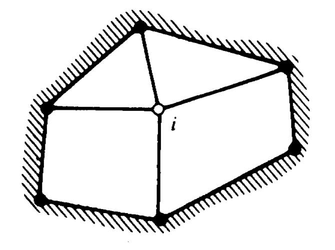
Si se considera una "pequeña" región de dominio (de tamaño $2h$) se puede desarrollar la función incógnita u y las derivadas esenciales que aparecen en la forma débil en serie de Taylor. De aquí se concluye que para la convergencia de la función y su primera derivada en problemas de ecuaciones de segundo orden y dos dimensiones, se requiere que alrededor de un punto i que se supone está en el origen de coordenadas,

$$\begin{aligned} u &= u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i y + O(h^p) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + O(h^{p-1}) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i + O(h^{p-1}) \end{aligned} \tag{11.7}$$

con $p \geq 2$. La aproximación de elementos finitos debería por tanto reproducir exactamente el problema para *cualquier forma lineal* de u a medida que h



TestA
a prescrito en todos los nodos
$K_{ij}a_j = f_i$ verificado en el nodo i



TestB
a prescrito en el contorno de la parcela
$a_i = K_{ii}^{-1}(f_i - K_{ij}a_j)(j = i)$ se resuelve

Figura 11.2 Test de la parcela en las formas A y B.

tiende a cero. Obviamente se pueden escribir condiciones similares para problemas de mayor orden. Este requisito se verifica mediante la actual interpretación del test de la parcela ilustrado en la Figura 11.2.

Así se calcula primero un solución lineal arbitraria de la ecuación diferencial y su correspondiente conjunto de parámetros $\mathbf{a}$ [viz. Ec. (11.3)] en todos los "nodos" de una *parcela* que ensamble completamente la variable nodal a_i (esto es, que proporcione todos los términos de la ecuación que le corresponde).

En el *test A* simplemente se sustituyen los valores exactos de los parámetros $\mathbf{a}$ en la i-ésima ecuación y se verifica que

$$K_{ij}a_j - f_i \equiv 0 \tag{11.8}$$

En el *test B* sólo se sustituyen los valores de $\mathbf{a}$ correspondientes al contorno de la "parcela" y se halla a_i de la forma

$$a_i = K_{ii}^{-1}(f_i - K_{ij}a_j) \qquad j \neq i \tag{11.9}$$

y se compara con el valor exacto.

Ambos tests de la parcela verifican sólo el cumplimento de la ecuación básica y no de las aproximaciones de contorno, ya que éstas han sido excluídas explícitamente.

Se mencionó antes que el test se debe verificar, en principio, sólo para una parcela infinitesimalmente pequeña de elementos; sin embargo, para ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes y con una transformación de Jacobiano constante el tamaño de la parcela es inmaterial y el test se puede llevar a cabo en una parcela de dimensiones arbitrarias.

De hecho, si los coeficientes no son constantes existe la misma independencia con respecto al tamaño siempre que un conjunto constante

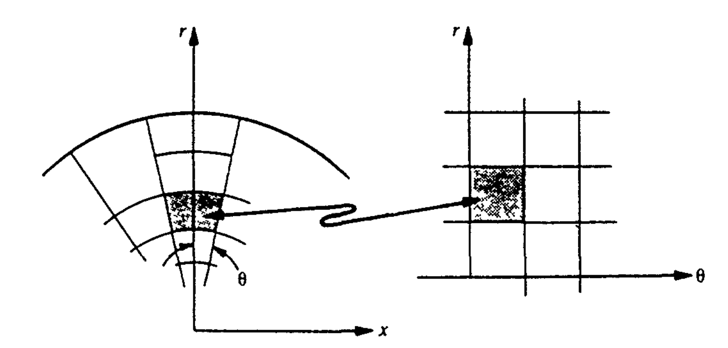


Figura 11 3 Transformación polar de coordenadas.

de dichos coeficientes se use en la formulación del test. (Esto se aplica, por ejemplo, en problemas axial-simétricos en los que coeficientes del tipo 1/radio aparecen en las ecuaciones y cuando se les aplica el test de la parcela es necesario simplemente suponer tales cantidades constantes al hacer los cálculos).

Si se usan elementos transformados, curvilíneos, no es obvio que el test de la parcela planteado en coordenadas globales deba ser satisfecho. Aquí, en general, puede existir convergencia en las coordenadas originales, pero un test de la parcela de tamaño finito puede no satisfacerse. Sin embargo, de nuevo, si se especifica la naturaleza de la subdivisión sin cambiar la función de transformación, en el límite el jacobiano es localmente constante y las condiciones anteriores pueden aplicarse. Para ilustrar este punto consideremos, por ejemplo, un conjunto de elementos en los que las coordenadas locales sean simplemente las coordenadas polares mostradas en la Figura 11.3. Con funciones de forma polinómicas de r y θ el test de la parcela del tipo descrito anteriormente no se verificará para elementos de tamaño finito, sin embargo, en el límite, cuando el tamaño del elemento tiende a cero, si será satisfecho. Por tanto, es evidente que la verificación del test de la parcela es una *condición necesaria* que debe ser satisfecha siempre *cuando el tamaño de la parcela es infinitesimal.*

Esta condición, a la que nos referimos como *satisfación débil del test de la parcela* no siempre es fácil de verificar, particularmente si la programación del elemento no permite fácilmente la consideración de coeficientes o jacobianos constantes. En la Sección 11.9 se discutirá en detalle su implementación, que, sin embargo, es sólo necesaria para formas de elementos muy especiales. Es ciertamente afortunado que los elementos isoparamétricos estándar reproduzcan exactamente el polinomio lineal en coordenas globales (viz. Capítulo 8) y por esta razón no se requiere tratamiento especial, a menos que se introduzca algún otro *crimen* (tal como integración selectiva o reducida).

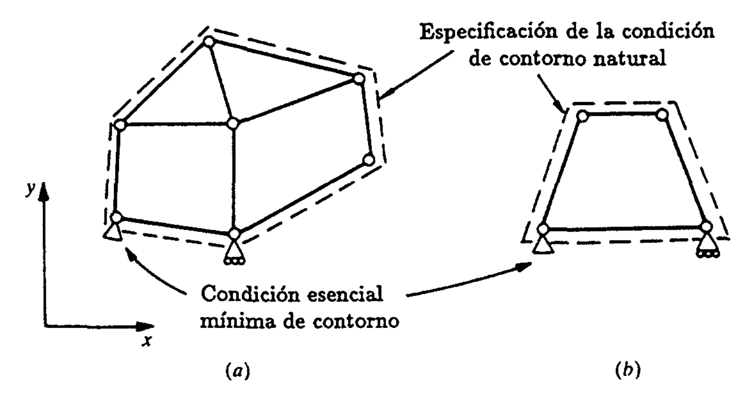


Figura 11.4 (a) Test de la parcela de forma C. (b) Test para un elemento aislado

11.4 Test de la parcela generalizado (test C) y test para un elemento aislado

El test de la parcela descrito en la sección precedente se mostró como condición necesaria de convergencia de la formulación, pero no establece condiciones suficientes. En particular, se omitió la verificación de la aproximación de la "carga" de contorno para el caso en que se especifiquen condiciones "naturales" (ej., ecuaciones de elasticidad). Tampoco se verificó la estabilidad de la aproximación. Fácilmente puede construirse un test que sí incluya una prueba de todas estas condiciones, y que puede verse en la Figura 11.4 como *test C*. En éste la parcela de elementos se ensambla como en los casos anteriores, pero se le somete a condiciones de contorno naturales prescritas (o fuerzas en su perímetro). La matriz ensamblada para la parcela completa se escribe de la forma

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$$

Fijando sólo el número mínimo de parámetros a necesarios para obtener una solución físicamente válida (ej., eliminando los movimientos de sólido rígido en un ejemplo de elasticidad o un único valor de la temperatura en un problema de transmisión del calor) se busca la solución para los restantes valores de $\mathbf{a}$ y se comparan con la solución exacta.

Ahora cualquier singularidad de la matriz $\mathbf{K}$ será observada y, como el vector $\mathbf{f}$ incluye todos los términos de fuente y de fuerzas de contorno necesarios, la formulación quedará completamente verificada (siempre que, naturalmente, haya el suficiente número de casos de prueba).

Con las fuerzas en el contorno incluídas es por supuesto posible reducir el tamaño de la parcela a un único elemento y esta forma alternativa del test C se ilustra en la Figura 11.4(b), y se conoce como test para un elemento aislado[11]. Este test es evidentemente requisito para una buena formulación

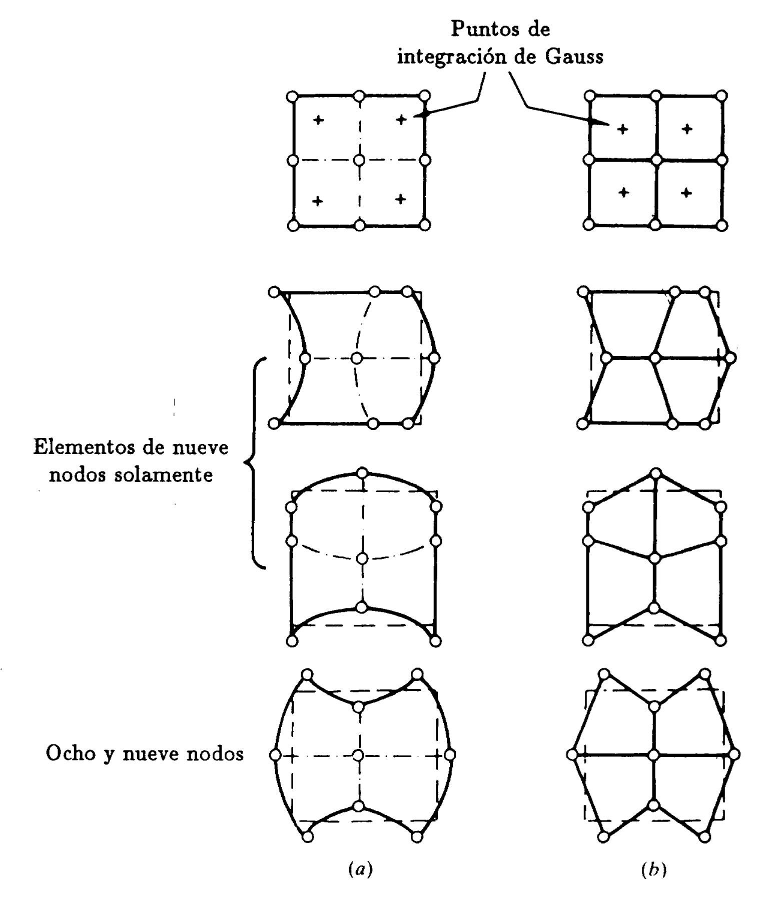


Figura 11.5 (*a*) Modos de energía nula (singulares) para los elementos cuadráticos de ocho y nueve nodos y (*b*) para una parcela de elementos bilineales con un único punto de integración.

de elementos finitos ya que, a veces, una parcela mayor puede no revelar las inestabilidades inherentes a un elemento aislado. Esto ocurre en el bien documentado caso del elemento isoparamétrico de ocho nodos con integración (reducida) de cuatro puntos de Gauss en problemas de deformación/tensión plana, donde el modo singular de deformación de un elemento aislado (viz. Figura 11.5) desaparece cuando se ensamblan varios elementos.† *Debe*

† Esta figura muestra también una singularidad similar para una parcela de cuatro elementos bilineales con una cuadratura de un único punto, y se hace notar la forma similar de los modos de energía nula (viz. Capítulo 8, Sec. 8.11.3).

notarse, sin embargo, que la verificación del test del elemento aislado no es condición suficiente de convergencia. Para esto se requiere al menos un contorno elemental interno para verificar que la consistencia de la solución de una parcela se conserva entre los elementos.

11.5 Test de la parcela de mayor orden[6,8]

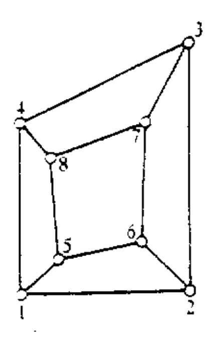
Los tests de la parcela discutidos en las dos secciones anteriores aseguraban (al ser verificados) que existía convergencia, pero no comprobaban el orden de esta convergencia, más allá de asegurarnos que en el caso de la Ec. (11.7) los errores en u eran, al menos, de orden $O(h^2)$. Es una cuestión sencilla determinar la mayor velocidad asintótica de convergencia de un elemento dado simplemente imponiendo, en vez de una solución lineal, soluciones polinómicas exactas de mayor orden. El mayor valor de tales polinomios para el cual se consigue una completa verificación del test de la parcela evalúa automáticamente la correspondiente velocidad de convergencia. Se sobreentiende que para dichas soluciones exactas generalmente deberán incluirse términos de fuente no nulos en la ecuación original (11.1).

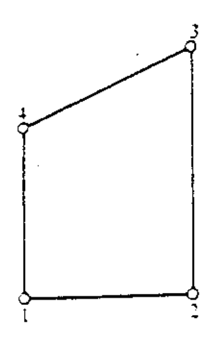
Además, el test C junto con un test de la parcela de mayor orden pueden ser usados para ilustrar cualquier tendencia a la aparición de "bloqueo" (ver Capítulo 12). Por lo tanto, se puede establecer la robustez del elemento en relación a varios parámetros (ej., coeficientes de Poisson cercanos a 0.5 para problemas de elasticidad en deformación plana).

11.6 Aplicación del test de la parcela a elementos de elasticidad plana con cuadraturas "estándar" y "reducidas"

En las próximas secciones se consideran varias aplicaciones del test de la parcela para la evaluación de modelos de elementos finitos. En cada caso se considera sólo uno de los test que deben ser implementados. Para la evaluación completa de una formulación es necesario considerar todas las posibles soluciones polinómicas esenciales independientes, además de una variedad de configuraciones de las parcelas que verifiquen los efectos de la distorsión de los elementos, así como interconexiones alternativas en la malla que se usen comúnmente en los análisis. Es importante que tanto la consistencia como la estabilidad sean evaluadas en un test llevado a cabo adecuadamente.

En el Capítulo 8 (Sección 8.11) se discutió el orden mínimo de integración numérica (sin pérdida de velocidad de convergencia) necesario para varios problemas de elementos finitos. Sin embargo, también se vio que en algunos problemas dicho orden mínimo de integración llevaba a matrices singulares. Si se define la integración *estándar* como aquella que evalúa exactamente la rigidez de un elemento (al menos en su forma no distorsionada), entonces





(*a*) Parcela de cinco elementos (*b*) Parcela de un elemento

Figura 11.6 Parcela para la evaluación de problemas de tensión plana integrados numéricamente.

cualquier orden de integración menor se llama generalmente *reducida.*

Dicha integración *reducida* tiene algunos méritos en ciertos problemas por razones que se discutirán en el próximo capítulo, pero puede causar irregularidades que deberían ser descubiertas en un test de la parcela (lo que suplementa y unifica los argumentos de la Sección 3.11.3). A continuación se muestra la aplicación del test de la parcela a varios problemas típicos.

Se considera primero un problema de tensión plana que se muestra en la Figura 11.6(*a*). El material es lineal, elástico isótropo con propiedades $E = 1000$ y $\nu = 0.3$. El procedimiento de elementos finitos usado se basa en la formulación en desplazamientos utilizando funciones de forma isoparamétricas de cuatro nodos e integración numérica. Los análisis se llevan a cabo utilizando el elemento plano y el programa descritos en el Capítulo 15. Puesto que el cálculo de la rigidez incluye sólo primeras derivadas de los desplazamientos la formulación converge siempre que el test de la parcela sea verificado para todas las soluciones polinómicas lineales en desplazamientos. Aquí se considera sólo una de las seis soluciones polinómicas lineales independientes necesarias para verificar la satisfacción del test. La solución considerada es

$$u = 0.002x \qquad v = -0.0006y \tag{11.10}$$

que produce fuerzas de volumen nulas y tensiones nulas excepto

$$\sigma_x = 2 \tag{11.11}$$

En la Tabla 11.1 se da la solución correspondiente a los deplazamientos nodales que satisfacen la Ec. (11.10) exactamente.

TABLA 11.1

SOLUCIÓN DE LA PARCELA DE LA FIGURA 11.6.

	Coordenadas		Desplazamientos calculados		Fuerzas	
Nodo i	x_i	y_i	u_i	v_i	F_{x_i}	F_{y_i}
1	0.0	0.0	0.0	0.0	-2	0
2	2.0	0.0	0.0040	0.0	3	0
3	2.0	3.0	0.0040	-0.00186	2	0
4	0.0	2.0	0.0	-0.00120	-3	0
5	0.4	0.4	0.0008	-0.00024	0	0
6	1.4	0.6	0.0028	-0.00036	0	0
7	1.5	2.0	0.0030	-0.00120	0	0
8	0.3	1.6	0.0006	-0.00096	0	0

El test de la parcela se lleva a cabo primero usando una cuadratura gaussiana "estándar" 2×2 para calcular la rigidez de cada elemento y las fuerzas de reacción resultantes en los nodos. Para el test de la parcela A se coartan todos los nodos y se prescriben todos los desplazamientos nodales a los valores especificados en la Tabla 11.1. Las tensiones se calculan en los puntos de Gauss seleccionados $1 \times 1, 2 \times 2$ y 3×3 y todos resultan exactos salvo errores de redondeo (se usó precisión de 64 bit en un VAX 11/750, lo cual produce errores de redondeo menores de 10^{-15} en las cantidades calculadas). Las reacciones también se calcularon para todos los nodos y de nuevo resultaron idénticas a los valores mostrados en la Tabla 11.1 salvo errores de redondeo. La aproximación mencionada satisface todas las condiciones requeridas a un procedimento de elementos finitos (esto es, funciones de forma conformes y cuadratura de orden normal). Por consiguiente, el test de parcela meramente verifica que no se han cometido errores en la programación. El test de la parcela A no requiere el uso explícito de la matriz de rigidez; consecuentemente el test de la parcela anterior fue repetido usando el test B donde sólo los nodos 1 y 4 fueron coartados con sus desplazamientos prescritos de acuerdo con la Tabla 11.1. Esto verifica la exactitud de la matriz y, como se esperaba, se obtuvieron de nuevos resultados exactos salvo errores de redondeo (osea, errores del orden de 10^{-15}). Finalmente, se hizo un test tipo C en el nodo 1 totalmente coartado y el nodo 4 coartado sólo en la dirección x. Se aplicaron fuerzas nodales a los nodos 2 y 3 de acuerdo con los valores generados a través de tensiones σ_x en el contorno (esto es, las fuerzas nodales de la Tabla 11.1). Este test también produjo soluciones exactas para todas las restantes magnitudes nodales de la Tabla 11.1 y una tensión $\sigma_x = 2$ en todos los puntos de Gauss de cada elemento.

Se repitió la serie de tests de la parcela anteriores, pero usando una cuadratura de Gauss "reducida" 1×1 para calcular la rigidez elemental y las fuerzas nodales. El test de la parcela C indicó que la matriz global contenía

dos "modos de energía nula" globales (esto es, la matriz global de rigidez era deficiente en rango en grado 2), por lo que producía desplazamientos nodales incorrectos cuyos resultados dependían solamente de los errores de redondeo en los cálculos. Éstos, a su vez, producían tensiones incorrectas salvo en el punto de Gauss 1×1 usado en cada elemento para calcular la rigidez y las fuerzas. Por tanto, y debido a consideraciones de estabilidad, el uso de la cuadratura 1×1 en elementos de cuatro nodos produce la no verificación del test de la parcela. El elemento, sin embargo, sí que satisface los requisitos de consistencia, y si se usa un procedimento de estabilización adecuado (ej., en la práctica se usan métodos de rigidez o viscosos), este elemento puede ser usado para cálculos prácticos[15,16].

Debe hacerse notar que puede llevarse a cabo un test del elemento aislado usando la malla mostrada en la Figura 11.6(b). Los resultados se dan en la Tabla 11.1 para los nodos 1 a 4. Para la parcela de un solo elemento, los tests de la parcela A y B coinciden y ninguno de ellos evalúa la precisión o la estabilidad de la matriz de rigidez. Por otro lado, el test de la parcela C lleva a las conclusiones alcanzadas utilizando la parcela de cinco elementos: esto es, la cuadratura gaussiana 2×2 pasa el test mientras que la cuadratura 1×1 falla el test en la parte de estabilidad (como de hecho era de esperar a partir de los argumentos del Capítulo 8, Sección 8.11).

La sencilla prueba de la cancelación de un término diagonal durante la descomposición triangular es suficiente para avisar de deficiencias de rango en la matriz de rigidez. En un método de perfil, descrito en el Capítulo 15, esto se controla fácilmente ya que la eliminación compacta transforma el valor inicial de un elemento de la diagonal a su valor final en un sólo paso. Por lo tanto, sólo se precisa una variable escalar adicional para controlar los valores iniciales y finales.

En la Figura 11.7 se considera una parcela de dos elementos cuadriláteros isoparamétricos cuadráticos. Se consideran tanto el tipo serendípito de ocho nodos como el lagrangiano de nueve y se lleva a cabo un test de la parcela básico de tipo C para el caso de carga 1. Para el elemento de ocho nodos tanto las cuadraturas gaussianas de 2×2 ("reducida") y 3×3 ("estándar") satisfacen el test de la parcela, mientras que para el elemento de nueve nodos sólo la cuadratura 3×3 es satisfactoria, y la cuadratura 2×2 lleva a una deficiencia de rango en la matriz. Sin embargo, si se realiza un test de elemento aislado para el elemento de ocho nodos con cuadratura 2×2, se descubre el modo espúreo de energía nula mostrado en la Figura 11.5 y, por tanto, el test de un elemento aislado falla. Consideramos a tales elementos como sospechosos y deben ser usados con cuidado. Para ilustrar lo que puede ocurrir en la práctica consideremos el sencillo problema de la Figura 11.8(a). En este ejemplo la "estructura" modelizada por un único elemento se considera rígida, y el interés se centra en la respuesta de la "cimentación". En consecuencia sólo se usa un elemento para modelar la

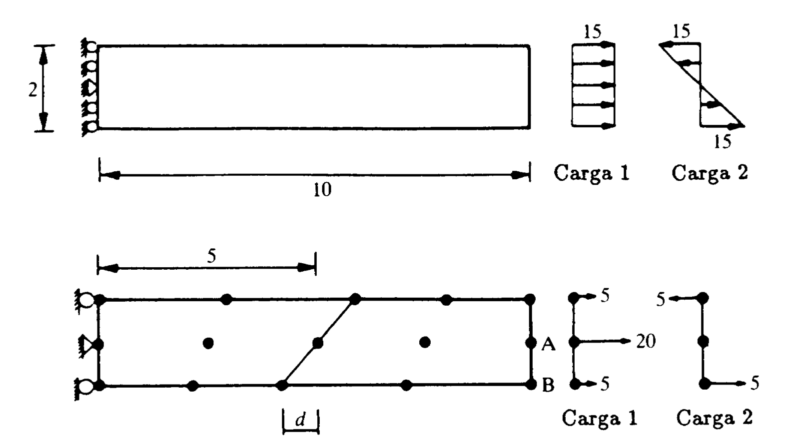


Figura 11.7 Test de la parcela para cuadriláteros isoparamétricos de ocho y nueve nodos.

estructura. El uso de la cuadratura 2×2 lleva a los resultados mostrados en la Figura 11.8(b), mientras que los resultados para la cuadratura 3×3 se muestran en la Figura 11.8(c). Debe hacerse notar que no existe modo de energía nula, ya que se ha usado más de un elemento. Sin embargo, hay una respuesta espúrea debido a la gran diferencia de módulos entre la estructura y la cimentación. Esto sugiere que en problemas en los que la respuesta no lineal pueda llevar a variaciones importantes en los parámetros de los materiales puede también inducirse este comportamiento, y por lo tanto el uso del elemento de ocho nodos con integración 2×2 debe ser controlado de cerca para detectar tales comportamientos anómalos.

Ciertamente, las condiciones de apoyo o de carga pueden por sí mismas inducir respuestas muy sospechosas para elementos que son casi singulares. La Figura 11.9 muestra algunas divertidas peculiaridades que pueden ocurrir en elementos con integración reducida, y que desaparecen enteramente si se usa integración completa[17]. En todos los casos el *ensamblaje* de elementos es no-singular aunque los elementos individuales tengan deficiencias de rango.

11.7 Aplicación del test de la parcela a un elemento incompatible

Con el fin de demostrar el uso del test de la parcela para una formulación de elementos finitos que viola los requisitos usuales de continuidad de las funciones de forma, consideraremos los modos incompatibles de deformacón plana introducidos por Wilson *et al.*[18] y discutidos por Taylor *et al.*[19]. La formulación incompatible considerada usa la siguiente aproximación para los desplazamientos elementales:

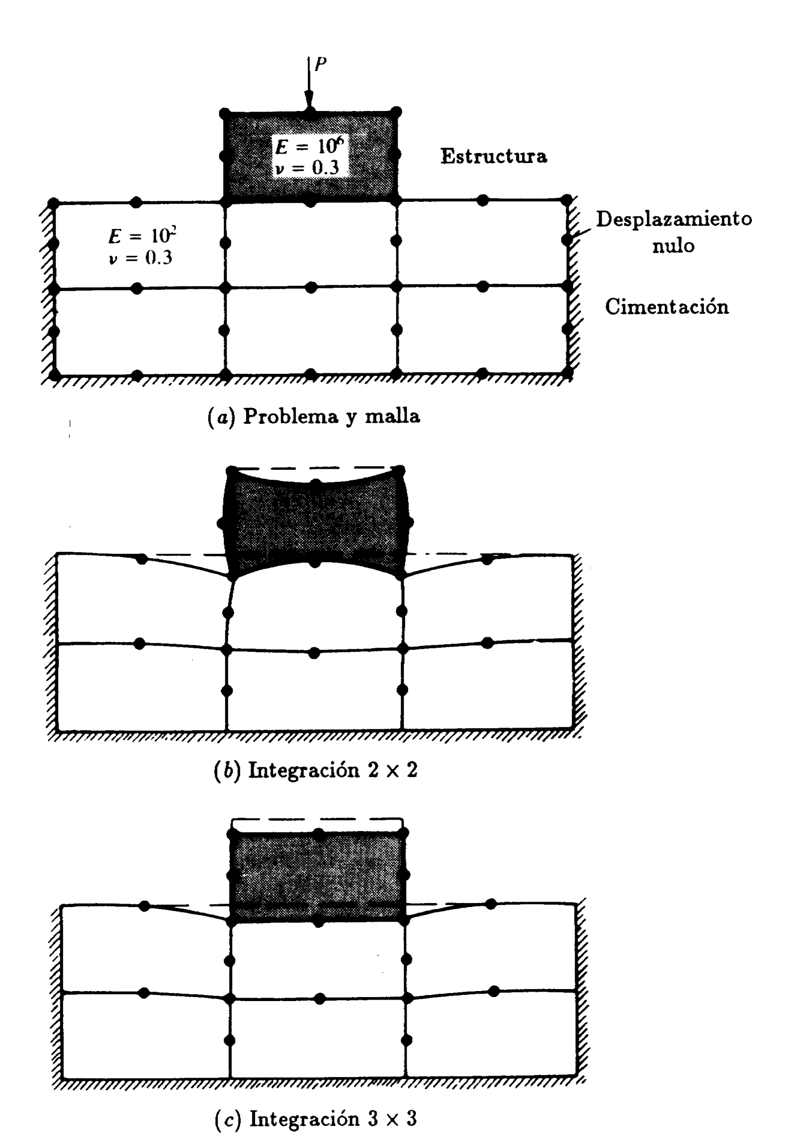


Figura 11.8 Propagación de un modo espúreo a partir de un único elemento no satisfactorio.

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_I(\xi,\eta)\mathbf{a}_I + (1-\xi^2)\boldsymbol{\alpha}_1 + (1-\eta^2)\boldsymbol{\alpha}_2 \tag{11.12}$$

donde $\mathbf{N}_I (I = 1-4)$ son las funciones de forma bilineales conformes usuales, y los últimos términos son modos de deformación incompatibles definidos

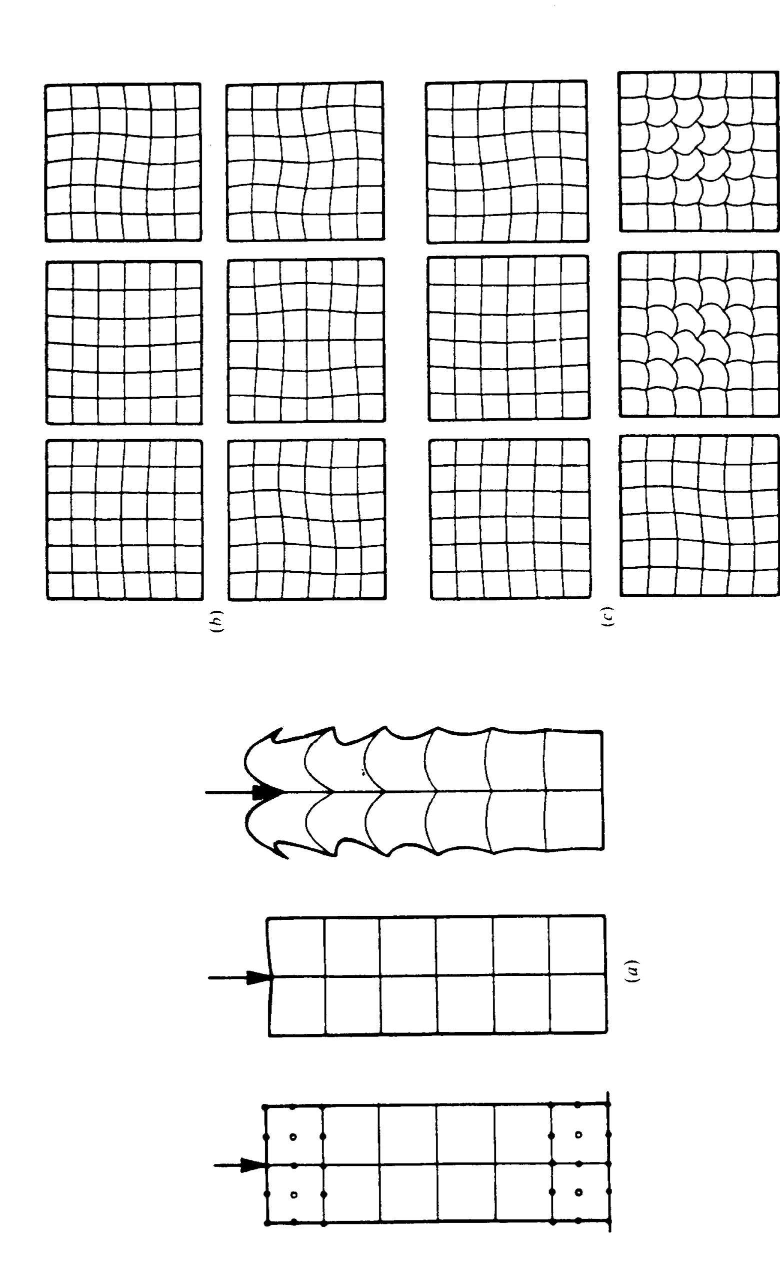


Figura 11.9 Respuesta peculiar de ensamblajes de elementos casi singulares[17]. (a) Una columna de elementos de nueve nodos con carga puntual para integraciones 3×3 y 2×2. El ensamblaje completo es no singular, pero son evidentes modos singulares elementales. (b) Un ensamblaje totalmente coartado de elementos de nueve nodos sin singularidades – los primeros seis modos propios con integración completa (3 × 3). (c) como (b) pero con integración 2 × 2. Nótese la aparición de modos salvajes llamados modos de Esher en la referencia 17 en honor a dicho artista gráfico.

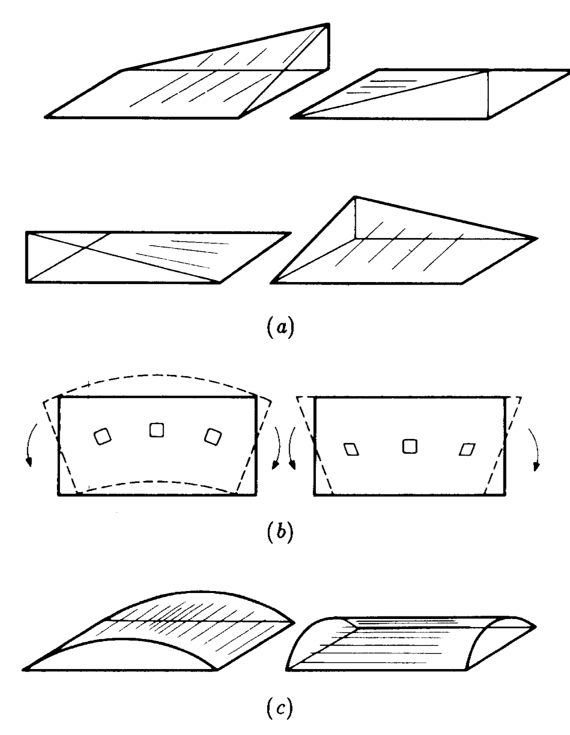
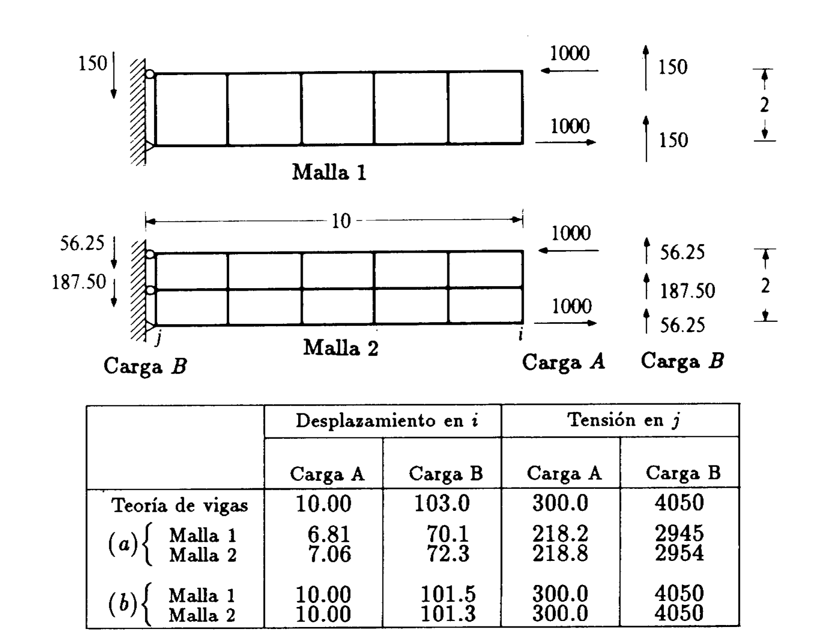


Figura 11.10 (*a*) Cuadrilátero lineal con funciones de forma auxiliares incompatibles; (*b*) Flexión pura y desplazamientos lineales causando cortante; (*c*) Funciones auxiliares "de flexión" con variables internas.

como funciones jerárquicas de forma independiente para cada elemento.

Las funciones de forma usadas se ilustran en la Figura 11.10. Las primeras, un conjunto del tipo estándar de Lagrange, dan un campo de desplazamientos que, como se muesta en la Figura 11.10(*b*), introduce deformaciones de cortante incluso en flexión pura. Las segundas, en las que los parámetros $\boldsymbol{\alpha}_1$ y $\boldsymbol{\alpha}_2$ están estrictamente asociados a un elemento específico y, por tanto, introducen incompatibilidad pero aseguran un comportamiento correcto a flexión, se ilustran en la Figura 11.11.

En la referencia 19 se calcula la aproximación de elementos finitos sumando las energías potenciales de cada elemento y calculando las cargas nodales debidas a las fuerzas en el contorno a partir de la parte conforme del campo de desplazamientos solamente. Por tanto, a los efectos de realizar el test de la parcela, calcularemos las deformaciones utilizando todas las partes del campo de desplazamientos, lo que lleva a una generalización de (11.4) que puede escribirse de la forma



	Desplazamiento en i		Tensión en j	
	Carga A	Carga B	Carga A	Carga B
Teoría de vigas	10.00	103.0	300.0	4050
(*a*) Malla 1	6.81	70.1	218.2	2945
(*a*) Malla 2	7.06	72.3	218.8	2954
(*b*) Malla 1	10.00	101.5	300.0	4050
(*b*) Malla 2	10.00	101.3	300.0	4050

Figura 11.11 Resultados del cuadrilátero no-conforme en flexión de vigas tratadas como tensión plana: (*a*) cuadrilátero lineal conforme, (*b*) cuadrilátero no-conforme.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} \tag{11.13}$$

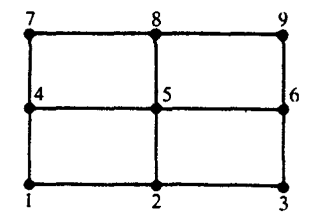
Aquí $\mathbf{K}_{11}$ y $\mathbf{f}_1$ son la rigidez y las cargas del elemento bilineal (conforme) de cuatro nodos, $\mathbf{K}_{12}$ y $(= \mathbf{K}_{12}^T)$ son las rigideces de acoplamiento entre los desplazamientos conformes y no-conformes, y $\mathbf{K}_{22}$ y $\mathbf{f}_2$ son la rigidez y las cargas de los desplazamientos no-conformes. Nótese que, de acuerdo con el algoritmo de la referencia 18, $\mathbf{f}_2$ debe anularse para las soluciones de los tests de la parcela.

Para un test en deformación o tensión planas sólo deben considerarse polinomios lineales, en los que los desplazamientos no-conformes deben anularse. Por tanto, para que se verifique el test de la parcela debe tenerse

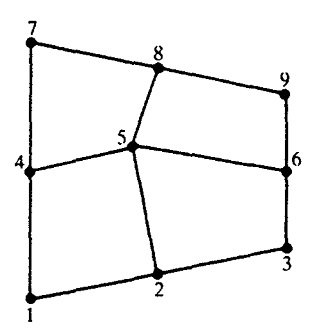
$$\mathbf{K}_{11}\mathbf{a} = \mathbf{f}_1 \tag{11.14a}$$

y

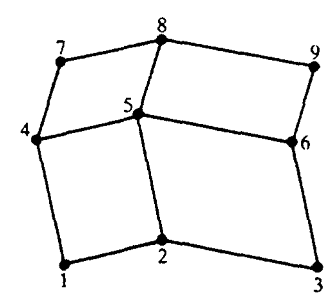
$$\mathbf{K}_{21}\mathbf{a} - \mathbf{f}_2 = 0 \tag{11.14b}$$



(a) Discretización regular.



(b) Discretización irregular alrededor del nodo 5



(c) Discretización de jacobiano constante alrededor del nodo 5

Figura 11 12 Test de la parcela para una forma de elemento incompatible

Si se lleva a cabo un test de la parcela para la malla mostrada en la Figura 11.12(a) se encuentra que las tres formas (osea, test tipo A, B y C) satisfacen estas condiciones y, por tanto, pasan el test. Si se considera la parcela mostrada en la Figura 11.12(b), por el contrario, el test no se cumple. Este incumplimiento se manifiesta de diferentes formas para cada tipo de test. El test tipo A produce valores no nulos de $\mathbf{f}_2$ cuando $\boldsymbol{\alpha}$ se

prescribe nula y a de acuerdo con los desplazamientos considerados. En la forma B el valor de los desplazamientos nodales $\mathbf{a}_5$ tienen error y $\boldsymbol{\alpha}$ son no nulos, lo que lleva a tensiones erróneas en cada elemento. En la forma C todos los desplazamientos libres son erróneos, así como las tensiones.

Es interesante notar que cuando la parcela se construye según la Figura 11.12(c), donde todos los elementos son paralelogramos, las tres formas del test de la parcela se ven de nuevo satisfechas. Por consiguiente, se nota que si una malla cualquiera se refina sistemáticamente por subdivisón de cada elemento en cuatro elementos cuyos lados estén a lo largo de las líneas ξ, η del elemento original con valores $-1, 0$ y 1 (esto es, por bisecciones) la malla converge a aproximaciones de jacobiano constante del tipo mostrado en la Figura 11.12(c). Por tanto, en este caso particular el elemento de modos incompatibles satisface un test de la parcela débil, y por consiguiente, convergerá. Sin embargo, en general puede ser necesario utilizar una discretización muy fina para conseguir la precisión suficiente, y en consecuencia el elemento probablemente no tiene un uso práctico (ni eficiente) en ingeniería.

El sencillo artificio de asegurar que el jacobiano se toma como constante en cada elemento consiste en evaluarlo solamente una vez en $\xi = \eta = 0$ (el centro del elemento). Esto asegura convergencia para todas las formas del elemento— y con esta alteración del algoritmo el elemento incompatible es convergente, aunque no extremadamente preciso[19].

11.8 Generación de funciones incompatibles que satisfacen el test de la parcela

En la sección previa se ha mostrado cómo un elemento incompatible puede, en ocasiones, producir resultados superiores a pesar de violar las reglas que se postulan normalmente. En el análisis de placas y láminas se trata con problemas que requieren continuidad C_1; el uso de dichas funciones incompatibles está muy extendido no sólo porque producen mejores resultados, sino también debido a la dificultad de desarrollar funciones que satisfagan la condición de su continuidad y también la de sus derivadas. En esta sección se trata el problema de cómo generar funciones de forma incompatibles de tal manera que se asegure automáticamente el cumplimiento del test de la parcela y, por tanto, la convergencia. Las reglas para hacer esto se han desarrollado recientemente,[20,21] y se han aplicado a la obtención de nuevos elementos de flexión de placas. Aquí se presentan estas reglas en un sencilo ejemplo de un problema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, pero los resultados son fácilmente extensibles a otras situaciones.

Considérese la solución por elementos finitos de la siguiente ecuación:

$$A(u) \equiv -T\nabla^2 u + ku - q = 0 \quad \text{en el dominio } \Omega \qquad (11.15)$$

con las condiciones de contorno

$$u = \bar{u} \quad \text{en} \quad \Gamma_u$$

y (11.16)

$$T\frac{\partial u}{\partial n} = \bar{t} \quad \text{en } \Gamma_t$$

Esto puede representar el desplazamiento u de una membrana elástica sobre un soporte elástico con una tensión inicial T y una constante elástica k. La incógnita u se aproxima por dos conjuntos de funciones (jerárquicas)

$$u = u^c + u^n \tag{11.17a}$$

$$u^c = \mathbf{N}^c \mathbf{a}^c \quad \text{y} \quad u^n = \mathbf{N}^n \mathbf{a}^n \tag{11.17b}$$

donde $\mathbf{N}^c$ y $\mathbf{N}^n$ son funciones de forma compatibles e incompatibles, respectivamente. Debe enfatizarse que éstas son linealmente independientes, ya que de otro modo las condiciones de estabilidad (i.e., la no-singularidad de las matrices) serían violadas, como era el caso en el contraejemplo de Stummel[9].

Cuando se somete una parcela de elementos a una variación lineal de u tal que se satisfaga la Ec. (11.15), la aproximación u^c es capaz de proporcionar esta solución y satisfacer todos los requitos del test de la parcela. (Naturalmente, se tiene que suponer que $q = -ku$.)

Se deduce, por tanto, que u^n será nula. Sin embargo, es importante considerar el test para un elemento aislado en el que se aplica una tensión constante $\bar{t}$ (correspondiente a $u^c = u$). La ecuación de Galerkin correspondiente al modo incompatible es ahora

$$\int_{\Gamma_e} N_i^n k \frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma \equiv \int_{\Gamma_e} N_i^n k \left(n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \int_{\Gamma_e} N_i^n \bar{t}\, d\Gamma \tag{11.18}$$

y esta ecuación debe satisfacerse idénticamente con $\bar{t}$, k y $\partial u/\partial n$ constantes. En lo anterior, Γ_e representa el contorno total del elemento y n_x, n_y y $\mathbf{n}$ son el vectores normales al contorno (viz. Apéndice 6).

La condición anterior se consigue fácilmente asegurando que

$$\int_{\Gamma_e} N_i^n \mathbf{n}\, d\Gamma = 0 \tag{11.19}$$

Una condición similar fue llamada "test de interpolación" por Specht[34] y también introducida anteriormente por Samuelsson.[20] Utilizando esto se ha desarrollado un elemento triangular no conforme para flexión de placas que satisface el test de la parcela y además proporciona excelentes resultados en diversas aplicaciones.

En el presente ejemplo se puede usar alternativamente un test de la parcela más débil que establezca que

$$\int_{\Gamma_e} N_i^n n_x\, d\Gamma = 0 \tag{11.20a}$$

y

$$\int_{\Gamma_e} N_i^n n_y d\Gamma = 0 \tag{11.20b}$$

para cada elemento, imponiendo por tanto la condición

$$\int_{\Gamma_e} N_i^n \bar{t}\, d\Gamma = 0 \tag{11.21}$$

que implica (como sugirió originalmente Wilson) que las cargas de contorno de los desplazamientos incompatibles deben anularse o ser ignoradas. Por otra parte, la contribución de las fuerzas de volumen (osea, q) deben ser calculadas usando tanto las partes conformes como no-conformes de los desplazamientos.

Para ilustrar el uso del procedimiento anterior para desarrollar funciones de forma de modos incompatibles, considérese el caso de un elemento cuadrilátero no-conforme de cuatro nodos que en el caso particular de un rectángulo reproduzca el elemento no-conforme de la referencia 18. La convergencia de este elemento no-conforme para los casos rectangular o de jacobiano constante ha sido tratada en la sección anterior.

Se toma la parte conforme de la función de forma de cada componente del desplazamiento como las funciones isoparamétricas de cuatro nodos

$$u^c = N_I u_I \tag{11.22}$$

donde

$$N_I = \frac{1}{4}(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta) \tag{11.23}$$

y ξ, η son coordenadas naturales en el intervalo $(-1, 1)$ con valores en cada nodo esquina I dados por ξ_I, η_I. Se construyen las funciones no-conformes a partir de las restantes funciones del elemento serendípito isoparamétrico de ocho nodos (Capítulo 8). En consecuencia, se toma para el campo no-conforme

$$\begin{aligned} u^n = {} & \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta)\alpha_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2)\alpha_2 + \\ & + \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta)\alpha_3 + \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 + \eta^2)\alpha_4 \end{aligned} \tag{11.24}$$

Sustituyendo en las condiciones (11.20) se obtienen dos condiciones escalares

$$\sum_{i=1}^{4} a_i \alpha_i = 0 \tag{11.25}$$

y

$$\sum_{i=1}^{4} b_i\, \alpha_i = 0 \qquad (11.26)$$

donde a_i, b_i dependen de la geometría del elemento

$$a_i = x_i - x_j$$

y

$$b_i = y_j - y_i \qquad (11.27)$$

con

$$j = \; mod\,(i,4) + 1$$

Se pueden usar estas dos condiciones para expresar dos de las α_i en función de las otras dos. El resultado da dos modos incompatibles de desplazamiento que pueden ser añadidos al campo conforme asegurando la satisfacción de un test de la parcela fuerte. Para elementos rectangulares los dos modos resultantes son idénticos a los propuestos en la Ec. (11.12).

Existen otras posibilidades para construir funciones no-conformes o incompatibles[5].

11.9 El test de la parcela débil—ejemplo

Los problemas descritos anteriormente dan soluciones exactas para los tests de la parcela realizados y, por tanto, satisfacen las condiciones en sentido fuerte. Para ilustrar el comportamiento de un elemento que sólo satisface una forma débil del test de la parcela consideremos un problema axial-simétrico elástico lineal modelizado con elementos isoparamétricos de cuatro nodos. Se supone material isótropo y las matrices de rigidez y fuerzas de reacción de los elementos finitos se calculan usando integración selectiva donde los términos asociados con el módulo de deformación volumétrica se evalúan utilizando una cuadratura con un único punto de Gauss, mientras que los restantes términos se calculan utilizando una cuadratura gaussiana de 2×2 (normal). Puede verificarse fácilmente que la matriz de rigidez es del rango adecuado, y por tanto la estabilidad de las soluciones no está en cuestión. Por otro lado, la consistencia debe ser comprobada.

Para verificar el comportamiento de una formulación con una cuadratura selectiva se considera la parcela de elementos mostrada en la Figura 11.13. La parcela no es de forma tan general como sería deseable y sólo se usa para ilustrar el comportamiento de un elemento que verifica un test de la parcela débil. La solución polinómica considerada es

$$\begin{aligned} u &= 2r \\ w &= 0 \end{aligned} \qquad (11.28)$$

y se usan en el análisis las contantes materiales $E = 1$ y $\nu = 0$. El campo de

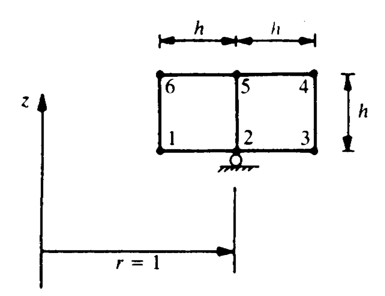


Figura 11.13 Parcela para cuadratura selectiva en elementos axial-simétricos de cuatro nodos.

tensiones resultante es

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 2 \qquad (11.29)$$

con las otras componentes idénticamente nulas. La solución exacta para las cantidades nodales de la malla mostrada en la Figura 11.13 se resume en la Tabla 11.2. Se llevan a cabo tests de la parcela para este problema usando el esquema de integración selectiva descrito arriba y valores de h de 0.8, 0.4, 0,2, 0.1 y 0.05. El resultado para el desplazamiento radial de los nodos 2 y 5 se da en la Tabla 11.3 (con seis dígitos). Todas las demás cantidades (desplazamientos, deformaciones y tensiones) tienen un comportamiento similar con velocidades de convergencia de al menos $O(h)$ o más.

TABLA 11.2
SOLUCIÓN EXACTA PARA LA PARCELA

Nodo I	Radio r_I	Desplazamiento U_I	Desplazamiento W_I	Fuerza F_{rI}	Fuerza F_{zI}
1,4	$1-h$	$2(1-h)$	0	$-(1-h)h$	0
2,5	1	2	0	0	0
3,6	$1+h$	$2(1+h)$	0	$(1+h)h$	0

11.10 Ejemplo de test de la parcela de alto orden—robustez

Al efecto de mostrar un test de la parcela de alto orden considérese el problema de tensión plana de dos elementos mostrado en la Figura 11.7 y sujeto a la carga de flexión que se señala. Como antes, se consideran

TABLA 11.3

DESPLAZAMIENTO RADIAL EN LOS NODOS 2 Y 5.

h	u
0.8	2.01114
0.4	2.00049
0.2	2.00003
0.1	2.00000
0.05	2.00000

dos tipos diferentes de elementos: *a*) un elemento cuadrático serendípito de ocho nodos, y *b*) un elemento cuadrilátero lagrangiano de nueve nodos. En este test se trata de demostrar una característica de la transformación del elemento de nueve nodos discutido en el Capítulo 8 (viz. Sección 8.7) y mostrada por primera vez por Wachspress[22]. En particular, se restringe que la transformación al plano xy sea la producida por el elemento isoparamétrico bilineal de cuatro nodos, pero permitiendo a la variable dependiente recorrer el rango completo de variación que permiten las funciones de forma de ocho y nueve nodos. En el Capítulo 8 se mostró que el elemento de nueve nodos puede aproximar una función de desplazamiento cuadrática completa en x, y mientras que el elemento de ocho nodos no puede. Por tanto, es de esperar que cuando el elemento de nueve nodos se restringe a las tranformaciones isoparamétricas del elemento de cuatro nodos, pase un test de la parcela de mayor orden para cualquier campo cuadrático de desplazamientos arbitrario. La solución de flexión pura en elasticidad se compone de términos polinómicos de hasta segundo orden.

Además, no se necesitan cargas de volumen para satisfacer las ecuaciones de equilibrio. Para la malla considerada las cargas nodales son iguales y opuestas en los nodos superior e inferior, como se muestra. Los resultados para los dos elementos se muestran en la Tabla 11.4 para las cuadraturas indicadas con $E = 100$ y $\nu = 0.3$.

De este test se deduce que el elemento de nueve nodos satisface el test de alto orden. Ciertamente, siempre que la transformación se restrinja a la forma de cuatro nodos se verificará el test de la parcela para desplazamientos con términos no superiores a los cuadráticos. Por otro lado, el elemento de ocho nodos sólo supera el test de la parcela de alto orden para transformaciones a elementos rectangulares (o de jacobiano constante). Además, la precisión del elemento de ocho nodos se deteriora con mucha rapidez al aumentar la distorsión por el parámetro d.

TABLA 11.4

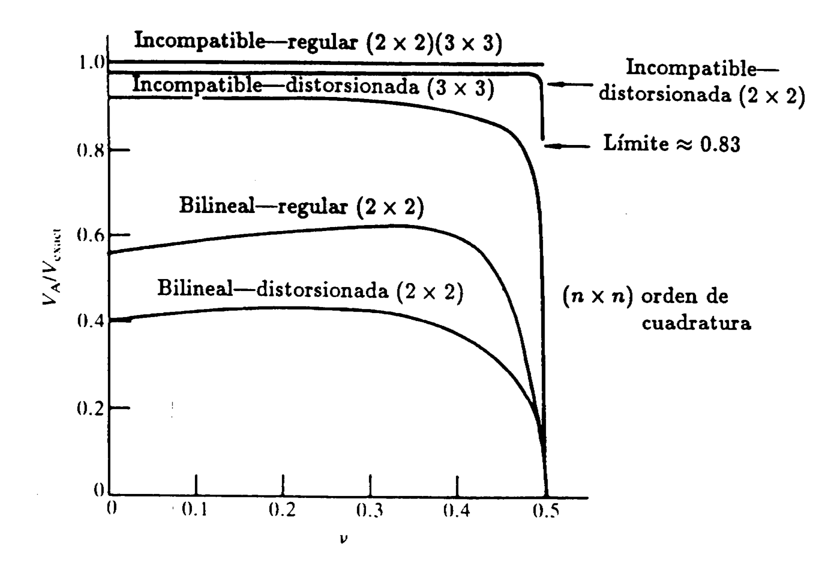
CASO DE CARGA DE FLEXIÓN ($E = 100, \nu = 0.3$).

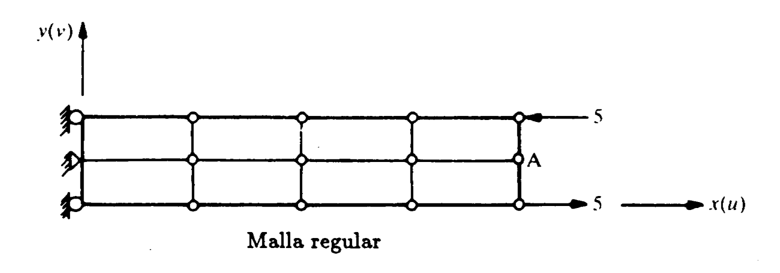
Elemento	Cuadratura	d	v_A	u_B	v_B
ocho-nodos	3 × 3		0.750	0.150	0.75225
ocho-nodos	2 × 2	0	0.750	0.150	0.75225
nueve-nodos	3 × 3		0.750	0.150	0.75225
ocho-nodos	3 × 3		0.7448	0.1490	0.74572
ocho-nodos	2 × 2	1	0.750	0.150	0.75100
nueve-nodos	3 × 3		0.750	0.150	0.75225
ocho-nodos	3 × 3		0.6684	0.1333	0.66364
ocho-nodos	2 × 2	2	0.750	0.150	0.75225
nueve-nodos	3 × 3		0.750	0.150	0.75225
Exacta	—	—	0.750	0.150	0.75225

El uso de una cuadratura reducida 2 × 2 mejora los resultados para los tests de alto orden. De hecho, dos de los puntos de muestreo dan resultados exactos y sólo ligeramente erróneos el tercero. Sin embargo, como se precisó anteriormente, el test para un elemento aislado para el elemento de ocho nodos con integración 2 × 2 falla la parte de estabilidad del test de la parcela y, por tanto, debe ser usado con el mayor cuidado.

El uso de un test de la parcela de alto orden puede ser usado también para evaluar la "robustez" del elemento. Se llama robusto a un elemento si su comportamiento no es sensible a los parámetros físicos de la ecuación diferencial. Por ejemplo, el comportamiento de muchos elementos para la solución de problemas de elasticidad lineal en deformación plana es sensible a valores del coeficiente de Poisson cercanos a 0.5 (en "cuasi-incompresibilidad"). Ciertamente, para coeficientes de Poisson cercanos a 0.5 la energía almacenada por unidad de deformación volumétrica es muchos órdenes mayor que la energía almacenada por unidad de deformación desviadora. Consecuentemente, los elementos finitos que muestran un fuerte acoplamiento entre las deformaciones volumétrica y desviadora a menudo producen resultados pobres en régimen cuasi-incompresible, un problema que será discutido con más detalle en el Capítulo 12.

Esto puede obtenerse usando un elemento de cuatro nodos para resolver un problema con un campo cuadrático de desplazamientos (osea, un test de la parcela de alto orden). Si se considera de nuevo el ejemplo de flexión pura y la malla de ocho elementos mostrada en la Figura 11.14 se observa claramente el deterioro de los resultados a medida que el coeficiente de Poisson se aproxima al valor de un medio. También se muestran en la Figura 11.14 los resultados para los modos incompatibles derivados en la Sección 11.18. Es evidente que la respuesta mejora considerablemente con la adición de estos modos,





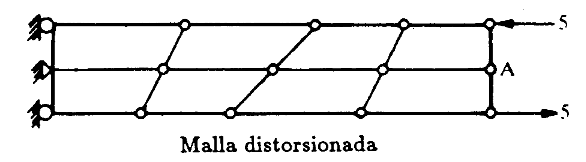


Figura 11.14 Cuadriláteros de cuatro nodos en deformación plana con y sin modos incompatibles (test de la parcela de alto orden para evaluación del comportamiento).

especialmente si se usa la cuadratura 2 × 2.

Si se considera una malla regular y elementos de cuatro nodos, y además se mantiene el dominio constante y se refina sucesivamente el problema usando mallas de 8, 32, 128 y 512 elementos, se observa que las soluciones convergen como garantiza el test de la parcela. Sin embargo, como se muestra

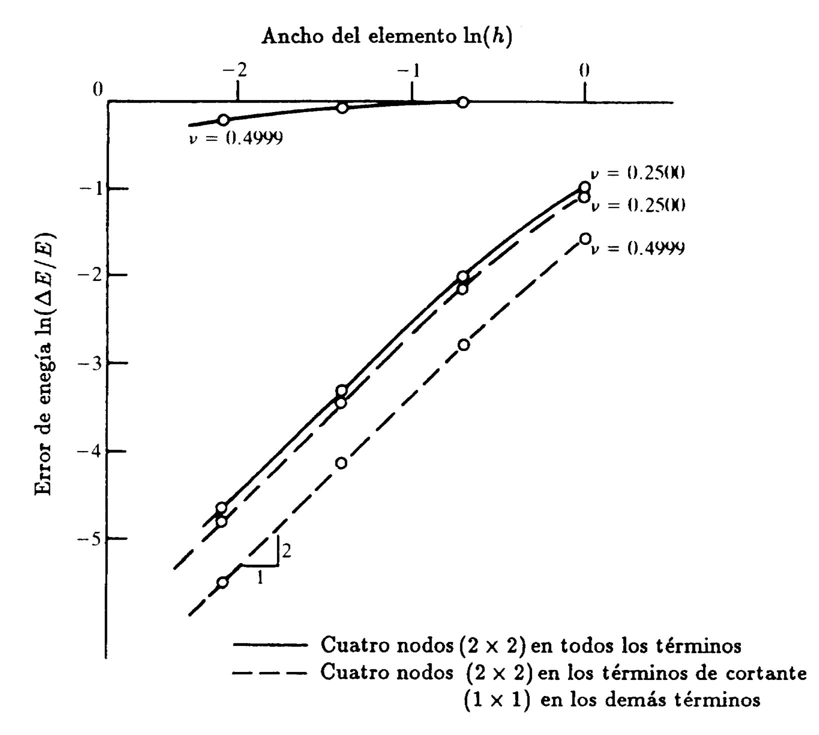


Figura 11.15 Test de la parcela de alto orden para evaluar la robustez del elemento (ver Figura 11.14) (test de convergencia por subdivisión de elementos).

en la Figura 11.15, la velocidad de convergencia en energía para valores del coeficiente de Poisson de 0.25 y 0.4999 es bastante diferente. Para 0.25 la velocidad de convergencia es casi una línea recta para todas las mallas, mientras que para 0.4999 la velocidad empieza siendo bastante baja y se acerca a un valor asintótico de 2 cuando h tiende a cero. Para ν cercano a 0.25 el elemento es robusto, mientra que para ν cercano a 0.5 no lo es. Si se usa integración selectiva (que para deformación plana verifica los tests de la parcela fuertes) y se repite el experimento, ambos valores de ν producen respuestas similares y, por tanto, el elemento se vuelve robusto para todos los valores del coeficiente de Poisson menores que 0.5.

Por consiguiente, el uso de tests de la parcela de alto orden puede ser muy importante para separar elementos robustos de los que no lo son. Para métodos que tratan de refinar automáticamente una malla de forma adaptable en regiones con mucho error, como se discute en el Capítulo 14, es extremadamente importante usar elementos robustos.

11.11 Conclusión

En las secciones precedentes se ha descrito el test de la parcela y su uso en la práctica mediante la consideración de varios problemas de ejemplo. El test de la parcela descrito tiene dos partes esenciales: *a)* una evaluación de la consistencia, y *b)* una prueba de la estabilidad. En el test de la consistencia se usa un conjunto de polinomios esenciales linealmente independientes (esto es, todos los términos independientes hasta el orden necesario para describir el modelo de elementos finitos) como solución a las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno y, en el límite, a medida que el tamaño de la parcela tiende a cero, el modelo de elementos finitos debe satisfacer exactamente cada solución. Se han presentado tres formas de realizar esta parte del test que se han llamado formas A,B y C.

El uso de la forma C, donde todas las condiciones de contorno son naturales (ej., fuerzas de superficie en elasticidad) salvo el número mínimo de condiciones esenciales necesario para asegurar unicidad de solución del problema (ej., modos de sólido rígido en elasticidad), se recomienda para verificar consistencia y estabilidad simultáneamente. Tanto los tests para un elemento aislado como para más de un elemento son necesarios para asegurar que se satisface el test de la parcela. Con estas condiciones, y suponiendo que el procedimiento de solución utilizado puede detectar las deficiencias de rango, se comprueba también la estabilidad de la solución. Si tal condición no se incluye en el programa se debe llevar a cabo una prueba de estabilidad independiente. Esto puede hacerse calculando el número de valores propios nulos en la matriz de coeficientes para métodos que utilicen la solución de ecuaciones lineales para calcular los parámetros incógnita **a**. Alternativamente, se puede perturbar la carga usada para la solución de la parcela en un punto en un valor pequeño (por ejemplo, la raíz cuadrada del límite del error de redondeo (ej., con 10^{-6} para redondeos del orden de 10^{-12}) y comprobar la solución para asegurar que no varía en una magnitud grande.

Una vez que se ha probado que el elemento pasa todos los tests de la parcela esenciales, tanto para consistencia como para estabilidad, la convergencia está asegurada cuando el tamaño de los elementos tiende a cero. Sin embargo, en ciertas situaciones (ej., el problema elástico cuasi-incompresibles) la convergencia puede ser muy lenta hasta que se use un número muy grande de elementos. En consecuencia, se recomienda el uso de tests de la parcela de alto orden para establecer la robustez del elemento. Los tests de la parcela de alto orden requieren el uso de soluciones polinómicas de la ecuación diferencial y de las condiciones de contorno con términos de mayor orden que los polinomios básicos usados en el test de la parcela. Ciertamente, el orden de los polinomios usados debería aumentar hasta que el test sólo sea verificado en sentido débil (i.e., cuando h tiende a cero). La ventaja de utilizar un test de la parcela de alto orden, en lugar de otros problemas de contorno, es que la solución exacta puede ser fácilmente calculada en cualquier punto del modelo.

Se ha probado en algunos de los ejemplos el uso de funciones incompatibles y procedimientos de integración inexactas (integración reducida y selectiva). Algunas de estas violaciones de las reglas previamente estipuladas están justificadas no sólo por el comportamiento mejorado, sino porque proporcionan métodos en los que la convergencia está asegurada. Algunas de las razones de tal comportamiento mejorado se discutirán en el siguiente capítulo (Capítulo 12).

Referencias

1. B.M. IRONS, "Numerical integration applied to finite element methods", *Conf. on Use of Digital Computers in Structural Engineering*, Univ. of Newcastle, 1966.
2. G.P. BAZELEY, Y.K. CHEUNG, B.M. IRONS y O.C. ZIENKIEWICZ, "Triangular elements in plate bending. Conforming and nonconforming solutions", *Proc. 1st Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics*, pp. 547–76, AFFDLTR-CC-80, Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1966.
3. B.M. IRONS y A. RAZZAQUE, "Experiencae with the patch test for convergence of finte element method", en *Mathematical Foundations of the Finite Element Method*, (Ed. A.K. Aziz), pp. 557–87, Academic Press, 1972.
4. B. FRAEIJS DE VEUBEKE, "Variational principles and the patch test", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **8**, 783–801, 1974.
5. G. SANDER y P. BECKERS, "The influence of the choice of connectors in the finite element method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**, 1491–505, 1977.
6. E.R. DE ARANTES OLIVEIRA, "The patch test and the general convergence criteria of the finite element method", *Int. J. Solids Struct.*, **13**, 159–78, 1977.
7. G. STRANG, "Variational crimes and the finite element method", en *Proc. Foundations of the Finite Element Method* (ed. A.K. Aziz), pp. 689–710, Academic Press, 1972.
8. G. STRANG y G.J. FIX, *An Analysis of Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1973.
9. F. STUMMEL, "The limitations of the patch test", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **15**, 177-88, 1980.
10. J. ROBINSON *et al.*, "Correspondence on patch test", *Finite Elements News*, **1**, 30–4, 1982.
11. R.L. TAYLOR, O.C. ZIENKIEWICZ, J.C. SIMO y A.H. CHAN, "The patch test- a condition for assesing f.e.m. convergence", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **22**, 39–62, 1986.
12. R.E. GRIFFITHS y A.R. MITCHELL, "Non-conforming elements" en *Mathematical Basis of Finite Element Methods*, Inst. Math. and Appl. Conference series, pp. 41-69, Clarendon Press, Oxford, 1984.
13. A. RALSTON, *A First Course in Numerical Analysis,* McGraw-Hill, New York, 1965.
14. B.M. IRONS y S. AHMAD, *Techniques of Finite Elements,* Horwood, Chichester, 1980.

15. D. KOSLOFF y G.A. FRASIER, "Treatment of hour glass patterns in low order finite element codes", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomechanics*, **2**, 57–72, 1978.
16. T. BELYTCHKO y E. BACHRACH, "The efficient implementation of quadrilaterals with high coarse mesh accuracy", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **54**, 276–301. 1986.
17. N. BIĈANIĈ y E. HINTON, "Spurious modes in two dimensional isoparametric elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **14**, 1545–57, 1979.
18. E.L. WILSON, R.L. TAYLOR, W.P. DOHERTY y J. GHABOUDDI, "incompatibledisplacement models", en *Num. and Comp. Meth. in Struct. Mech.*, (eds. S.T. Fenves *et al.*), pp. 43–57, Academic Press, 1973.
19. R.L. TAYLOR, P.J. BERESFORD y E.L. WILSON, "A non-conforming element for stress analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **10**, 1211–20, 1976.
20. A. SAMUELSSON, "The global constant strain condition and the patch test", Capítulo 3 de *Energy Methods in Finite Element Methods*, (eds. R. Glowinski, E.Y. Rodin, and O.C. Zienkiewicz), pp. 47–58, wiley, 1979.
21. B. SPECHT, "Modified shape function for the three -node plate bending element passing the patch test", *Int. J. Num. Mech. Eng.*, **26**, 705–15, 1988.
22. E.L. WACHSPRESS, "High-order curved finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **17**, 735–45, 1981.

Capítulo 12

FORMULACIÓN MIXTA Y RESTRICCIONES. MÉTODOS DE CAMPO COMPLETO

12.1 Introducción

El conjunto de ecuaciones diferenciales desde el que se inicia el proceso de discretización determina si nos referiremos a la formulación resultante como *mixta* o *irreducible*. Así, si consideramos un sistema de ecuaciones con varias variables dependientes $\mathbf{u}$ escrito como [viz. Ecs. (9.1) y (9.2)]

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{en el dominio} \quad \Omega$$

y

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{en el contorno} \quad \Gamma \tag{12.1}$$

en el cual ninguna de las componentes de $\mathbf{u}$ puede ser eliminada dejando el problema bien definido, entonces la formulación se llamará *irreducible*. En caso contrario, la formulación se denominará *mixta*.

Esta definición no es la única posible[1] pero aparece en la literatura como la más ampliamente aplicable,[2,3] si en el proceso de eliminación al que nos hemos referido se permite la introducción de funciones de penalización. Además, encontraremos que para una situación física dada existe usualmente más de una forma irreducible posible.

Como ejemplo consideramos el sencillo problema de transmisión del calor (o ecuaciones cuasi-armónicas) al que nos hemos referido en los Capítulos 9 y 10. En éste comenzábamos por la relación física constitutiva que define los flujos [viz. Ec. (10.5)] en función de los gradientes de potencial (temperatura), esto es,

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k}\nabla\phi \qquad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} \tag{12.2}$$

La ecuación de conservación se puede escribir [viz. Ec. (10.7)]

$$\nabla^T\mathbf{q} \equiv \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = Q \tag{12.3}$$

Si la ecuación anterior se satisface en Ω y las condiciones de contorno

$$\phi = \bar{\phi} \text{ en } \Gamma_\phi \qquad \text{y} \qquad q_n = \bar{q}_n \text{ en } \Gamma_q \tag{12.4}$$

se cumplen, entonces el problema está resuelto.

Claramente la eliminación del vector $\mathbf{q}$ es posible, y la simple sustitución de la Ec. (12.2) en la Ec. (12.3) lleva a

$$\nabla^T(\mathbf{k}\nabla\phi) + Q = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \tag{12.5}$$

con las condiciones de contorno apropiadas expresadas en función de ϕ o su gradiente.

En el Capítulo 10 se han mostrado soluciones discretizadas a partir de este punto y, dado que no es posible continuar eliminando variables, la formulación es claramente *irreducible*.

Por otro lado, si se inicia la discretización a partir de las Ecs. (12.2) a (12.4) la formulación resultaría *mixta*. Una forma irreducible alternativa es también posible en función de las variables $\mathbf{q}$. Para ello debe introducirse una forma penalizada, y escribir, en lugar de la Ec. (12.3)

$$\nabla^T\mathbf{q} - Q = \frac{\phi}{\alpha} \qquad \alpha \to \infty \tag{12.6}$$

donde α es un número de penalización que tiende a infinito. Claramente, ambas ecuaciones coinciden en el límite y, en general, si α es grande pero finito, las soluciones deberían ser aproximadamente iguales.

Ahora, sustituyendo en la Ec. (12.2) resulta una única ecuación

$$\mathbf{k}\nabla\,\nabla^T\mathbf{q} + \frac{\mathbf{q}}{\alpha} = \mathbf{k}\nabla Q \tag{12.7}$$

que a su vez puede ser utilizada como punto de partida de un proceso de discretización como una forma irreducible posible[4].

El lector debe observar que las formulaciones usadas hasta ahora en este libro eran *irreducibles*, según la definición dada. En las siguientes secciones se muestra cómo los problemas de elasticidad se pueden tratar en forma *mixta* y cómo tales formulaciones son esenciales en ciertos problemas como el ejemplo de elasticidad incomprensible al que nos referimos en el Capítulo 3. En el Capítulo 9 (Sección 9.10.2) se mostró cómo se puede llevar a cabo la discretización de un problema mixto.

Antes de proseguir con la discusión de tal discretización (que revelará ventajas y desventajas de los métodos mixtos) es importante observar que si el operador que describe la forma mixta es *simétrico* o *auto-adjunto* (viz. Sección 9.11.1) la formulación puede derivarse de un *principio variacional* que para problemas lineales puede obtenerse directamente. Invitamos al lector a probar, usando los métodos del Capítulo 9, que la estacionariedad del siguiente *principio variacional* es equivalente a las ecuaciones diferenciales (12.2) y (12.3) junto a las condiciones de contorno (12.4):

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega \mathbf{q}^T\mathbf{k}^{-1}\mathbf{q}\,d\Omega - \int_\Omega \phi(\nabla^T\mathbf{q} - Q)\,d\Omega + \int_{\Gamma_q} \phi(q_n - \bar{q}_n)\,d\Gamma$$

para

$$\phi = \bar{\phi} \qquad \text{en} \qquad \Gamma_\phi \tag{12.8}$$

El establecimiento de tales principios variacionales es de gran valor académico, y ha conducido a muchas formas famosas descritas en el clásico trabajo de Washizu.[5] Sin embargo, es conocido (viz. Sección 9.9) que si en un problema lineal se obtienen matrices de residuos ponderados simétricas, entonces existe un principio variacional y éste puede ser encontrado. Como la simetría puede establecerse por simple inspección, procederemos en lo que sigue con el método de residuos ponderados directamente, evitando así complejidades innecesarias.

12.2 Discretización de formas mixtas – Algunas observaciones generales

Mostraremos el proceso de discretización de las ecuaciones de transmisión del calor a partir de la forma mixta (12.2) y (12.3). Empezaremos por suponer que cada una de las incógnitas se aproxima de la forma usual, mediante funciones de forma apropiadas y los correspondientes parámetros incógnita. Así

$$\mathbf{q} \cong \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{N}_q\bar{\mathbf{q}} \qquad \text{y} \qquad \phi \cong \hat{\phi} = \mathbf{N}_\phi\bar{\boldsymbol{\phi}} \tag{12.9}$$

donde $\bar{\mathbf{q}}$ y $\bar{\boldsymbol{\phi}}$ se refieren a parámetros nodales, o de forma más general, parámetros elementales, que deben ser determinados.

Suponiendo que las condiciones de contorno $\phi = \hat{\phi}$ se satisfacen por la elección de los desarrollos, la forma débil del problema es, para la Ec. (12.2),

$$\int_\Omega \mathbf{W}_q^T(\mathbf{k}^{-1}\hat{\mathbf{q}} + \nabla\hat{\phi})\,d\Omega = 0 \tag{12.10}$$

y, para la Ec. (12.3) y las condiciones de contorno "naturales",

$$\int_\Omega \mathbf{W}_\phi^T(\nabla^T\hat{\mathbf{q}} - Q)\,d\Omega - \int_{\Gamma_q} \mathbf{W}_\phi^T(\hat{q}_n - \bar{q}_n)\,d\Gamma = 0 \tag{12.11}$$

La razón por la que hemos premultiplicado la Ec. (12.2) por $\mathbf{k}^{-1}$ es ahora evidente, porque la elección

$$\mathbf{W}_q = \mathbf{N}_q \qquad \mathbf{W}_\phi = \mathbf{N}_\phi \tag{12.12}$$

llevará a ecuaciones simétricas [utilizando el teorema de Green para hacer la integración por partes del térmico de gradiente en la Ec. (12.11)] de la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \bar{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} \tag{12.13}$$

con

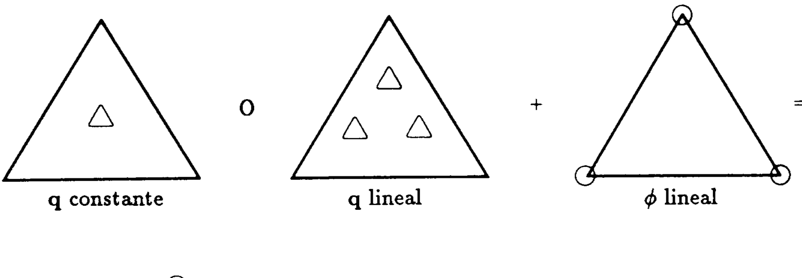
$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \int_\Omega \mathbf{N}_q^T \mathbf{k}^{-1} \mathbf{N}_q \, d\Omega \\
\mathbf{C} &= \int_\Omega \mathbf{N}_q^T \boldsymbol{\nabla} \mathbf{N}_\phi \, d\Omega \\
\mathbf{f}_1 &= 0 \\
\mathbf{f}_2 &= -\int_\Omega \mathbf{N}_\phi^T Q \, d\Omega + \int_{\Gamma_q} \mathbf{N}_\phi^T \bar{q} \, d\Gamma
\end{aligned}
\tag{12.14}
$$

Este problema, que consideramos como ejemplo de un gran número de aproximaciones mixtas, ilustra las principales características de la formulación mixta, incluyendo sus ventajas e inconvenientes. Notemos que:

1. Los requisitos de continuidad sobre las funciones de forma seleccionadas se reducen. Se ve fácilmente que mientras que la forma irreducible [viz. Ec. (12.5)] requiere continuidad C_0 de las funciones de forma, las integrales de la Ec. (12.14) permiten que $\mathbf{N}_q$ sea discontinua, dado que no aparecen sus derivadas. Alternativamente, esta discontinuidad puede ser transferida a $\mathbf{N}_\phi$ (utilizando el teorema de Green en la integral en $\mathbf{C}$) manteniendo entonces continuidad C_0 para $\mathbf{N}_q$.

   Esta relajación de continuidad es de particular importancia en problemas de flexión de placas y láminas (viz. Vol. 2) y ciertamente los usos más importantes e iniciales de las formas mixtas se han hecho en ese contexto.[6–9]
2. Si el interés se centra en la variable $\mathbf{q}$ más que en ϕ, el uso de una aproximación mejorada para ella puede resultar en mayor precisión que la que es posible obtener con la formulación irreducible discutida previamente. De hecho, en la Sección 12.8.3 se muestra cómo una aproximación de la tensión C_0-continua puede mejorar sensiblemente los resultados de un análisis estándar en desplazamientos. *Sin embargo, debemos notar que si la función de aproximación de* $\mathbf{q}$ *es capaz de reproducir exactamente el mismo tipo de variación que la determinada por la forma irreducible, entonces no se consigue mejora en la precisión y, de hecho, las dos aproximaciones resultan en idénticos resultados.*

   Por tanto, si consideramos, por ejemplo, la aproximación mixta de los problemas de campo tratados usando un triángulo lineal para determinar $\mathbf{N}_\phi$ y $\mathbf{N}_q$ constantes a trozos, como se muestra en la Figura 12.1, obtendremos exactamente los mismos resultados que con la formulación irreducible con las mismas $\mathbf{N}_\phi$ aplicadas directamente a la Ec. (12.5), *siempre que* $\mathbf{k}$ *sea constante dentro de cada elemento.* Esto es evidente ya que la segunda de las ecuaciones (12.13) es precisamente la forma débil usada para derivar la formulación irreducible, en la que la primera de las ecuaciones se satisface idénticamente.



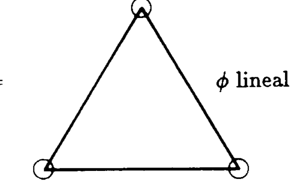


Figura 12.1 Una aproximación mixta al problema de transmisión de calor que produce resultados idénticos que la forma irreducible correspondiente (se supone $\mathbf{k}$ constante en cada elemento).

   Ciertamente, si elegimos usar una forma de aproximación lineal pero discontinua para $\mathbf{N}_q$ en el interior del triángulo, obtendríamos exactamente los mismos resultados, con los coeficientes adicionales tomando el valor cero. Este descubrimiento fue hecho por Fraeijs de Veubeke[10] y se llama *principio de limitación*, estableciendo que bajo ciertas circunstancias no se puede esperar una precisión adicional de las formulaciones mixtas. En un caso más general, donde $\mathbf{k}$ sea, por ejemplo, discontinuo y variable dentro de un elemento, los resultados de la aproximación mixta serán distintos y tal vez superiores. Obsérvese que una aproximación C_0-continua para $\mathbf{q}$ podría mejorar los resultados, ya que no es capaz de un campo discontinuo.
3. Las ecuaciones que resultan de las formulaciones mixtas a menudo presentan términos nulos en la diagonal, como ocurre en el caso de la Ec. (12.13).

   Ya observamos en el Capítulo 9 que esto es característico de problemas sujetos a restricciones lagrangianas. De hecho, éste es el origen del problema, que añade cierta dificultad a los procesos estándar de eliminación gaussiana usados para resolver sistemas de ecuaciones (viz. Capítulo 15). Como la forma de la Ec. (12.13) es típica de muchos problemas de dos campos, nos referimos a la primera variable ($\bar{\mathbf{q}}$) como la *variable primaria* y a la segunda ($\bar{\phi}$) como la *variable de restricción.*
4. El número adicional de variables significa que generalmente se tiene que trabajar con problemas algebraicos de mayor tamaño. Sin embargo, en

Sección 12.8 veremos cómo tales dificultades pueden evitarse a menudo usando una solución iterativa apropiada.

Las características discutidas hasta ahora no mencionan un punto vital que se discute en la sección siguiente.

12.3 Estabilidad de la aproximación mixta. El test de la parcela.

12.3.1 *Requisitos generales.* A pesar de la relajación de los requisitos de continuidad sobre las funciones de forma en la aproximación mixta, ésta no proporciona resultados con sentido para ciertas elecciones particulares de estas funciones. Esta limitación es ciertamente mucho más severa que en la formulación irreducible, donde una condición muy simple, "gradiente constante" (o deformación constante) es suficiente para garantizar convergencia si se cumplen los requisitos de continuidad. Las razones matemáticas de esta limitación fueron tratadas por Babuska[11] y Brezzi,[12] quienes formularon un criterio bastante complejo asociado a sus nombres. Sin embargo, el origen de alguna de las dificultades (y, por tanto, las formas de evitarlas) se identifica a partir de razonamientos bastante simples.

Si consideramos el sistema de ecuaciones (12.13) como típico de muchos sistemas mixtos en los que $\bar{\mathbf{q}}$ es la *variable primaria* y $\bar{\boldsymbol{\phi}}$ la *variable de restricción* (equivalente a un multiplicador de Lagrange) se observa que la solución puede llevarse a cabo eliminando $\bar{\mathbf{q}}$ de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda para obtener

$$(\mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})\bar{\boldsymbol{\phi}} = -\mathbf{f}_2 + \mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}_1 \tag{12.15}$$

siempre que la matriz $\mathbf{A}$ sea no singular (o $\mathbf{A}\bar{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$ para todo $\bar{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$). Para calcular $\bar{\boldsymbol{\phi}}$ es necesario asegurar que la matriz entre paréntesis, esto es,

$$\mathbf{H} = \mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \tag{12.16}$$

no es singular

La matriz $\mathbf{H}$ será siempre singular si el número de incógnitas en el vector $\bar{\mathbf{q}}$, al que llamaremos n_q, es menor que el número de incógnitas n_ϕ en el vector $\bar{\boldsymbol{\phi}}$. Por tanto, para evitar la singularidad se necesita que

$$n_q \geq n_\phi \tag{12.17}$$

La razón para esto es evidente, ya que el rango de la matriz (12.16), que necesita ser n_ϕ, no puede ser mayor que n_q, esto es, el rango de $\mathbf{A}^{-1}$.†

† En algunos problemas la matriz $\mathbf{A}$ puede ser singular. Normalmente se puede convertir en no singular mediante la adición de un múltiplo de la segunda ecuación, cambiándola por $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \gamma\mathbf{C}\mathbf{C}^T$ y $\bar{\mathbf{f}}_1 = \mathbf{f}_1 + \gamma\mathbf{C}\mathbf{f}_2$, donde γ es un número arbitrario.

La misma condición (12.17) asegura que sean posibles soluciones no triviales para las variables $\bar{\mathbf{q}}$. Si es violada, se producirá "bloqueo" o resultados no convergentes, dando soluciones casi nulas para $\bar{\mathbf{q}}$ [viz. Capítulo 9, Ec. (9.165) y siguientes]. Para mostrar esto reemplacemos la Ec. (12.13) por su forma penalizada:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & -\mathbf{I}/\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{q}} \\ \bar{\boldsymbol{\phi}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{con} & \alpha \to \infty \\ \text{y} & \mathbf{I} = \text{matriz identidad} \end{matrix} \tag{12.18}$$

La eliminación de $\bar{\boldsymbol{\phi}}$ lleva a

$$(\mathbf{A} + \alpha\mathbf{C}\mathbf{C}^T)\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_1 + \alpha\mathbf{C}\mathbf{f}_2 \tag{12.19}$$

A medida que $\alpha \to \infty$ la ecuación queda simplemente

$$(\mathbf{C}\mathbf{C}^T)\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{C}\mathbf{f}_2 \tag{12.20}$$

Deben existir soluciones no triviales para $\bar{\mathbf{q}}$ aún considerando $\mathbf{f}_2 = 0$ y, por tanto, la matriz $\mathbf{C}\mathbf{C}^T$ *debe ser singular*. Esta singularidad se dará siempre si $n_q > n_\phi$.

Sin embargo, es posible que se dé esta singularidad incluso si $n_\phi > n_q$, siempre que las relaciones $\mathbf{C}^T\bar{\mathbf{q}}$ sean linealmente dependientes. En este caso no ocurre bloqueo y se puede hallar una solución para $\bar{\mathbf{q}}$, aunque $\mathbf{H}$ en la Ec. (12.16) sea aún singular y por ello no exista solución única para $\bar{\boldsymbol{\phi}}$.

Las condiciones de estabilidad derivadas para el ejemplo particular de la Ec. (12.13) son válidas en general para cualquier problema que tenga la forma estándar de restricción lagrangiana. En particular, la condición necesaria de la Ec. (12.17) bastará en la mayoría de los casos para determinar la aceptabilidad de un elemento.

12.3.2 *El test de la parcela.* El test de la parcela para elementos mixtos puede realizarse exactamente de la misma forma en que se describió en el

Aunque ambas matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}\mathbf{C}^T$ son singulares, su combinación $\bar{\mathbf{A}}$ no lo es, siempre que se cumpla que para todos los vectores $\bar{\mathbf{q}} \neq 0$, o bien

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{q}} \neq 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{C}^T\bar{\mathbf{q}} \neq 0$$

(En terminología matemática esto significa que $\mathbf{A}$ es no singular en el subespacio trivial de $\mathbf{C}^T$)

Los requisitos de la Ec. (12.17) son condición suficiente pero no necesaria para la no singularidad de la matriz $\mathbf{H}$. Un requisito adicional evidente en la Ec. (12.15) es que

$$\mathbf{C}\bar{\boldsymbol{\phi}} \neq 0 \quad \text{para todo} \quad \bar{\boldsymbol{\phi}} \neq 0$$

En caso contrario, la solución no será única.

Los requisitos mencionados son inherentes a la condición de Babuska-Brezzi mencionada previamente, pero pueden ser siempre verificados algebraicamente.

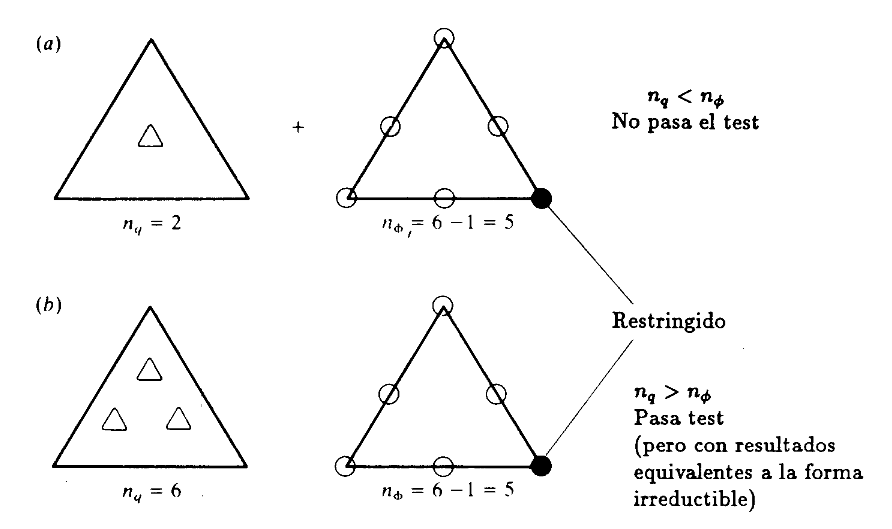


Figura 12.2 Test de la parcela para un elemento aislado en aproximaciones mixtas al problema de transmisión del calor con flujos $\mathbf{q}$ discontinuos: (a) ϕ, cuadrático C_0; $\mathbf{q}$ constante; (b) ϕ , cuadrático C_0; $\mathbf{q}$ lineal.

capítulo previo para elementos irreducibles. Dado que la *consistencia* viene fácilmente asegurada al tomar un espacio de aproximación polinómico, sólo la *estabilidad* precisa ser investigada en general, y la *mayoría de las respuestas* a esta cuestión se obtienen asegurando que la condición (12.17) se satisface para una parcela aislada en cuyo contorno se prescribe el máximo número de variables de $\mathbf{q}$ y el mínimo número de variables de $\boldsymbol{\phi}$.[13]

En la Figura 12.2 se ilustra el test con un solo elemento para dos posibles formulaciones con N_ϕ (cuadráticas) C_0-continuas y N_q discontinuas y tomadas o bien constantes, o bien lineales dentro del elemento triangular. Dado que aquí no se pueden especificar valores de $\bar{\mathbf{q}}$ en el contorno,† se fija un único valor de $\bar{\boldsymbol{\phi}}$ (necesario para asegurar unicidad) en el contorno de la parcela —que aquí es simplemente el contorno del elemento-. El recuento muestra que sólo una de las formulaciones, esto es, la de variación lineal del flujo, satisface la condición (12.17) y es, por tanto, aceptable.

En la Figura 12.3 se ilustra un test similar para el mismo elemento pero con idénticas funciones de forma C_0 continuas tanto para las variables $\bar{\mathbf{q}}$ como para las $\bar{\boldsymbol{\phi}}$. Este ejemplo muestra que la condición básica de la Ec. (12.17) se satisface, por lo que ésta es una formulación aparentemente permisible.

A veces pueden surgir dificultades incluso si el test de la parcela se satisface, y éstas vienen indicadas matemáticamente por la ya mencionada

† En la formulación dada, la especificación de los flujos en el contorno no se impone como una prescripción en las variables $\bar{\mathbf{q}}$

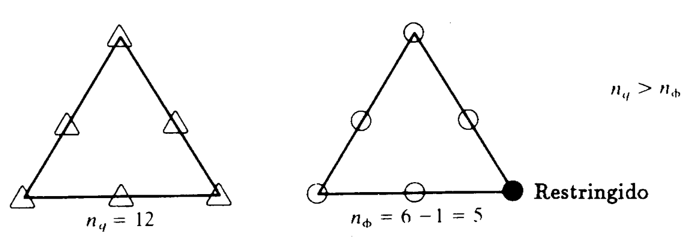


Figura 12.3 Como en la Figura 12.2 pero con $\mathbf{q}$ C_0-continuas

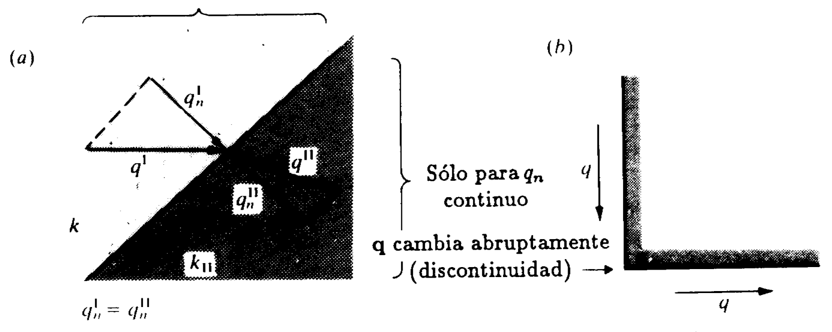


Figura 12.4 Algunas situaciones en las que continuidad C_0 en el flujo $\mathbf{q}$ no es adecuada: (a) cambio discontinuo en las propiedades del material; (b) singularidad.

condición de Babuska-Brezzi[14] (ver nota a pie de página anterior). Estas dificultades pueden deberse a la imposición de *excesiva continuidad* en el problema al exigir, por ejemplo, que el flujo sea C_0-continuo. En la Figura 12.4 se ilustran algunos casos en los que la imposición de dicha continuidad es *físicamente incorrecta* y, por tanto, se puede esperar que produzca resultados erróneos (y a menudo altamente oscilantes). En tales problemas se recomienda que la condición de continuidad sea relajada, al menos, localmente.

En la Sección 12.4.4 se amplía la discusión sobre este problema.

12.4 Formulación mixta en elasticidad

12.4.1 *Generalidades.* En toda la formulación previa de problemas de elasticidad en este libro se ha usado la formulación irreducible, tomando los desplazamientos $\mathbf{u}$ como variable primaria. Se ha usado el Principio de los Trabajos Virtuales para establecer las condiciones de equilibrio, que se pueden escribir como (viz. Capítulo 2)

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}\, d\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T\bar{\mathbf{t}}\, d\Gamma = 0 \qquad (12.21)$$

donde $\bar{\mathbf{t}}$ son las fuerzas de superficie prescritas en Γ_t, y con

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{12.22}$$

como relación constitutiva (se omiten aquí por claridad las deformaciones y tensiones iniciales).

Recordemos que expresiones como la Ec. (12.21) son equivalentes a usar residuos ponderados (viz. Capítulo 9) y en lo que sigue utilizaremos estos últimos a menudo. En lo anterior las deformaciones se relacionan con los desplazamientos a través del operador matricial **S** introducido en el Capítulo 2, de forma que

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\mathbf{u} \tag{12.23}$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\delta\mathbf{u} \tag{12.24}$$

con las interpolaciones para desplazamientos obligadas a satisfacer los desplazamientos prescritos en Γ_u. Naturalmente, esto es equivalente a una ponderación de tipo Galerkin.

Con el desplazamiento **u** aproximado como

$$\mathbf{u} \cong \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_u\bar{\mathbf{u}} \tag{12.25}$$

las ecuaciones de rigidez necesarias se obtienen en función del vector de desplazamientos incógnita $\bar{\mathbf{u}}$ y a partir de éstas, la solución.

Es posible usar formas mixtas en las que $\boldsymbol{\sigma}$ o $\boldsymbol{\varepsilon}$, o incluso ambas variables, sean aproximadas independientemente. Tales formulaciones se discuten a continuación.

12.4.2 *La forma mixta* $\mathbf{u}-\boldsymbol{\sigma}$. Aquí supondremos que la Ec. (12.21) es válida, pero $\boldsymbol{\sigma}$ se aproxima independientemente como

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{N}_\sigma\bar{\boldsymbol{\sigma}} \tag{12.26}$$

y la relación constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{u} \tag{12.27}$$

se satisface de forma aproximada, lo que sustituye a (12.22) y (12.23). La forma integral aproximada se escribe como

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{S}\mathbf{u} - \mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma})\,d\Omega = 0 \tag{12.28}$$

donde la expresión entre paréntesis es simplemente la Ec. (12.27) premultiplicada por $\mathbf{D}^{-1}$ para conseguir simetría, y $\delta\boldsymbol{\sigma}$ se introduce como función de peso. De hecho, las Ecs. (12.21) y (12.28) que ahora definen el problema son equivalentes a la estacionariedad del funcional

$$\Pi_{HR} = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\,d\Omega + \int_\Omega \mathbf{u}^T(\mathbf{S}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T(\mathbf{G}\boldsymbol{\sigma} - \bar{\mathbf{t}})\,d\Gamma \tag{12.29}$$

donde las fuerzas de superficie en el contorno son

$$\mathbf{t} \equiv \mathbf{G}\boldsymbol{\sigma}$$

y

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$$

se prescribe en Γ_u, como el lector puede verificar fácilmente. Este es el conocido principio variacional de Hellinger-Reissner,[15,16] pero, como ya se ha mencionado, no es necesario para derivar las ecuaciones aproximadas. Usando

$\mathbf{N}_u$	en lugar de	$\delta\mathbf{u}$
$\mathbf{B} \equiv \mathbf{S}\mathbf{N}_u$	en lugar de	$\delta\boldsymbol{\varepsilon}$
$\mathbf{N}_\sigma$	en lugar de	$\delta\boldsymbol{\sigma}$

se pueden escribir las ecuaciones (12.28) y (12.21) en la forma estándar [viz. Ec. (12.13)]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} \tag{12.30}$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\int_\Omega \mathbf{N}_\sigma^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{N}_\sigma\,d\Omega \\ \mathbf{C} &= +\int_\Omega \mathbf{N}_\sigma^T\mathbf{B}\,d\Omega \\ \mathbf{f}_1 &= 0 \\ \mathbf{f}_2 &= +\int_\Omega \mathbf{N}_u^T\mathbf{b}\,d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}_u^T\bar{\mathbf{t}}\,d\Gamma \end{aligned} \tag{12.31}$$

En la forma anterior las funciones de forma $\mathbf{N}_u$ requieren todavía continuidad C_0, mientras que las $\mathbf{N}_\sigma$ pueden ser discontinuas. Sin embargo, la integración por partes de la expresión de **C** permite la reducción de tal continuidad y, de hecho, esta forma ha sido usada por Herrmann[6,17,18] en problemas de placas y láminas.

Una forma mixta $\mathbf{u}-\boldsymbol{\varepsilon}$ se puede obtener de forma análoga y se deja al lector la derivación como un ejercicio simple.

12.4.3 *La forma mixta* $\mathbf{u}-\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\varepsilon}$. *Un problema de tres campos.* Naturalmente, es posible usar aproximaciones independientes para todas las variables

esenciales que intervienen en el problema de elasticidad. Se pueden escribir entonces las tres ecuaciones (12.23), (12.22), (12.21) en su forma débil como

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma})\,d\Omega=0\\ &\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{S}\mathbf{u}-\boldsymbol{\varepsilon})\,d\Omega=0\\ &\int_\Omega \delta(\mathbf{S}\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\,d\Omega-\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\,d\Omega-\int_{\Gamma_t}\delta\mathbf{u}^T\bar{\mathbf{t}}\,d\Gamma=0 \end{aligned} \tag{12.32}$$

con su correspondiente principio variacional exigiendo la estacionariedad de

$$\Pi_{HW}=\int_\Omega \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,d\Omega-\int_\Omega \mathbf{u}^T\mathbf{b}\,d\Omega-\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^T(\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{S}\mathbf{u})\,d\Omega-\int_{\Gamma_t}\mathbf{u}^T\bar{\mathbf{t}}\,d\Gamma \tag{12.33}$$

donde $\mathbf{u}\equiv\bar{\mathbf{u}}$ se prescribe en Γ_u.†. Este principio se conoce con el nombre de Hu-Washizu[5]. Sin embargo, se puede proceder directamente, usando la Ec. (12.32) y tomando las siguientes aproximaciones

$$\mathbf{u}\cong\hat{\mathbf{u}}=\mathbf{N}_u\bar{\mathbf{u}}\qquad \boldsymbol{\sigma}\cong\hat{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{N}_\sigma\bar{\boldsymbol{\sigma}}\quad \text{y}\quad \boldsymbol{\varepsilon}\cong\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=\mathbf{N}_\varepsilon\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

y sus correspondientes "variaciones", y escribir las ecuaciones aproximadas de forma similar a lo hecho en la sección anterior. Esto lleva a un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{C}&\mathbf{0}\\ \mathbf{C}^T&\mathbf{0}&\mathbf{E}\\ \mathbf{0}&\mathbf{E}^T&\mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}\\ \bar{\mathbf{u}}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{f}_1\\ \mathbf{f}_2\\ \mathbf{f}_3\end{Bmatrix} \tag{12.34}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}&=\int_\Omega \mathbf{N}_\varepsilon^T\mathbf{D}\mathbf{N}_\varepsilon\,d\Omega\\ \mathbf{E}&=\int_\Omega \mathbf{N}_\sigma^T\mathbf{B}\,d\Omega\\ \mathbf{C}&=-\int_\Omega \mathbf{N}_\varepsilon^T\mathbf{N}_\sigma\,d\Omega\\ \mathbf{f}_1&=\mathbf{f}_2=0\\ \mathbf{f}_3&=\int_\Omega \mathbf{N}_u^T\mathbf{b}\,d\Omega+\int_{\Gamma_t}\mathbf{N}_u^T\bar{\mathbf{t}}\,d\Gamma \end{aligned} \tag{12.35}$$

† Es posible incluir las condiciones de contorno en desplazamientos en la Ec. (12.33) de forma natural en vez de imponerlas; sin embargo, la mayoría de las aplicaciones del principio en elementos finitos se hacen de la forma señalada.

El lector habrá observado que en esta sección de nuevo se han citado los principios variacionales como un tema interesante simplemente, y que todas las aproximaciones se han hecho directamente.

12.4.4 *Estabilidad de la aproximación de dos campos en elasticidad* ($\mathbf{u}-\boldsymbol{\sigma}$; $\mathbf{u}-\boldsymbol{\varepsilon}$). Antes de intentar la formulación de aproximaciones mixtas de interés práctico en detalle se deben considerar problemas de estabilidad idénticos a los discutidos en la Sección 12.3.

Para las formas $\mathbf{u}-\boldsymbol{\sigma}$, está claro que $\boldsymbol{\sigma}$ es la *variable primaria* y $\mathbf{u}$ la *variable de restricción* (viz. Sección 12.2), y se tiene, tanto para el problema total como para cada parcela de elementos, la condición necesaria pero no suficiente,

$$n_\sigma \geq n_u \tag{12.36}$$

donde n_σ y n_u son los números de grados de libertad de las variables correspondientes.

En la Figura 12.5 se considera un problema plano bi-dimensional y se muestra una serie de elementos en los que $\mathbf{N}_\sigma$ son discontinuas, mientras que $\mathbf{N}_u$ son C_0-continuas. Nótese que, en virtud del "principio de limitación", todos los elementos que pasen el test para un solo elemento producirán de hecho idénticos resultados que los obtenidos mediante la forma irreducible equivalente, siempre que la matriz $\mathbf{D}$ sea constante dentro de cada elemento. Estos elementos presentan, por tanto, poco interés. Sin embargo, nótese que el Q 4/8, que falla en el test para un solo elemento, pasa el test para ensamblajes de dos o más elementos, y puede por tanto usarse, comportándose bien en múltiples circunstancias. Se verá más tarde que este elemento es equivalente a usar integración *reducida*, con cuatro puntos de Gauss (viz. Sección 12.7), y como ya se mencionó en el Capítulo 11, tales elementos no son siempre robustos.

Es interesante notar que si se usa mayor orden de interpolación para $\boldsymbol{\sigma}$ que para $\mathbf{u}$, el test de la parcela se satisface siempre, pero en general los resultados no mejoran.

No se muestra el test de la parcela análogo para funciones $\mathbf{N}_\sigma$ C_0-continuas, pero diremos que, de forma similar al ejemplo de la Figura 12.3, interpolaciones idénticas de $\mathbf{N}_\sigma$ y $\mathbf{N}_u$ son aceptables desde el punto de vista de la estabilidad. Sin embargo, como en la Figura 12.4, la restricción de *excesiva continuidad* para las tensiones tiene que evitarse en las singularidades y superficies de cambio en las propiedades de los materiales, donde sólo las tracciones normales y tangenciales son continuas. Se mostrará en la Sección 12.8.3 que las interpolaciones continuas de tensión a menudo producen una importante mejora en la precisión.

La desconexión de las variables de tensión en los nodos de esquina sólo puede llevarse a cabo para todas las variables. Por esta razón se puede introducir un grupo alternativo de elementos con nodos de tensión en los

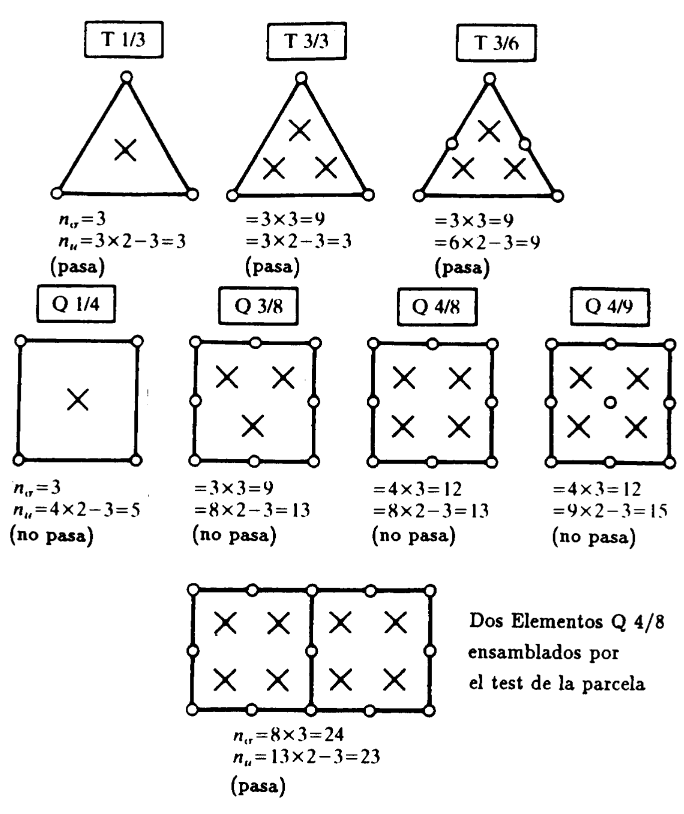


Figura 12.5 Formulación mixta $\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{u}$ para elasticidad. Aproximación discontinua de tensiones. Test de la parcela para un solo elemento. Sin prescripción para las variables $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, pero tres grados de libertad de $\bar{\mathbf{u}}$ prescritos por parcela. Condición de test $n_\sigma \geq n_u$ (X se refiere a las variables de $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ (3 GDL) y ○ a las de $\bar{\mathbf{u}}$ (2 GDL)).

contornos del elemento (viz. Figura 12.6).[19]

En tales elementos la excesiva continuidad puede evitarse fácilmente desconectando sólo las componentes normales de tensión paralelas a la interfase donde se da el cambio de material. Debe notarse que incluso en el caso en que todas las componentes de tensión estén conectadas en los nodos de mitad de lado, tales elementos no aseguran continuidad de tensiones a lo largo de toda la interfase. De hecho, la magnitud de tal discontinuidad puede ser útil como una medida de error. Sin embargo, debe notarse que para el elemento lineal [Figura 12.6 (a)] las tensiones interelementales son continuas *en la media.*

Naturalmente, es posible derivar elementos que presenten continuidad completa de las componentes apropiadas de tensión a lo largo de las

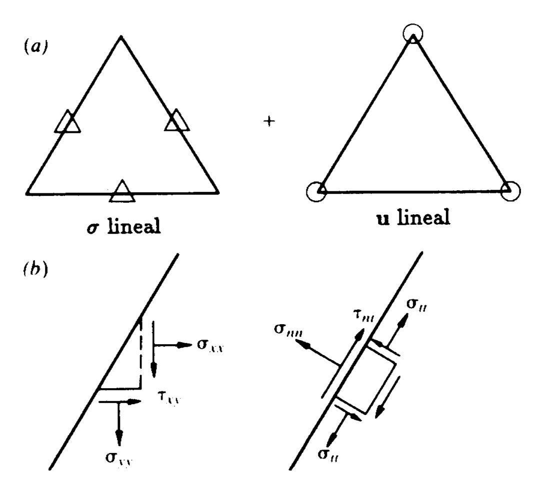


Figura 12.6 Formulación mixta $\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{u}$ para elasticidad. Continuidad parcial en $\boldsymbol{\sigma}$ (continuidad sólo en los nodos). (a) $\boldsymbol{\sigma}$ lineal, $\mathbf{u}$ lineal; (b) posible transformación de tensiones en la interfase con $\boldsymbol{\sigma}_{tt}$ desconectada.

interfases, y de hecho esto fue llevado a cabo por Raviart y Thomas[20] para el problema de transmisión del calor discutido anteriormente. La extensión al problema tensional es difícil[21] y aún no se han utilizado tales elementos con éxito.

12.4.5 *Condición de estabilidad para la aproximación de tres campos* ($\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{u}$). La condición de estabilidad derivada en la Sección 12.3 [Ec. (12.17)] para problemas de dos campos, y que después se ha usado en la Ec. (12.36) para la forma de elasticidad mixta simple, necesita ser modificada cuando se consideran aproximaciones de tres campos de la forma dada en la Ec. (12.34). Muchos otros problemas son similares (por ejemplo, flexión de placas) y, por tanto, las condiciones de estabilidad son útiles en general. El requisito es ahora que

$$n_\varepsilon + n_u \geq n_\sigma$$
$$n_\sigma \geq n_u \qquad (12.37)$$

Esto se estableció por primera vez en la referencia 22, y se deduce directamente del criterio para dos campos como se muestra a continuación.

El sistema de la Ec. (12.34) puede ser "regularizado" sumando $\gamma\mathbf{E}$ veces la tercera ecuación a la segunda, siendo γ una constante arbitraria. Se tiene ahora

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^T & \gamma\mathbf{E}\mathbf{E}^T & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 + \gamma\mathbf{E}\mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_3 \end{Bmatrix}$$

Eliminando $\boldsymbol{\varepsilon}$ usando la primera de las ecuaciones se tiene

$$\begin{bmatrix} \gamma\mathbf{E}\mathbf{E}^T - \mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}, & \mathbf{E} \\ \mathbf{E}^T, & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_2 + \gamma\mathbf{E}\mathbf{f}_3 - \mathbf{C}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_3 \end{Bmatrix}$$

De los requisitos para el problema de dos campos [Ec. (12.17)] se tiene que para la no singularidad es necesario que

$$n_\sigma \geq n_u$$

Reescribiendo la Ec. (12.34) como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{E}^T \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix}$$

y regularizando de nuevo sumando múltiplos $\gamma\mathbf{C}$ y $\gamma\mathbf{E}^T$ de la tercera de las ecuaciones a la primera y la segunda, respectivamente, se obtiene

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{A} + \gamma\mathbf{C}\mathbf{C}^T, & \gamma\mathbf{C}\mathbf{E} & \mathbf{C} \\ \gamma\mathbf{E}^T\mathbf{C}^T, & \gamma\mathbf{E}^T\mathbf{E} & \mathbf{E}^T \\ \hdashline \mathbf{C}^T, & \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 + \gamma\mathbf{C}\mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 + \gamma\mathbf{E}^T\mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix}$$

Subdividiendo el sistema como se muestra es evidente el requisito

$$n_\varepsilon + n_u \geq n_\sigma$$

No discutiremos en detalle ninguna de las posibles aproximaciones a la formulación $\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{u}$ o los correspondientes tests de la parcela, ya que los argumentos son similares a aquéllos aplicados para los problemas de dos campos.

En algunas aplicaciones prácticas de la aproximación de tres campos, la aproximación de la segunda y tercera ecuaciones en (12.32) se usa directamente para eliminar todos los términos menos el de desplazamientos. Esto lleva a una forma especial del método de desplazamientos a la que se ha llamado forma $\bar{\mathbf{B}}$(B–barra)[23,24]. En la forma $\bar{\mathbf{B}}$ las derivadas de las funciones de forma se sustituyen por aproximaciones provenientes de la forma mixta. En la Sección 12.5.2 se ilustra este concepto con un ejemplo de un material cuasi-incompresible.

12.5 Elasticidad incompresible (o cuasi-incompresible)

12.5.1 *Aproximación de dos campos* ($\mathbf{u} - p$). Se ha dicho anteriormente que la formulación estándar en desplazamientos para problemas elásticos falla cuando el coeficiente de Poisson se acerca a 0.5 o cuando el material se vuelve incompresible. De hecho, surgen problemas incluso si el material es cuasi-incompresible con $\nu > 0.4$ y la aproximación lineal con elementos triangulares da resultados altamente oscilantes en tales casos.

La aplicación de una forma mixta para dichos problemas evita las dificultades y es de gran interés práctico, ya que el comportamiento elástico cuasi-incompresible aparece en muchos problemas reales de ingeniería, que van desde la mecánica de suelos hasta la ingeniería aeroespacial. Idénticos problemas aparecen cuando se considera el flujo de fluidos incompresibles.

El principal problema de la aplicación de la formulación "estándar" en desplazamientos en problemas incompresibles o cuasi-incompresibles consiste en la determinación de la tensión media o presión, que está relacionada con la parte volumétrica de la deformación. Por esta razón es conveniente separar ésta del campo de tensiones totales y tratarla como una variable independiente. Usando la notación "vectorial" para las tensiones, la tensión media o presión viene dada por

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{m}}{3} \tag{12.38}$$

donde $\mathbf{m}$ viene dado, para el caso general de un estado tridimensional de tensiones, por

$$\mathbf{m}^T = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$$

La "presión" está relacionada con la deformación volumétrica, ε_v, a través del módulo de deformación volumétrica del material K para comportamiento isotrópo. Por tanto,

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \mathbf{m}^T\boldsymbol{\varepsilon} \tag{12.39}$$

$$\varepsilon_v = \frac{p}{K} \tag{12.40}$$

Para un material incompresible, $K = \infty$ y la deformación volumétrica es simplemente nula.

La deformación desviadora $\boldsymbol{\varepsilon}_d$ está definida como

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\mathbf{m}\varepsilon_v}{3} \equiv (\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{m}\mathbf{m}^T)\boldsymbol{\varepsilon} \tag{12.41}$$

y está relacionada con la tensión desviadora $\boldsymbol{\sigma}_d$, en elasticidad isótropa, a través del módulo de cortante G de la forma

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{m}p = G\mathbf{D}_0\boldsymbol{\varepsilon}_d = G(\mathbf{D}_0 - \frac{2}{3}\mathbf{m}\mathbf{m}^T)\boldsymbol{\varepsilon} \tag{12.42}$$

donde la matriz

$$\mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} 2 & & & & & 0 \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

debe introducirse debido a la notación vectorial adoptada.

Las relaciones anteriores no son sino una forma alternativa de las relaciones tensión-deformación mostradas en los Capítulos 2 y 3, y el lector puede verificar que

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{12.43}$$

y las Ecs. (12.42) y (12.40) pueden usarse para definir la matriz $\mathbf{D}$ estándar de una forma alternativa.

En la forma mixta considerada a continuación usaremos como variables el desplazamiento $\mathbf{u}$ y la presión p.

Reescribimos ahora la ecuación de equilibrio (12.21) usando (12.42) y tratando a p como variable independiente, como

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T[G(\mathbf{D}_0 - \frac{2}{3}\mathbf{m}\mathbf{m}^T)\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m}p]\, d\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T\bar{\mathbf{t}}\, d\Gamma = 0 \tag{12.44}$$

e impongamos además una forma débil de la Ec. (12.40), esto es,

$$\int_\Omega \delta p^T \left[\mathbf{m}^T\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{p}{K}\right] d\Omega = 0 \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\mathbf{u} \tag{12.45}$$

Aproximaciones independientes para $\mathbf{u}$ y p de la forma

$$\mathbf{u} \cong \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_u\bar{\mathbf{u}} \quad \text{y} \quad p \cong \hat{p} = \mathbf{N}_p\bar{\mathbf{p}} \tag{12.46}$$

llevan inmediatamente a la aproximación mixta escrita, como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & -\mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} \tag{12.47}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_\Omega \mathbf{B}^T G(\mathbf{D}_0 - \tfrac{2}{3}\mathbf{m}\mathbf{m}^T)\mathbf{B}\, d\Omega \\ \mathbf{C} &= \int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{m}\mathbf{N}_p\, d\Omega \\ \mathbf{V} &= \int_\Omega \left(\mathbf{N}_p^T\mathbf{N}_p \frac{d\Omega}{K}\right) \\ \mathbf{f}_1 &= \int_\Omega \mathbf{N}_u^T\mathbf{b}\, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}_u^T\bar{\mathbf{t}}\, d\Gamma \\ \mathbf{f}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{12.48}$$

Nótese que para situaciones incompresibles las ecuaciones son de la forma "estándar" [viz. Ec. (12.13)] con $\mathbf{V} = 0$ (a medida que $K \to \infty$), pero la formulación es de uso práctico cuando K tiene un valor alto (o $\nu \to 0.5$).

Una formulación similar a la anterior y usando el correspondiente teorema variacional fue propuesta por primera vez por Herrmann[25], y generalizado más tarde por Key[26] para elasticidad anisótropa.

Los argumentos concernientes a la estabilidad (o singularidad) de las matrices que se presentaron en la Sección 12.3 son de nuevo de gran importancia en este problema.

Claramente, la condición sobre el número de grados de libertad es ahora [viz. Ec. (12.17)]

$$n_u \geq n_p \tag{12.49}$$

y debe ser tenida en cuenta para evitar bloqueo (o inestabilidad) de la solución, ya que ahora la presión actúa como variable de restricción o multiplicador de Lagrange para forzar la incompresibilidad.

En la forma de *test de la parcela* esta condición es crítica y se muestran en las Figuras 12.7 y 12.8 una serie de dichos tests para elementos con interpolación C_0-continua para $\mathbf{u}$ e interpolación, bien discontinua, bien continua para p. Para cada uno se incluyen todas las combinaciones de funciones constantes, lineales y cuadráticas.

En el test se prescriben *todos* los desplazamientos en el contorno de la parcela y una variable de presión (ya que es sabido que en situaciones totalmente incompresibles la presión queda indeterminada por una constante).

El test para un solo elemento es muy exigente y elimina a la mayoría de las aproximaciones continuas de presión, cuyo comportamiento es en realidad aceptable en muchas situaciones. Por esta razón le damos mayor importancia al test para un ensamblaje de elementos, y parece que los siguientes elementos son aceptables de acuerdo con el criterio de la Ec. (12.49) (de hecho todos satisfacen la condición de B-B):

Triángulos: T 6/1 T 10/3 T 6/C3
Cuadriláteros: Q 9/3 Q 8/C4 Q 9/C4

Nótese, sin embargo, que en las aplicaciones prácticas se han obtenido resultados adecuados con los cuadriláteros Q 4/1, Q 8/3 y Q 9/4, aunque p pueda sufrir oscilaciones importantes. Si lo que se busca es elementos robustos, las opciones son limitadas[2].

Es desafortunado que en la lista de elementos "aceptables" falten el triángulo y cuadrilátero lineales. Esto restringe apreciablemente el uso de estos elementos más simples. Un procedimiento posible, y de hecho efectivo, es aplicar la restricción de presión no a nivel de un elemento singular, sino a un ensamblaje de elementos. Esto lo hizo Herrmann en su presentación original,[25] donde se tomaban cuatro elementos para tal restricción, como se muestra en la Figura 12.9(*a*). *Este "elemento"' pasa los tests de la parcela para un solo elemento (y para varios)*, pero aparentemente también

lo hacen otros elementos que encajan en esta categoría. En la Figura 12.9(b) se muestra como un triángulo se puede subdividir internamente en tres partes al introducir un nodo central. Esto, junto con presión constante en el ensamblaje, permite que se satisfaga la condición necesaria, y un procedimiento estándar aplicado al triángulo original hace que el nodo central pueda ser tratado como variable interna. De hecho, se puede conseguir el mismo efecto introduciendo cualquier otra función elemental interna que dé valor nulo en el perímetro del triángulo principal. Tal función burbuja puede escribirse simplemente en función de las coordenadas de área (viz. Capítulo 7) como

$$L_1 L_2 L_3$$

Sin embargo, como ya se ha dicho, el recuento de los grados de libertad es una condición necesaria, pero no suficiente, de estabilidad, y se precisan otras pruebas. En particular, se puede verificar algebraicamente que las condiciones establecidas en la nota en el pie de página anterior no se satisfacen

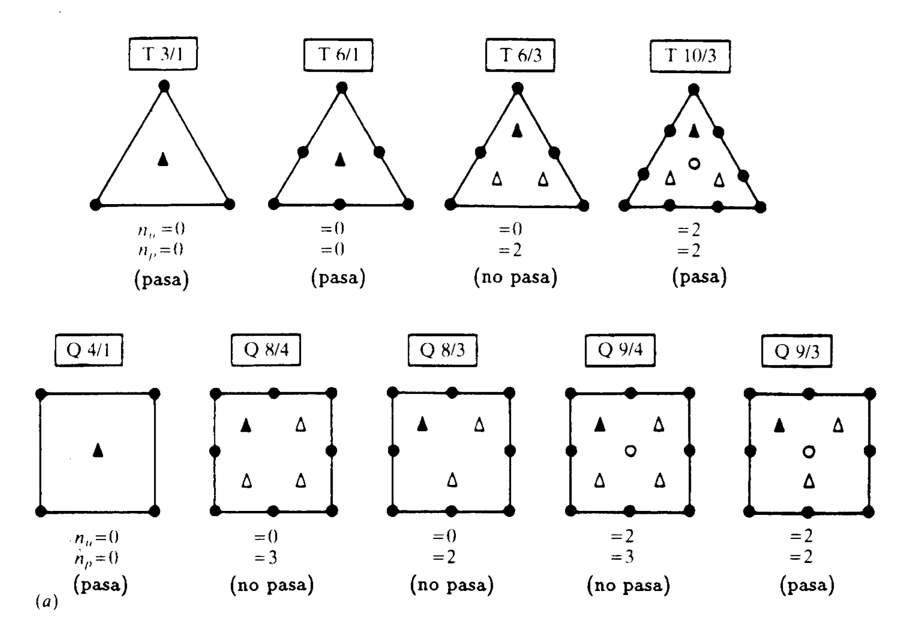
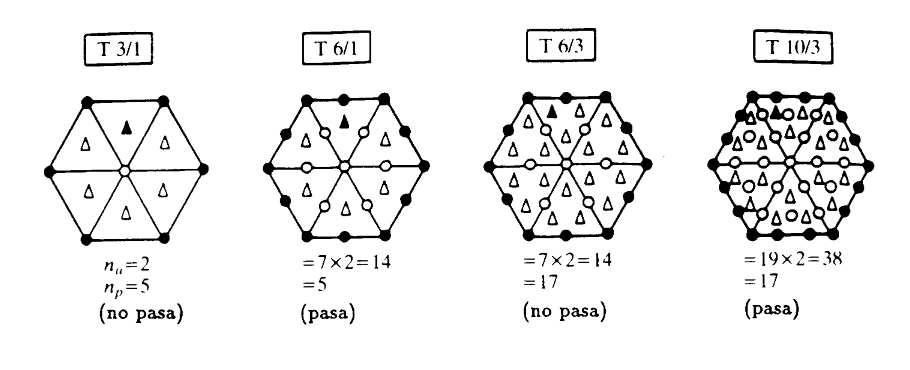


Figura 12.7(a) Formulación $\mathbf{u}-p$ para elasticidad incompresible. Aproximación discontinua de la presión. (a) Tests de la parcela para un solo elemento. (b) Tests de la parcela para varios elementos.



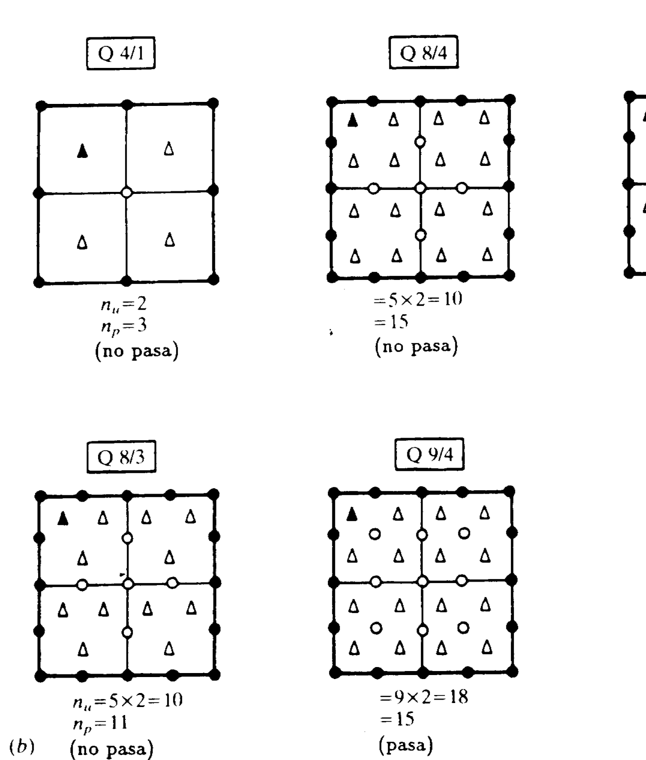


Figura 12.7(b)

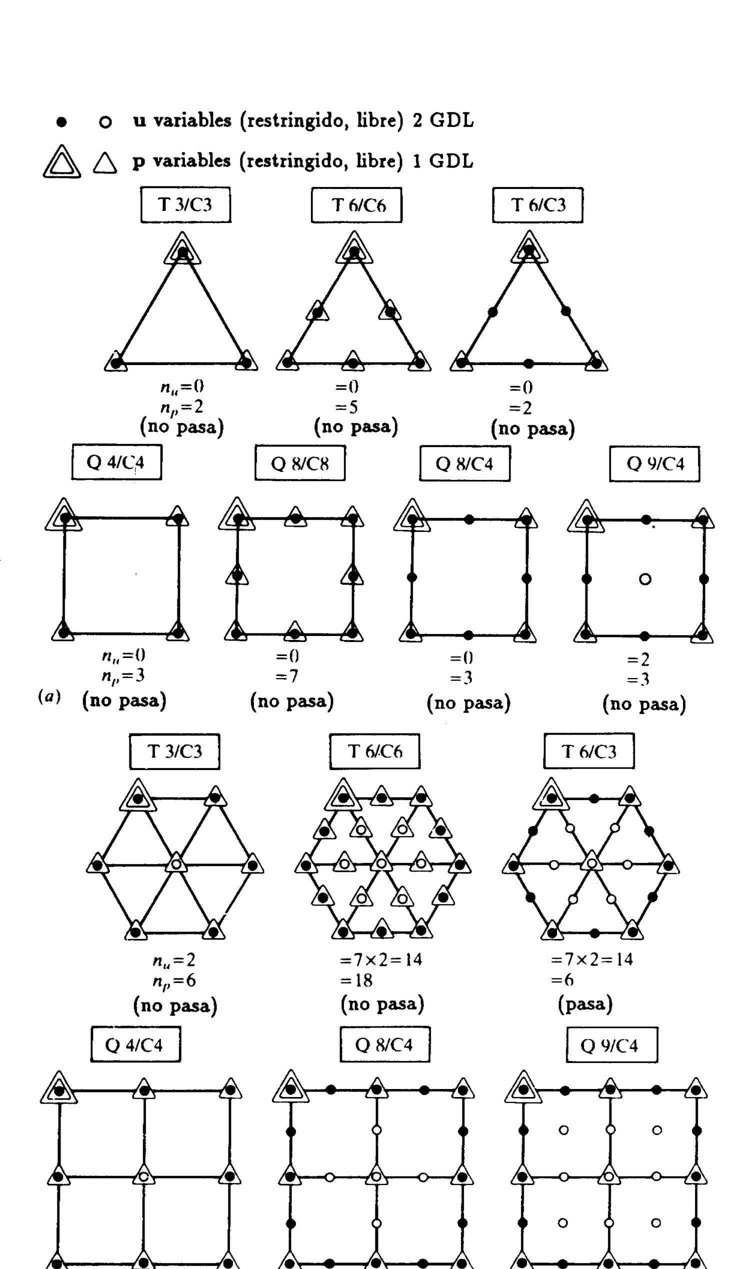


Figura 12.8 Formulación $\mathbf{u} - p$ para elasticidad incompresible. Aproximación C_0-continua de la presión. (a) Tests de la parcela para un solo elemento. (b) Tests de la parcela para varios elementos.

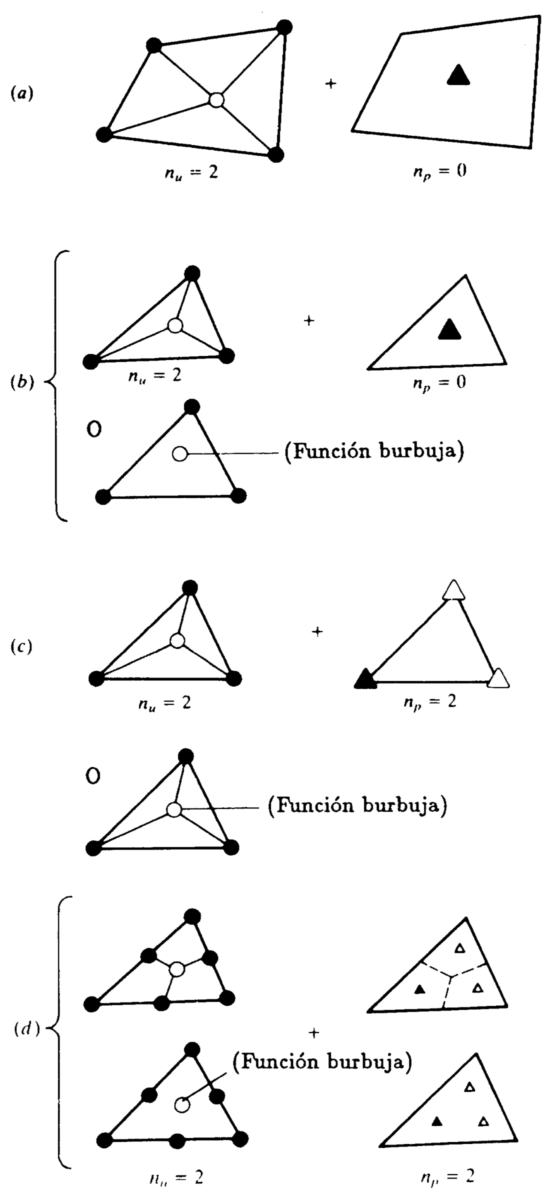


Figura 12.9 Algunas combinaciones simples de triángulos y cuadriláteros lineales que pasan la condición necesaria del test de la parcela. Las combinaciones (a), (c) y (d) son satisfactorias, pero (b) sigue siendo singular y no utilizable.

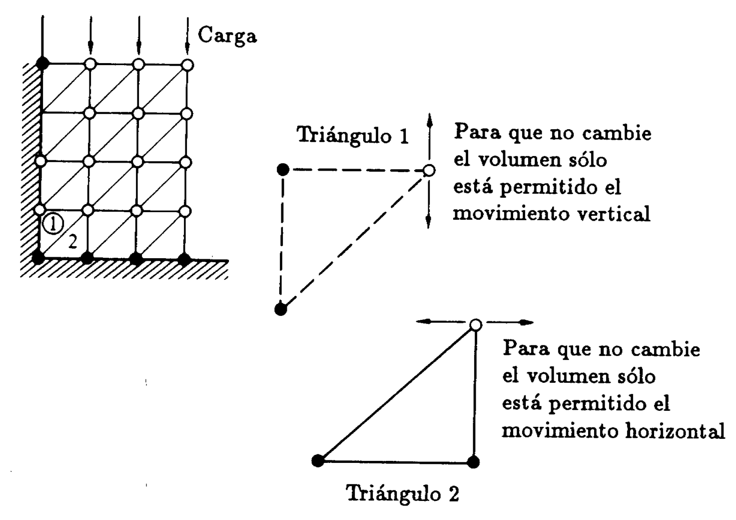


Figura 12.10 Bloqueo (desplazamientos nulos) en un ensamblaje simple de triángulos lineales en los cuales se requiere incompresibilidad completa ($n_p = n_u = 24$).

para esta triple subdivisión del triángulo lineal (o en el caso de la función burbuja) y, por tanto,

$$\mathbf{C}\mathbf{p} = 0 \quad \text{para algunos valores no triviales de } \mathbf{p}$$

con lo cual la inestabilidad subsiste.

En la Figura 12.9(c) se muestra, sin embargo, que el mismo concepto se puede aplicar satisfactoriamente para p C_0-continua. Subdivisiones internas similares en cuadriláteros y la introducción de funciones burbuja pueden usarse con éxito, tal como se muestra en la Figura 12.9(d).

El comportamiento de todos los elementos mencionados anteriormente ha sido extensamente discutido,[27-32] pero una comparación detallada de sus méritos es difícil. Como ya se ha dicho, es esencial tener $n_u \geq n_p$, pero si sólo se logra la casi igualdad en un problema de gran tamaño se obtienen resultados sin sentido para $\mathbf{u}$, como se observa, por ejemplo, en la Figura 12.10, en la que se usan triángulos lineales para $\mathbf{u}$ y p constante en el elemento. Aquí, la única respuesta posible es naturalmente $\mathbf{u} = 0$, ya que los triángulos deben mantener su volumen constante.

La relación n_u/n_p que se obtiene cuando el campo de elementos se agranda da una indicación del comportamiento relativo, tal como se muestra en la Figura 12.11. Esto aproxima el comportamiento de un ensamblaje muy grande de elementos, pero naturalmente en cualquier problema práctico tal relación depende de las condiciones de contorno impuestas.

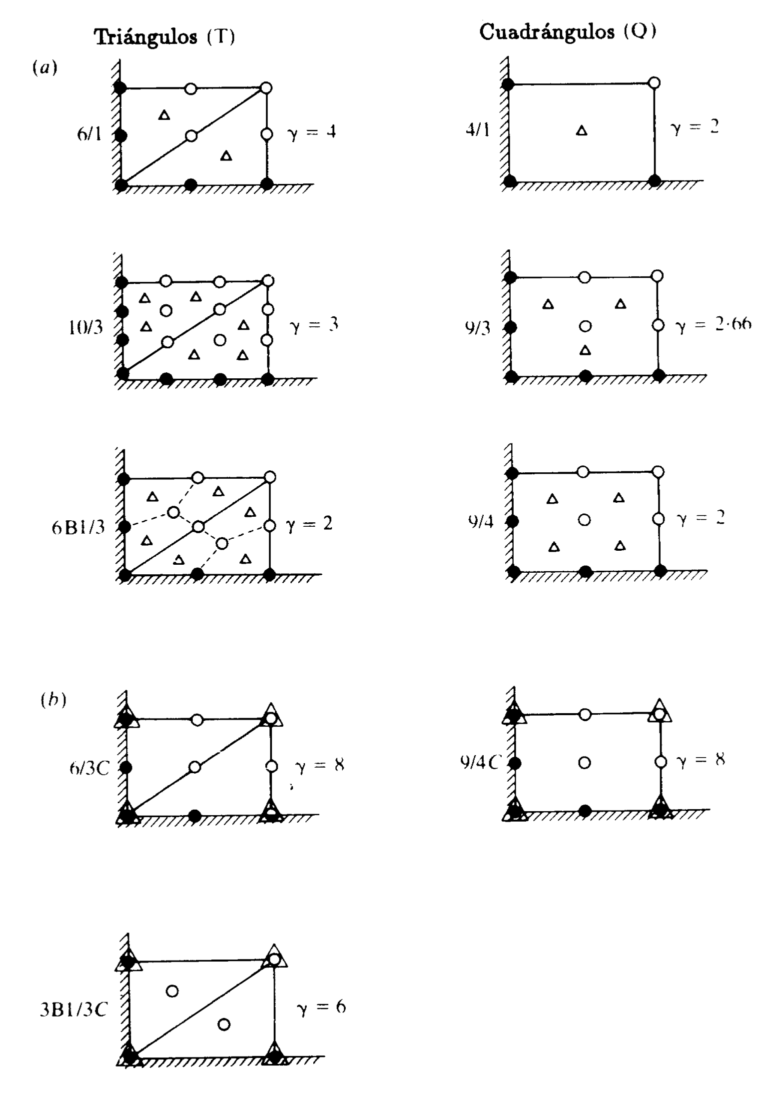


Figura 12.11 El *índice de libertad* o *relación de parcela infinita* para varios elementos $\mathbf{u}$-p para elasticidad incompresible ($\gamma = n_u/n_p$). (a) Presión discontinua. (b) Presión continua.

Nótese que para la aproximación discontinua de presión esta relación para los elementos "buenos"' es de 2 a 3, mientras que para la presión C_0-continua es de 6 a 8. Todos los elementos mostrados en la Figura 12.11 se comportan muy bien.

12.5.2 *Aproximación de tres campos* ($\mathbf{u}-p-\varepsilon_v$). *El método* **B**—*barra para materiales cuasi-incompresibles.* Una aproximación directa a la forma de tres campos lleva a un método importante dentro de los procedimientos de solución por elementos finitos para materiales incompresibles al que se llama a veces método **B**-barra. La metodología puede exponerse para el problema (cuasi) incompresible. Se ha demostrado que la forma normal irreducible (método de desplazamientos) sufre "bloqueo" para el problema Cuasi-incompresible. Como se muestra en la Sección 12.5.1, el uso de un método mixto puede evitar el fenómeno del bloqueo si se implementa adecuadamente (por ejemplo, usando la forma de dos campos Q 9/3). A continuación se presenta una alternativa que conduce a una implementación eficiente y precisa en muchas situaciones. En este desarrollo supondremos que el material es isótropo, pero puede extenderse fácilmente para incluir materiales anisótropos.

Suponiendo aproximaciones independientes para ε_v y p se puede formular el problema usando las Ec. (12.44) y la forma débil de la relaciones (12.39) y (12.40) escritas de la forma

$$\int_\Omega \delta p[\varepsilon_v - \mathbf{m}^T\mathbf{S}\mathbf{u}]\,d\Omega = 0 \tag{12.50}$$

$$\int_\Omega \delta\varepsilon_v[K\varepsilon_v - p]\,d\Omega = 0 \tag{12.51}$$

y (12.44).

Si se aproximan los campos $\mathbf{u}$ y p como en (12.46), y

$$\varepsilon_v \approx \hat{\varepsilon}_v = \mathbf{N}_v\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_v \tag{12.52}$$

se obtiene una aproximación mixta de la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{E}^T & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{Bmatrix} \tag{12.53}$$

donde $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{f}_i$ se dan en (12.48), y

$$\mathbf{E} = \int_\Omega \mathbf{N}_p^T\mathbf{N}_v\,d\Omega \qquad \mathbf{f}_3 = 0 \tag{12.54}$$

con

$$\mathbf{H} = \int_\Omega \mathbf{N}_v^T K\mathbf{N}_v\,d\Omega \tag{12.55}$$

La segunda ecuación de (12.53) tiene la solución

$$\bar{\varepsilon}_v = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{C}^T\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{W}\bar{\mathbf{u}} \tag{12.56}$$

En lo anterior se ha supuesto que $\mathbf{E}$ es invertible, lo que implica que $\mathbf{N}_v$ y $\mathbf{N}_p$ tienen el mismo número de términos. Además, las aproximaciones para la deformación volumétrica y la presión se construyen para cada elemento individualmente y no son continuas a través de los contornos elementales. Por tanto, la solución de la Ec. (12.56) puede llevarse a cabo para cada elemento individualmente. En la práctica, $\mathbf{N}_v$ normalmente se supone idéntica a $\mathbf{N}_p$ y así $\mathbf{E}$ es simétrica y definida positiva. La solución de la tercera ecuación de (12.53) da los parámetros de la presión en función de los parámetros de la deformación volumétrica, de la forma

$$\bar{\mathbf{p}} = (\mathbf{E}^T)^{-1}\mathbf{H}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_v \tag{12.57}$$

Substituyendo (12.56) y (12.57) en la primera ecuación de (12.53) se obtiene una solución en función de desplazamientos solamente de la forma

$$\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_1 \tag{12.58}$$

donde, para materiales isótropos

$$\bar{\mathbf{A}} = \int_\Omega \mathbf{B}^T G(\mathbf{D}_0 - \tfrac{2}{3}\mathbf{m}\mathbf{m}^T)\mathbf{B}\,d\Omega + \mathbf{W}^T\mathbf{H}\mathbf{W} \tag{12.59}$$

La solución de (12.58) da los parámetros nodales para los desplazamientos, y entonces pueden usarse (12.56) y (12.57) para obtener las aproximaciones para la deformación volumétrica y la presión.

El resultado de (12.59) puede ser modificado para obtener una forma similar a la del método estándar de desplazamientos. Para ello se escribe

$$\bar{\mathbf{A}} = \int_\Omega \bar{\mathbf{B}}^T\mathbf{D}\bar{\mathbf{B}}\,d\Omega \tag{12.60}$$

donde la matriz de desplazamientos-deformación es ahora

$$\bar{\mathbf{B}} = (\mathbf{I} - \tfrac{1}{3}\mathbf{m}\mathbf{m}^T)\mathbf{B} + \tfrac{1}{3}\mathbf{m}\mathbf{N}_v\mathbf{W} \tag{12.61}$$

Para materiales isotrópos la matriz constitutiva es

$$\mathbf{D} = G(\mathbf{D}_0 - \tfrac{2}{3}\mathbf{m}\mathbf{m}^T) + K\mathbf{m}\mathbf{m}^T \tag{12.62}$$

Nótese que la forma anterior es idéntica al modelo estándar de desplazamientos, salvo que $\mathbf{B}$ ha sido reemplazada por $\bar{\mathbf{B}}$. El método se discute más extensamente en las referencias 23 y 24.

La equivalencia de (12.59) y (12.60) puede verificarse mediante simple multiplicación de matrices.

La formulación presentada se ha implementado en un elemento incluído como parte del programa del Capítulo 15. La elegancia del método está

mejor explotada en problemas no lineales, tales como plasticidad o elasticidad con deformaciones finitas. Para una discusión más completa véase la referencia 24.

Nótese que la eliminación de p también puede llevarse a cabo en la forma de dos campos $\mathbf{u}-p$ usando K como un número de penalización, pero si K es una variable real con variación espacial, la forma dada aquí es mucho más conveniente, ya que la matriz $\mathbf{E}$ es independiente de K.

Naturalmente, los mismos criterios de estabilidad discutidos previamente para la aproximación de dos campos son válidos aquí.

12.6 Alisado de tensiones / muestreo óptimo

12.6.1 *Proyección de tensiones.* Hemos observado en capítulos anteriores que la formulación de desplazamientos produce a menudo predicciones poco realistas de tensión, dando "saltos" de tensión inter-elementales aún cuando las tensiones reales son continuas. A menudo se recurre en la práctica al promediado nodal de las tensiones elementales para obtener una mejor visión de las tensiones por un proceso de *proyección* o *recuperación variacional* que es en sí mismo otra formulación mixta posible.[32-36]

Así se obtienen los desplazamientos $\mathbf{u}$ (o las temperaturas ϕ en un problema de campo, tal como el tratado en la Sección 12.3) con una formulación irreducible. Sin embargo, en lugar de calcular las tensiones $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ de la forma

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \tag{12.63}$$

se calculan las tensiones $\boldsymbol{\sigma}^*$ interpoladas como

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{N}_\sigma \bar{\boldsymbol{\sigma}} \tag{12.64}$$

de tal forma que aproximen $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ en un sentido débil. Esta aproximación se puede escribir

$$\int_\Omega \mathbf{N}_\sigma^T (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})\, d\Omega = 0 \tag{12.65}$$

o bien

$$\left(\int_\Omega \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{N}_\sigma \, d\Omega\right) \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\int_\Omega \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{D}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}\right) d\Omega \tag{12.66}$$

Ésta es *casi* idéntica a la primera de las ecuaciones de (12.30), usada en la aproximación mixta $\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{u}$, y sería idéntica si el integrando hubiera sido premultiplicado por $\mathbf{D}^{-1}$. No se ha hecho así en este caso ya que la estructura de la matriz en el primer miembro de la Ec. (12.66) es de especial interés. De hecho, nos encontramos esta forma en problemas dinámicos como una "matriz de masa". Si llamamos a esta matriz

$$\mathbf{M} = \int_\Omega \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{N}_\sigma \, d\Omega \tag{12.67}$$

vemos que es fácil "diagonalizarla" de forma aproximada como $\mathbf{M}_L$. En el Apéndice 8 se describen varios procedimientos de diagonalización y se ve que una de las formas más útiles es aplicar una regla aproximada de integración con los puntos de integración restringidos a los nodos i de $\mathbf{N}_\sigma$. Si las funciones $\mathbf{N}_\sigma$ están escritas en forma "estándar", y no en forma jerárquica, el proceso produce una matriz puramente diagonal. Si la Ec. (12.66) se escribe como

$$\mathbf{M}\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{P} \tag{12.68}$$

se puede aproximar su solución de la forma

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M}_L^{-1}\mathbf{P} \tag{12.69}$$

donde la inversión es trivial. Se pueden obtener mejoras sucesivas de la solución mediante la iteración

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^n = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{n-1} + \mathbf{M}_L^{-1}(\mathbf{M}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{n-1} - \mathbf{P}) \tag{12.70}$$

La proyección más obvia es usar $\mathbf{N}_\sigma$ continuas y tales que

$$\mathbf{N}_\sigma = \mathbf{N}_u \tag{12.71}$$

obteniéndose de esta manera una aproximación de mayor precisión.

Es interesante notar que la "proyección" de la Ec. (12.66) es equivalente al ajuste por "mínimos cuadrados", o a la minimización de

$$\Pi = \int_\Omega (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^2 \, d\Omega \tag{12.72}$$

con respecto a $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ de la Ec. (12.64).

12.6.2 *Muestreo optimo.* El hecho de que las tensiones alisadas, y por tanto, más precisas, sean un ajuste por mínimos cuadrados de las tensiones calculadas proporciona una pista sobre la localización de los puntos en los cuales el muestreo o evaluación de tensiones es óptimo.

Considérese la Figura 12.12 en la que se muestran tensiones (gradientes) lineales a trozos y discontinuos como aproximación de la distribución real. Si esta última es un ajuste por mínimos cuadrados de la primera, es evidente que en ciertos puntos ambas deben ser iguales. De hecho, esta igualdad ocurrirá en general en el interior de cada elemento. Si se conociera *a priori* dónde están situados dichos puntos, siempre calcularíamos en ellos la solución exacta; claramente esto es un sueño díficilmente realizable.

Sin embargo, una propiedad útil de los puntos de integración de Gauss-Legendre puede ayudar. *Esta propiedad puede enunciarse de la forma: Si*

existe una fórmula de integración numérica con un número mínimo de puntos de muestreo que integra de forma exacta un polinomio de grado $2M + 1$, entonces, en general, en tales puntos un polinomio de orden $M + 1$ es igual a su correspondiente ajuste por mínimos cuadrados mediante un polinomio de orden M.

Esta proposición es exacta para el caso de integración de Gauss en una dimensión, y se satisface aproximadamente para expresiones de integración en dos y tres dimensiones.[37]

Es obvio en el ejemplo mostrado que si la curva exacta fuera una parábola, entonces dos puntos de Gauss definirían de forma única una recta que es su ajuste por mínimos cuadrados. A la inversa, si se muestrea la aproximación **Su** en estos puntos, se obtiene una precisión un orden superior que la que proporciona la aproximación en cualquier otro sitio. Claramente tales puntos son óptimos para el muestreo de la magnitud **Su** (o las deformaciones y tensiones en un problema de elasticidad).

Para soluciones suaves se puede decir de forma bastante general que la aproximación a **Su** es siempre de orden $O(h^{p-m+1})$, donde p es el orden del polinomio completo en la función de forma de aproximación y m es el orden del operador **S** (Capítulo 9, Sección 9.8). Por tanto, *en los puntos de integración numérica que integran exactamente un polinomio de orden $2(p-m)+1$ [osea, con un error de orden $O(h^{2(p-m)+2})$], la aproximación a* **Su** *será casi un orden mejor, esto es, $O(h^{p-m+2})$.*

Obviamente, en cualquier cálculo por elementos finitos es conveniente muestrear las deformaciones en dichos puntos de integración, como ha sido manifestado por muchos investigadores.[34,37–39]

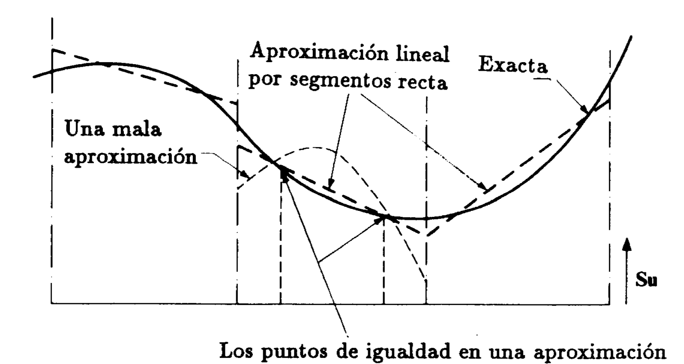


Figura 12.12 Ajuste lineal por mínimos cuadrados a la curva **Su** de tensión o deformación.

La Figura 12.13 muestra algunos de tales puntos óptimos de muestreo para varios elementos del tipo C_0 ($m = 1$).

Los resultados para triángulos y cuadriláteros lineales son físicamente obvios (y ya hemos mencionado en el Capítulo 3, Sección 3.2.9, que "obviamente" las tensiones están mejor representadas en los centroides). Para elementos C_0 de mayor orden los resultados no son en absoluto evidentes, pero son, sin embargo, ciertos.

El concepto de ajuste por mínimos cuadrados tiene justificación adicional en problemas auto-adjuntos en los que se minimiza un funcional de energía. En tales casos, típicos en la formulación en desplazamientos de elasticidad, se puede mostrar fácilmente que la minimización es equivalente a ajustar por mínimos cuadrados las tensiones a las exactas. Por tanto, se puede empezar de forma general por una teoría que establece que *la minimización de un funcional de energía Π definido como*

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathbf{Su})^T \mathbf{A}(\mathbf{Su})\, d\Omega + \int_\Omega \mathbf{u}^T \mathbf{p}\, d\Omega \tag{12.73}$$

que da la solución exacta $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$, es equivalente a la minimización de otro funcional Π^* definido como

$$\Pi^* = \frac{1}{2}\int_\Omega [\mathbf{S}(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})]^T \mathbf{A}\mathbf{S}(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})\, d\Omega \tag{12.74}$$

En lo anterior **S** es un operador lineal auto-adjunto, y **A** y **p** son matrices prescritas de posición. La forma cuadrática (12.73) es la que aparece en la mayoría de problemas lineales auto-adjuntos.

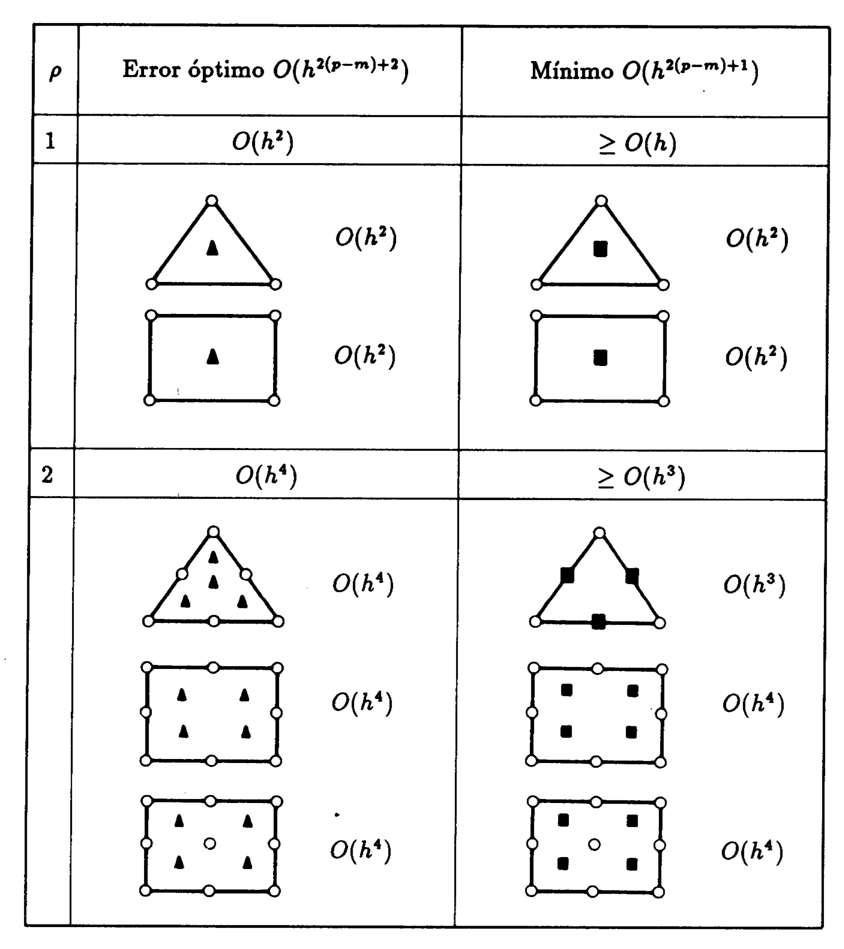
Este teorema viene dado en diferentes formas por Herrmann,[40] Moan,[37] Brauchli y Oden[38] y demuestra que la solución aproximada a **Su** se acerca a la exacta $\mathbf{S}\bar{\mathbf{u}}$ como una *aproximación ponderada de mínimos cuadrados.*

En el contexto del análisis elástico, por ejemplo, se puede establecer que la minimización de la energía potencial total es equivalente a encontrar un ajuste ponderado de mínimos cuadrados a las deformaciones exactas mediante aquéllas que se suponen de forma aproximada.

La demostración del teorema anterior se da al final de esta sección.

En algunas ocasiones componentes individuales de las deformaciones o tensiones muestran localmente una muy mala aproximación debido a términos espúreos de alto orden presentes en los elementos cuadriláteros. Aquí de nuevo los puntos de muestreo óptimo vienen al rescate.

En la Figura 12.14 se muestra, por ejemplo, un análisis de una viga en voladizo usando cuatro elementos cuadráticos del tipo "serendípito". Mientras los resultados para las flechas y las tensiones axiales son excelentes, las tensiones de cortante muestran una "variación" parabólica en cada elemento que resulta en una representación muy pobre de las tensiones reales. Sin embargo, los valores obtenidos en los puntos de Gauss son una excelente



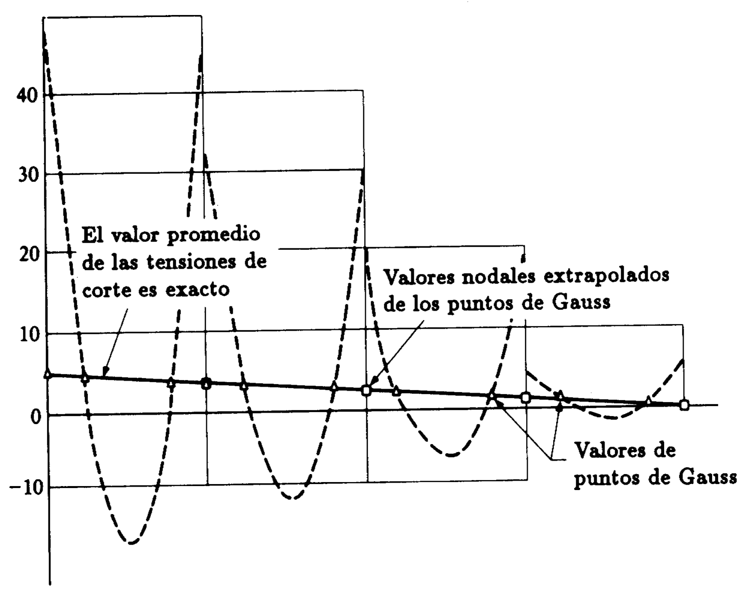
p	Error óptimo $O(h^{2(p-m)+2})$	Mínimo $O(h^{2(p-m)+1})$
1	$O(h^2)$	$\geq O(h)$
	$O(h^2)$ $O(h^2)$	$O(h^2)$ $O(h^2)$
2	$O(h^4)$	$\geq O(h^3)$
	$O(h^4)$ $O(h^4)$ $O(h^4)$	$O(h^3)$ $O(h^4)$ $O(h^4)$

Figura 12.13 Muestreo óptimo y número mínimo de puntos de integración para algunos elementos C_0.

representación de las tensiones de cortante medias correctas.

Mejoras similares se pueden mostrar en el contexto de otros elementos y problemas, aunque (afortunadamente) las discrepancias no son siempre tan grandes.

El ejemplo mencionado sugiere que en los elementos C_0 cuadráticos, sean bi- o tri-dimensionales, las tensiones (o magnitudes similares) ***nunca deben ser calculadas en los nodos.*** Si se desean valores nodales, entonces debe hacerse una proyección o una simple extrapolación bilineal a partir de los valores en los puntos de Gauss. Tales valores son también excelentes, como



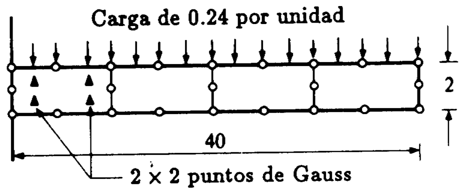


Figura 12.14 Viga en voladizo con cuatro elementos cuadriláteros (Q8). Muestreo de tensiones en los puntos de Gauss de orden cúbico en (2 × 2) con extrapolación a los nodos.

se muestra en la Figura 12.14. Más ejemplos de tales extrapolaciones se dan en Hinton y Campbell[34]. Hinton *et al.*[41] y Barlow[39] presentan un algoritmo de extrapolación muy simple para estos problemas.

Demostración del Teorema

La variación de Π definida en la Ec. (12.73) es, para $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ (la solución exacta),

$$\delta\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathbf{S}\delta\mathbf{u})^T\mathbf{A}\mathbf{S}\bar{\mathbf{u}}\,d\Omega + \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathbf{S}\bar{\mathbf{u}})^T\mathbf{A}\mathbf{S}\delta\mathbf{u}\,d\Omega + \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{p}\,d\Omega = 0$$

o, si $\mathbf{A}$ es simetrica,

$$\delta\Pi = \int_\Omega (\mathbf{S}\delta\mathbf{u})^T\mathbf{A}\mathbf{S}\bar{\mathbf{u}}\,d\Omega + \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{p}\,d\Omega = 0$$

donde $\delta\mathbf{u}$ es una variación arbitraria. Entonces se puede escribir

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

y

$$\int_\Omega (\mathbf{S}\mathbf{u})^T\mathbf{A}\mathbf{S}\bar{\mathbf{u}}\,d\Omega + \int_\Omega \mathbf{u}^T\mathbf{p}\,d\Omega = 0$$

Restando la anterior de la Ec. (12.73) y notando la simetría de la matriz $\mathbf{A}$, se puede escribir

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega [\mathbf{S}(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})]^T\mathbf{A}\mathbf{S}(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})\,d\Omega - \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathbf{S}\bar{\mathbf{u}})^T\mathbf{A}\mathbf{S}\bar{\mathbf{u}}\,d\Omega$$

donde el último término no está sujeto a variación. Por tanto,

$$\Pi^* = \Pi + \mathit{constante}$$

y su estacionariedad es equivalente a la estacionariedad de Π.

12.7 Integración reducida y selectiva y su equivalencia con problemas mixtos penalizados

En el Capítulo 8 se han mencionado las reglas de integración numérica más bajas que preservan el orden de convergencia necesario para varios elementos, pero al mismo tiempo se ha apuntado la posiblidad de singularidad en las matrices elementales resultantes. En el Capítulo 11 nos referimos de nuevo a tales reglas de integración de bajo orden, introduciendo el nombre de "integración reducida" para aquellas que no evalúan la rigidez exactamente para elementos simples y apuntamos algunos peligros de su uso indiscriminado debido a la inestabilidad resultante. A pesar de todo, dichas integraciones reducida y selectiva (donde la aproximación de bajo orden sólo se aplica a ciertas partes de la matriz) han demostrado su valía en la práctica, dando a menudo resultados mucho más precisos que usando reglas de integración de mayor orden. Esto es particularmente notable en elasticidad cuasi-incompresible (o en flujo de Stokes, que es similar[42–44]) y en problemas de flexión de placas y láminas tratados como un caso de sólido degenerado[45,46].

El éxito de estos procedimientos, derivados en principio a través de razonamientos heurísticos, resultó bastante espectacular — ¡aunque había quién pretendía, rayando en la inmoralidad, obtener mejores resultados haciendo menos trabajo!—. Obviamente se buscó una justiciación completa de estos métodos[47] y una de las razones obvias es que frecuentemente las fórmulas de integración reducida se aplican precisamente en los mismos puntos que se han identificado en la sección anterior como óptimos. Sin embargo, la principal razón del éxito no es esa, sino que está asociada con el hecho de proporcionar la necesaria singularidad a la parte de la matriz que actúa como restricción [viz. Ecs. (12.18) a (12.20)], lo que evita el bloqueo. Tal singularidad puede ser deducida del recuento de puntos de integración,[47,48] pero es más sencillo demostrar que existe una completa equivalencia entre los procedimientos de integración reducida (o selectiva) y la formulación mixta ya descrita. Esta equivalencia fue demostrada por primera vez por Malkus y Hughes[49] y después por Zienkiewicz y Nakazawa[50] en un contexto general.

Se demuestra aquí dicha equivalencia para el problema de elasticidad cuasi-incompresible, para el cual la forma integral débil mixta viene dada por las Ecs. (12.44) y (12.45).

La forma irreducible correspondiente se puede escribir satisfaciendo la segunda de estas ecuaciones exactamente, imponiendo

$$p = K\mathbf{m}^T\boldsymbol{\varepsilon} \tag{12.75}$$

y sustituyendo ésta en (12.44) se tiene

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T G(\mathbf{D}^0 - \tfrac{2}{3}\mathbf{m}\mathbf{m}^T)\boldsymbol{\varepsilon}\,d\Omega + \int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{m}K\mathbf{m}^T\boldsymbol{\varepsilon}\,d\Omega - \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\,d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T\bar{\mathbf{t}}\,d\Gamma = 0 \tag{12.76}$$

Tras sustituir

$$\mathbf{u} \cong \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_u\bar{\mathbf{u}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\varepsilon} \approx \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{S}\mathbf{N}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \tag{12.77}$$

se tiene

$$(\mathbf{A} + \bar{\mathbf{A}})\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_1 \tag{12.78}$$

donde $\mathbf{A}$ y $\mathbf{f}_1$ son exactamente los de la Ec. (12.48), y

$$\bar{\mathbf{A}} = \int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{m}K\mathbf{m}^T\mathbf{B}\,d\Omega \tag{12.79}$$

La solución de la Ec. (12.78) en $\bar{\mathbf{u}}$ permite determinar la presión en todos los puntos usando la Ec. (12.75). En particular, si se ha usado un esquema de integración para evaluar (12.79) que muestree en puntos (ξ), se puede escribir

$$p(\xi) = K\mathbf{m}^T\boldsymbol{\varepsilon}(\xi) = K\mathbf{m}^T\mathbf{B}(\xi)\bar{\mathbf{u}} \tag{12.80}$$

Volvamos ahora nuestra atención a la forma mixta penalizada de las Ecs. (12.44) a (12.48) y recordemos que la segunda de las ecuaciones (12.47) es explícitamente

$$\int_\Omega \mathbf{N}_p^T\left(\mathbf{m}^T\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{N}_p\bar{\mathbf{p}}}{K}\right)d\Omega = 0 \tag{12.81}$$

Si se aplica a la anterior integración númerica, con muestreo en los nodos de presión situados en las coordenadas (ξ), previamente definidas en la Ec. (12.80), se puede escribir para cada componente escalar de $\mathbf{N}_p$

$$\sum \mathbf{N}_{p_j}(\xi)\left(\mathbf{m}^T\mathbf{B}(\xi)\bar{\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{N}_p(\xi)\bar{\mathbf{p}}}{K}\right) W_\xi = 0 \qquad (12.82)$$

donde el sumatorio es sobre todos los puntos de integración (ξ) y donde W_ξ son las funciones de peso y determinantes jacobianos adecuados.

Pero como

$$N_{p_j}(\xi) = 1$$

si ξ está en el nodo j y cero en los otros nodos, la Ec. (12.82) se reduce simplemente al requisito de que en todos los nodos de presión

$$\mathbf{m}^T\mathbf{B}(\xi)\bar{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{N}_p(\xi)\bar{\mathbf{p}}}{K} \qquad (12.83)$$

Esta es precisamente la misma condición que la de la Ec. (12.80), y queda probada la equivalencia entre ambos procedimientos, *siempre que el esquema de integración usado para evaluar* $\bar{\mathbf{A}}$ *permita la integración exacta de la forma mixta de la Ec. (12.81).*

Esto se cumple en la mayoría de los casos y entonces la equivalencia integración reducida–forma mixta es exacta. En los demás casos, la equivalencia existe para un problema mixto en el que se usa una regla de integración inexacta para evaluar ecuaciones tales como la (12.81).

Para elementos isoparamétricos curvos la equivalencia es de hecho inexacta, y se pueden obtener resultados ligeramente distintos usando integración reducida y formas mixtas. Esto queda ilustrado en ejemplos de la referencia 51.

Se puede concluir, sin demostración detallada, que este tipo de equivalencia es bastante general, y que con cualquier problema similar la aplicación de una cuadratura númerica de n_p puntos para evaluar la matriz $\bar{\mathbf{A}}$ de cada elemento es equivalente a un problema mixto en el que la variable p se interpola elemento a elemento tomando como valores nodales los mismo puntos de integración.

La equivalencia sólo es completa para el procedimiento de integración selectiva, esto es, aplicación de la cuadratura numérica solo a la matriz $\bar{\mathbf{A}}$, y asegura que esta matriz sea singular, osea, no habrá bloqueo si se satisfacen las condiciones previamente mencionadas ($n_u > n_p$).

El uso de integración reducida en el resto de la matriz que determina $\mathbf{u}$, i.e., $\mathbf{A}$, sólo es permisible si ésta resulta no singular, como es el caso que se ha mencionado anteriormente del elemento Q 8/4.

Se puede, por tanto, concluir que todos los elementos con interpolación discontinua de p que se han verificado como aplicables al problema mixto (viz. Figura 12.7, por ejemplo) pueden ser implementados para situaciones cuasi-incompresibles con una forma irreducible penalizada y usando la integración selectiva correspondiente.†

En la Figura 12.15 se muestra un ejemplo que indica claramente la mejoría en desplazamientos que se consigue con la integración reducida a medida que el módulo de compresibilidad K crece (o el coeficiente de Poisson tiende a 0.5). Nótese también en este ejemplo la validez con una mejora espectacular de tales puntos para el muestreo de tensiones.

En problemas en los que la variable (de restricción) p se interpole continuamente (C_0) los razonamientos anteriores fallan, ya que cantidades como $\mathbf{m}^T\boldsymbol{\varepsilon}$ no son continuas entre elementos en la forma irreducible.

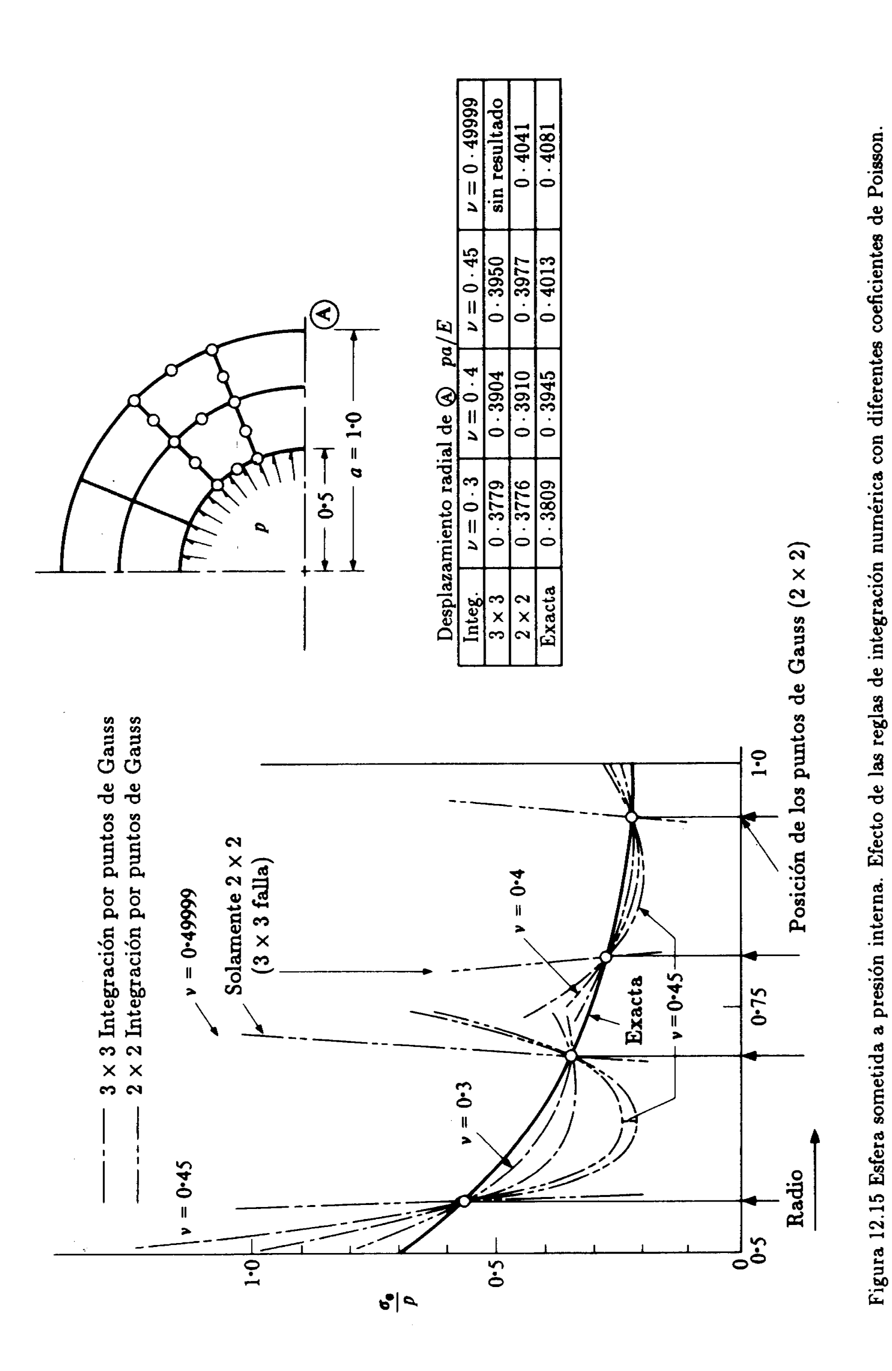
Un corolario muy interesante de la equivalencia demostrada para comportamiento cuasi-incompresible se obtiene notando el rápido crecimiento del orden de las fórmulas de integración con el número de puntos en la cuadratura (viz. Capitulo 8). *Para elementos de alto orden el número de puntos de cuadratura equivalente a la variable de restricción p admisible por estabilidad alcanza rápidamente la requerida para integración exacta, y por tanto su actuación en situaciones cuasi-incompresibles es excelente, incluso si se usa integración exacta.* Esto ha sido observado en muchas ocasiones[52–54] y Sloan y Randolph[55] han demostrado el buen comportamiento del triangulo quíntico. Desafortunadamente los elementos de alto orden presentan otras dificultades, y son poco usados en la práctica.

Un comentario final sobre el uso de la integración "reducida" en particular, y de los métodos penalizados y mixtos en general. Como ya se ha señalado en la Sección 12.3.1 es posible para tales formas obtener resultados adecuados para la *variable primaria* ($\mathbf{u}$ en este ejemplo), incluso si las condiciones generales de estabilidad no se cumplen, siempre que algunas de las *ecuaciones de restricción* sean linealmente dependientes.

Esta situación se da en algunos elementos que se utilizan a veces para la solución de problemas incompresibles, pero que no pasan el test de la parcela, tales como el Q 8/4 y Q 9/4 de la Figura 12.7. Si tomamos el último número como correspondiente a los puntos de integración, estos darán campos $\mathbf{u}$ aceptables, pero no p.

La Figura 12.16 ilustra el caso en un ejemplo que corresponde a flujo viscoso lento a través de un orificio, un problema que obedece ecuaciones idénticas a las de la elasticidad incompresible. Se comparan los elementos Q 8/4, Q 8/3, Q 9/4 y Q 9/3 aunque sólo el último satisface completamente los requisitos de estabilidad. Todos los elementos proporcionan un campo de velocidades ($\mathbf{u}$) razonable, pero las presiones sólo son aceptables para el último, mientras que el elemento Q 8/4 no da siquiera resultados que se puedan dibujar.[2]

† El elemento Q 9/3 requerirá una cuadratura de tres puntos, lo cual es poco natural para cuadriláteros. Por lo tanto, es mejor utilizar simplemente la forma mixta.



Desplazamiento radial de Ⓐ pa/E

Integ.	$\nu = 0\cdot3$	$\nu = 0\cdot4$	$\nu = 0\cdot45$	$\nu = 0\cdot49999$
3 × 3	0·3779	0·3904	0·3950	sin resultado
2 × 2	0·3776	0·3910	0·3977	0·4041
Exacta	0·3809	0·3945	0·4013	0·4081

Figura 12.15 Esfera sometida a presión interna. Efecto de las reglas de integración numérica con diferentes coeficientes de Poisson.

Orificio

(*a*) Malla de elementos rectangulares

(*b*) Variación de presión, elemento Q 8/3

(*c*) Variación de presión, elemento Q 9/4

(*d*) Variación de presión, elemento Q 9/3

(*e*) Velocidades axiales, elementos Q 8/3, Q 9/4, Q 9/3

(*f*) Velocidades radiales, elementos Q 8/3, Q 9/4, Q 9/3

(*g*) Velocidades axiales, elemento Q 8/4

(*h*) Velocidades radiales, elemento Q 8/4

Figura 12.16 Estado estacionario del flujo a través de un orificio a bajo número de Reynolds. Nótese que la variación de la presión para el elemento Q 8/4 es tan grande que no puede ser dibujada. Solución con los elementos $\mathbf{u}/p$ Q 8/3, Q 8/4, Q 9/3 y Q 9/4.

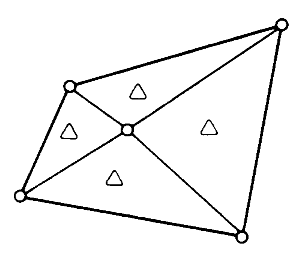


Figura 12.17 Un cuadrilatero en el que las diagonales forman un ensamblaje de cuatro elementos T 3/1. Esto permite que los desplazamientos se puedan calcular en situaciones cuasi-incompresibles, pero no da resultados para presiones.

Es interesante señalar de pasada que se da una situación parecida si se ensamblan cuatro triángulos T 3/1 para formar un cuadrilátero de la forma mostrada en la Figura 12.17. Aunque el elemento original sufre bloqueo, como se ha mostrado previamente, una dependencia lineal de la ecuación de restricción permite usar el ensamblaje de forma bastante efectiva en muchas situaciones incompresibles, como se muestra en la referencia.[53]

12.8 Un procedimiento simple de resolución para problemas mixtos

12.8.1. *Generalidades.* En los comentarios sobre la solución algebraica de problemas mixtos caracterizados por ecuaciones del tipo [viz. Ec. (12.13)]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} \tag{12.84}$$

se han señalado las dificultades asociadas a las diagonales con ceros y el aumento del número de incógnitas $(n_x + n_y)$ comparado con el de la forma irreducible (n_x). Sin embargo, es posible una forma general de solución iterativa que reduce sustancialmente el coste.[56] Se resuelve sucesivamente

$$\mathbf{y}^{n+1} = \mathbf{y}^n + \boldsymbol{\rho}\mathbf{r}^n \tag{12.85}$$

donde $\mathbf{r}^n$ es el residuo de la segunda ecuación, calculado como

$$\mathbf{r}^n = \mathbf{C}^T\mathbf{x}^n - \mathbf{f}_2 \tag{12.86}$$

y se sigue con la solución de la primera ecuación, esto es,

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{f}_1 - \mathbf{C}\mathbf{y}^{n+1}) \tag{12.87}$$

En lo anterior $\boldsymbol{\rho}_n$ es una "matriz de aceleración de convergencia", escogida para ser eficiente y fácil de usar.

El algoritmo es similar al descrito inicialmente por Uzawa[57] y ha sido ampliamente aplicado con el contexto de la optimización.[58-62]

Su relativa simplicidad puede ser mejor comprendida al considerar ejemplos concretos.

12.8.2 *Solución iterativa para elasticidad incompresible.* En este caso se empieza por la Ec. (12.47), escrita ahora con $\mathbf{V}$=0, esto es, suponiendo incompresibilidad completa. Las diferentes matrices quedan definidas en (12.48), y resulta la forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \tag{12.88}$$

Sin embargo, la matriz $\mathbf{A}$ es singular (dado que las variaciones de volumen no están restringidas) y es necesario "aumentarla" para hacerla no singular. Se puede conseguir esto de la forma descrita en la nota al pie de la Sección 12.3, o de forma más conveniente mediante la adición de una matriz ficticia de compresibilidad, reemplazando $\mathbf{A}$ por

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \int_\Omega \mathbf{B}^T(\lambda G \mathbf{m}\mathbf{m}^T)\mathbf{B}\, d\Omega \tag{12.89}$$

Si en la segunda matriz se usa una integración consistente con el número de parámetros de presión discontinua supuestos, entonces es precisamente equivalente a escribir

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \lambda G \mathbf{C}\mathbf{C}^T \tag{12.90}$$

que es más facil de evaluar. Claramente, esta adición no modifica el sistema de ecuaciones. La iteración del algoritmo (12.85) a (12.87) se puede adoptar con el "acelerador de convergencia" definido simplemente como

$$\boldsymbol{\rho} = \lambda G \mathbf{I} \tag{12.91}$$

Se tiene ahora un sistema iterativo dado por

$$\bar{\mathbf{p}}^{n+1} = \bar{\mathbf{p}}^n + \boldsymbol{\rho}\mathbf{r}^n \tag{12.92a}$$

$$\mathbf{r}^n = \mathbf{C}^T\bar{\mathbf{u}}^n \quad \text{(el residuo de la restricción de incompresibilidad)} \tag{12.92b}$$

y

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{f}_1 - \mathbf{C}\bar{\mathbf{p}}^{n+1}) \tag{12.92c}$$

Aquí $\bar{\mathbf{A}}$ se puede interpretar como la matriz de rigidez de un material compresible con un módulo volumétrico

$$K = \lambda G$$

y el proceso de iteración como la adición sucesiva de deformaciones volumétricas "iniciales" diseñadas para reducir la deformación volumétrica a cero. De hecho, este planteamiento simple llevó en un principio a la proposición de este algoritmo.[63–65] Alternativamente el proceso puede visualizarse como una modificación de la ecuación original (12.88) al restarle el término $\mathbf{p}/\rho$ a cada lado de la segunda ecuación para dar (esto se denomina a menudo forma lagrangiana aumentada)[56,62]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & -\mathbf{I}/\rho \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ -\bar{\mathbf{p}}/\rho \end{Bmatrix} \tag{12.93}$$

y adoptando el proceso iterativo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & -\mathbf{I}/\rho \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{Bmatrix}^{n+1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ -\bar{\mathbf{p}}^n/\rho \end{Bmatrix} \tag{12.94}$$

Con esto, se obtiene una secuencia similar a la Ec. (12.92) siempre que $\bar{\mathbf{A}}$ se defina según la Ec. (12.90).

Empezando la iteración con

$$\mathbf{u}^0 = 0 \qquad \text{y} \qquad \bar{\mathbf{p}}^0 = 0$$

en la Figura 12.18 se muestra la convergencia de la máxima divergencia de $\mathbf{u}$ calculada en los puntos de integación usados. Nótese que esta convergencia es bastante rápida para valores grandes de $\lambda = (10^3 \text{ a } 10^4)$.

Para valores más pequeños de λ el proceso puede acelerarse[56] utilizando distintos valores para ρ, pero a efectos prácticos el algoritmo simple basta. Claramente, ahora se puede conseguir una mucho mejor satisfación de la restricción de incompresibilidad que por el simple uso de un módulo volumétrico (o parámetro de penalización) "suficientemente grande". Con $\lambda = 10^4$, por ejemplo, en cinco iteraciones la divergencia inicial de $\mathbf{u}$ se reduce del valor $\sim 10^{-4}$ a 10^{-16}, lo cual está en el límite de precisión del ordenador utilizado.

El lector debe notar que el proceso de iteración a menudo permite utilizar precisión simple en un problema que de otro modo requeriría operar en doble precisión.

12.8.3 *Solución iterativa para la formulación mixta* $\bar{\mathbf{u}}-\bar{\boldsymbol{\sigma}}-\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$. En este ejemplo se muestra como el procedimiento de solución mixta puede ser utilizado para mejorar los resultados de una formulación irreducible en desplazamientos.

Comencemos con la Ec. (12.34) en la que suponemos que funciones de forma C^0-continuas idénticas aproximan todas las variables.

Se tiene por tanto, suponiendo funciones de forma "estándar",

$$\mathbf{N}_u = \mathbf{N}_\sigma = \mathbf{N}_\varepsilon = \mathbf{N} \tag{12.95}$$

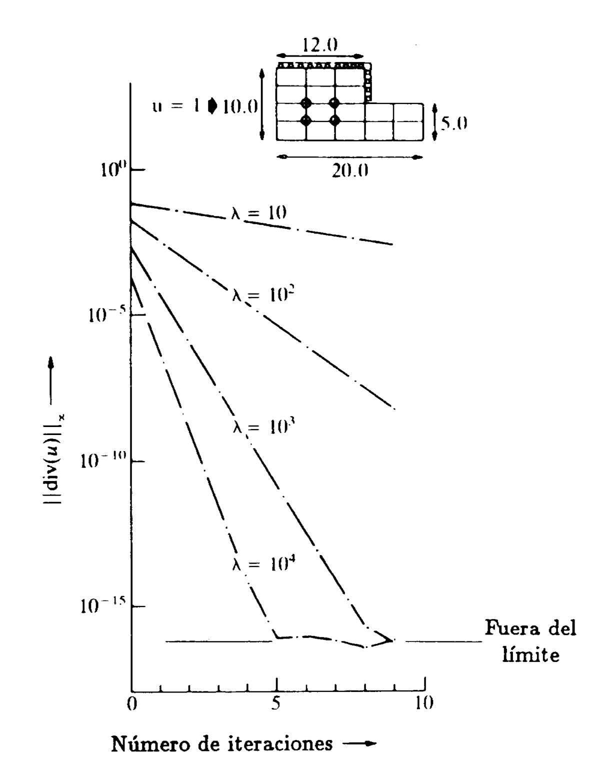


Figura 12.18 Convergencia iterativa en un problema de extrusión para diferentes valores del coeficiente de penalización $\lambda = \gamma/\mu$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{E} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}^T & \mathbf{O} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_3 \end{Bmatrix} \tag{12.96}$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{D}\mathbf{N}\, d\Omega \\ \mathbf{C} &= -\int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{N}\, d\Omega = \mathbf{C}^T \\ \mathbf{E} &= \int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{B}\, d\Omega \end{aligned} \tag{12.97}$$

donde $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ y $\bar{\mathbf{u}}$ definen los parámetros nodales.

Además, supondremos que la segunda ecuación que da la ley constitutiva se evalúa utilizando una "cuadratura nodal" y, por tanto, lleva simplemente

a especificar la ley constitutiva en dichos nodos,

$$(\bar{\sigma})_i = (\mathbf{D}\bar{\varepsilon})_i \tag{12.98}$$

El proceso iterativo comienza, como en el caso general de la Ec. (12.84), por la variable de restricción y, como se sabe que se pueden obtener buenas soluciones con la forma estándar, se puede especificar

$$\rho = \mathbf{K}^{-1} \equiv \left(\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\, d\Omega\right)^{-1} \tag{12.99}$$

El proceso iterativo resulta

$$\bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{r}^n \tag{12.100a}$$

con

$$\mathbf{r}^n = \mathbf{E}^T\bar{\sigma}^n - \mathbf{f}_3 \tag{12.100b}$$

$$\bar{\varepsilon}^{n+1} = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{E}\bar{\mathbf{u}}^{n+1} \tag{12.100c}$$

$$(\bar{\sigma}^{n+1})_i = (\mathbf{D}\bar{\varepsilon}^{n+1})_i \tag{12.100d}$$

Empezando con $\bar{\sigma}^0 = \bar{\varepsilon}^0 = \bar{\mathbf{u}}^0 = 0$ se nota inmediatamente que el primer cálculo de $\mathbf{u}^1$ es simplemente la solución estándar en desplazamientos.

El segundo paso del cálculo es precisamente el alisado de las deformaciones discontinuas $\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}^1$ para obtener valores nodalmente continuos. Las operaciones son idénticas a las de la Sección 12.6.1 y de nuevo se puede conseguir un ahorro en el coste computacional aglutinando (diagonalizando) la matriz $\mathbf{C}$ y usando las iteraciones de la Ec. (12.70).

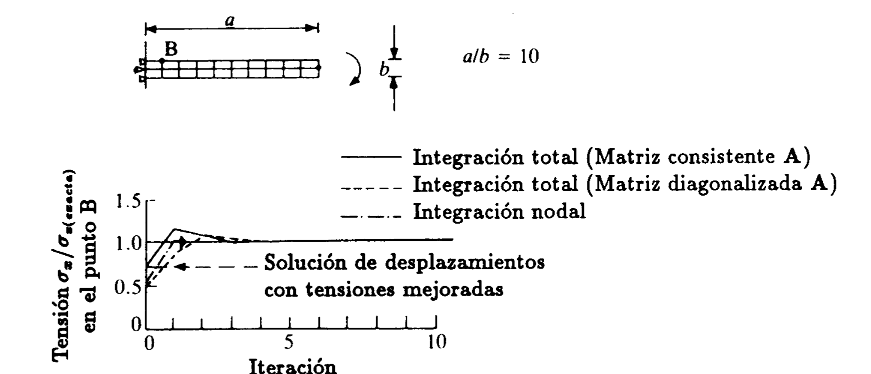
De forma alternativa, a menudo se pueden conseguir excelentes resultados evaluando $\mathbf{C}$ y $\mathbf{E}\bar{\mathbf{u}}^{n+1}$ mediante una cuadratura nodal y prescindir del proceso iterativo.[56,66–68]

En las Figuras 12.19 y 12.20 se muestran algunos ejemplos que ilustran la considerable mejora de resultados obtenible por este procedimiento mixto. El coste de la solución no es mucho mayor que el de la forma irreducible, y la convergencia es rápida. El proceso es similar al propuesto por Cantin *et al.*[69,70] como una *mejora iterativa* de la solución estándar irreducible, en desplazamientos.

La secuencia puede identificarse simplemente como:

a) alisado de tensiones y deformaciones a la forma continua (mediante el procedimiento de promediado), y
b) ajustar la solución en desplazamientos para equilibrar las fuerzas residuales creadas por el alisado.

Si se interpreta de esta manera se nota que de hecho no es necesario proseguir hasta la convergencia completa del método mixto. *Cada*



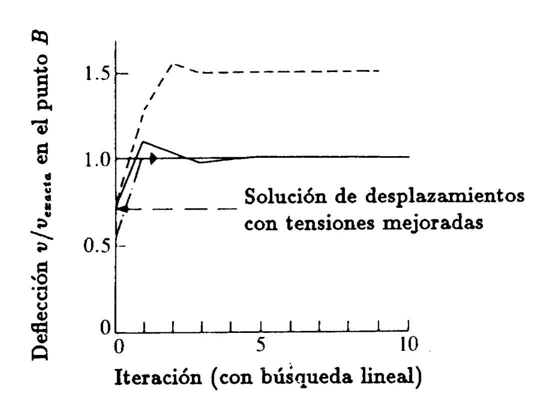


Figura 12.19 Solución iterativa de la formulación mixta $\sigma - \mathbf{u}$ para una viga. $\mathbf{u}$ y σ bilineales.

solución con un número fijo de iteraciones es una aproximación aceptable, normalmente de mejor calidad que la solución pura en desplazamientos.

Es importante acentuar una vez más que no debe imponerse la continuidad de deformaciones/tensiones en las singularidades o en cambios abruptos de material. Si se hace esto la solución mixta puede empeorar los resultados del método en desplazamientos.

El proceso de iteración es una adición a los programas "estándar" en desplazamientos para mejorar la precisión y que merece la pena realizar.

12.9 Formas complementarias con restricción directa

12.9.1 *Formas Generales.* En la introducción a este capítulo se definieron las formas irreducibles y mixtas y se indicó que en ocasiones es posible

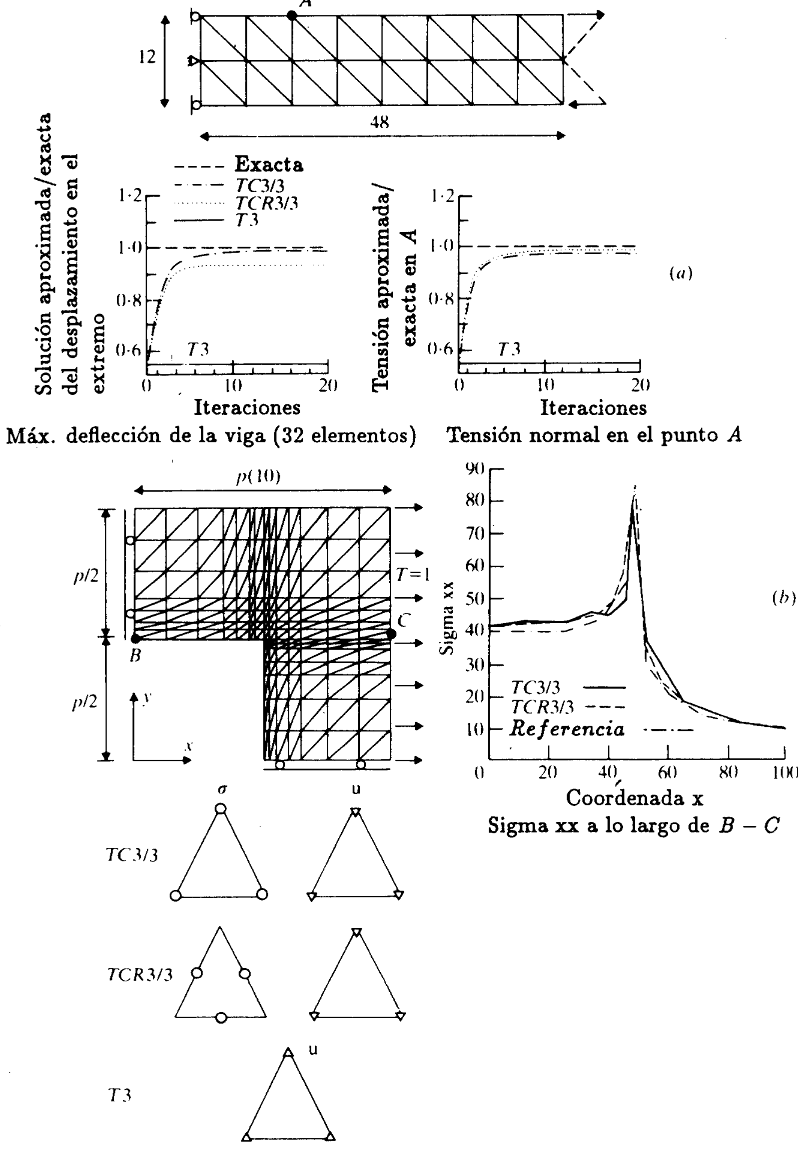


Figura 12.20 Solución iterativa para la formulación mixta $\boldsymbol{\sigma}/\mathbf{u}$ usando dos formas del elemento triangular TC 3/3 y TCR 3/3. (*a*) Una viga mostrando convergencia con las iteraciones. (*b*) Un dominio con forma de L mostrando los resultados mejorados en la distribución de tensiones cuando se impone la no continuidad de la tensión en la singularidad (elemento TCR 3/3)

obtener más de una forma "irreducible". Para ilustrar esto en el problema de transmisión del calor dado por las Ecs. (12.2) y (12.3) se introdujo la función de penalización α en la Ec. (12.6) y se obtuvo la correspondiente ecuación de gobierno (12.7) en función de q. Esta función de penalización no tiene un sentido físico obvio y se usa simplemente para obtener una aproximación "suficientemente cercana" a la satisfación de las ecuaciones de continuidad de flujo. Su papel es exactamente el mismo que la penalización con significado físico, que se introdujo en el problema incompresible y que permitió justificar los métodos de *integración selectiva*. En el contexto de la elasticidad se usó una función de penalización similar para resolver el problema $\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{u}$ de la Sección 12.4.2, para eliminar $\mathbf{u}$ y operar solamente con las tensiones como variables del problema[4]. En este caso la integración selectiva fue esencial, tal como se indicó en la Sección 12.7.

A veces es posible resolver el problema como irreducible suponiendo *a priori* que la elección de las variables satisface una de las ecuaciones. Se llama a tales formas *directamente restringidas* y obviamente la elección de las funciones de forma es difícil.

Consideraremos dos ejemplos.

El problema complementario de transmisión del calor. Aquí supondremos *a priori* que la elección de $\mathbf{q}$ es tal que satisface la Ec. (12.3) y las condiciones de contorno naturales

$$\boldsymbol{\nabla}^T\mathbf{q} = Q \quad \text{en} \quad \Omega \qquad \text{y} \qquad q_n = \bar{q} \quad \text{en} \quad \Gamma_q \tag{12.101}$$

Por tanto, sólo queda por sastisfacer la relación constitutiva (12.2), esto es,

$$\mathbf{k}^{-1}\mathbf{q} + \boldsymbol{\nabla}\phi = \mathbf{0} \quad \text{en} \quad \Omega \qquad \text{con} \quad \phi = \bar{\phi} \quad \text{en} \quad \Gamma_\phi \tag{12.102}$$

Una forma débil de lo anterior es

$$\int_\Omega \delta\mathbf{q}^T(\mathbf{k}^{-1}\mathbf{q} + \boldsymbol{\nabla}\phi)\, d\Omega - \int_{\Gamma_\phi} \delta q_n(\phi - \bar{\phi})\, d\Gamma = 0 \tag{12.103}$$

en la que δq_n representa la variación del flujo normal en el contorno.

Usando el Teorema de Green se transforma lo anterior en

$$\int_\Omega \delta\mathbf{q}^T\mathbf{k}^{-1}\mathbf{q}\, d\Omega - \int_\Omega \boldsymbol{\nabla}^T\delta\mathbf{q}\phi\, d\Omega + \int_\Gamma \delta q_n\bar{\phi}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \delta q_n\phi\, d\Gamma = 0 \tag{12.104}$$

Si además se supone que $\boldsymbol{\nabla}^T\delta\mathbf{q} \equiv 0$ en Ω y $\delta q_n = 0$ en Γ_q, esto es, que las funciones de peso son simplemente las variaciones de $\mathbf{q}$ y satisfacen las condiciones de continuidad de la Ec. (12.101), entonces la ecuación se reduce a

$$\int_\Omega \delta\mathbf{q}^T\mathbf{k}^{-1}\mathbf{q}\, d\Omega + \int_{\Gamma_\phi} \delta q_n\bar{\phi}\, d\Gamma = 0 \tag{12.105}$$

Esto es de hecho la variación de un principio de flujo complementario

$$\Pi = \int_\Omega \tfrac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{k}^{-1}\mathbf{q}\, d\Omega + \int_{\Gamma_\phi} q_n\bar{\phi}\, d\Gamma \tag{12.106}$$

Obviamente, se pueden plantear soluciones numéricas a partir de cualquiera de las ecuaciones anteriores, pero la dificultad es la elección de las funciones de prueba que satisfagan las restricciones. Volveremos sobre este problema más adelante.

El principio de la energía elástica complementaria. En el problema elástico descrito en la Sección 12.4 se puede proceder de forma similar, suponiendo campos de tensión que satisfagan las condiciones de equilibrio previo, tanto en el contorno Γ_t como en el dominio Ω.

Así, y de forma análoga al ejemplo previo, se imponen sobre el campo de tensión las restricciones, que suponemos son satisfechas indénticamente por la aproximación, esto es,

$$\mathbf{S}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \qquad \text{y} \qquad \mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en} \quad \Gamma_t \tag{12.107}$$

De esta forma, sólo quedan por satisfacer las relaciones constitutivas y las condiciones de contorno en desplazamientos, osea,

$$\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{S}\mathbf{u} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \qquad \text{y} \qquad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{en} \quad \Gamma_u \tag{12.108}$$

La forma débil de lo anterior se puede escribir

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{S}\mathbf{u})\, d\Omega + \int_{\Gamma_u} \delta\mathbf{t}^T(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\, d\Gamma = 0 \tag{12.109}$$

que al ser integrada usando el teorema de Green da

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\, d\Omega + \int_\Omega (\mathbf{S}^T\delta\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{u}\, d\Omega - \int_{\Gamma_u} \delta\mathbf{t}^T\bar{\mathbf{u}}\, d\Gamma - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{t}^T\mathbf{u}\, d\Gamma = 0 \tag{12.110}$$

De nuevo, suponiendo que las funciones de prueba son variaciones completas que satisfacen la ecuación homogénea de equilibrio, esto es,

$$\mathbf{S}^T\delta\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \qquad \text{y} \qquad \delta\mathbf{t} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_t \tag{12.111}$$

queda la forma débil

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\, d\Omega - \int_{\Gamma_u} \delta\mathbf{t}^T\bar{\mathbf{u}}\, d\Gamma = 0 \tag{12.112}$$

El correspondiente principio variacional de la energía complementaria es

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\, d\Omega - \int_{\Gamma_u} \mathbf{t}^T\bar{\mathbf{u}}\, d\Gamma \tag{12.113}$$

De cara al uso práctico, de nuevo surgen las dificultades asociadas con la selección de las funciones de aproximación, pero en ocasiones es posible elegirlas directamente.[70]

12.9.2 *Solución usando funciones auxiliares.* Las dos formas complementarias pueden ser resueltas usando funciones auxiliares para asegurar la satisfacción de las restricciones. En el *problema de transmisión del calor* es fácil verificar que la ecuación homogénea

$$\boldsymbol{\nabla}^T\mathbf{q} \equiv \frac{\partial}{\partial x}q_x + \frac{\partial}{\partial y}q_y = 0 \tag{12.114}$$

queda automáticamente sastisfecha definiendo una función ψ tal que

$$q_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad q_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{12.115}$$

Por tanto, si se define

$$\mathbf{q} = \mathbf{L}\psi + \mathbf{q}_0 \qquad \text{y} \qquad \delta\mathbf{q} = \mathbf{L}\delta\psi \tag{12.116}$$

donde $\mathbf{q}_0$ es cualquier flujo elegido de forma que

$$\boldsymbol{\nabla}^T\mathbf{q}_0 = Q \tag{12.117}$$

y

$$\mathbf{L}^T = \left[\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right] \tag{12.118}$$

la formulación de las Ecs. (12.105) y (12.106) puede ser usada sin ninguna restricción y, por ejemplo, la estacionariedad de

$$\Pi = \int_\Omega \tfrac{1}{2}(\mathbf{L}\psi + \mathbf{q}_0)^T\mathbf{k}^{-1}(\mathbf{L}\psi + \mathbf{q}_0)\, d\Omega - \int_{\Gamma_\phi} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^T \bar{\phi}\, d\Gamma \tag{12.119}$$

bastará para formular el problema (aquí t es la dirección tangente al contorno).

La forma anterior requerirá funciones de forma para ψ que sean C_0-continuas.

En el correspondiente problema de elasticidad se puede obtener una forma similar bi-dimensional mediante el uso de las llamadas funciones de tensión de Airy ψ.[71] Ahora las ecuaciones de equilibrio

$$\mathbf{S}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\sigma_x + \dfrac{\partial}{\partial y}\tau_{xy} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\sigma_y + \dfrac{\partial}{\partial x}\tau_{xy} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix} = 0 \tag{12.120}$$

se resuelven de forma idéntica eligiendo

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L}\psi + \boldsymbol{\sigma}_0 \tag{12.121}$$

donde

$$\mathbf{L}^T = \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right] \tag{12.122}$$

y $\boldsymbol{\sigma}_0$ es una tensión arbitraria de modo que

$$\mathbf{S}^T\boldsymbol{\sigma}_0 + \mathbf{b} = 0 \tag{12.123}$$

De nuevo la sustitución de (12.121) en la forma débil (12.112) o en el principio varicional complementario (12.113) produce una formulación directa en la que no se necesita añadir restricciones adicionales.

El uso de esta función bi-dimensional de tensión en un problema plano por primera vez se debe a De Veubeke y Zienkiewicz[72] y Elias,[73] pero el lector debe notar que ahora, con la aparición de operadores de segundo orden, se precisa continuidad C_1 en las funciones de forma, de manera similar a los problemas que se consideran en flexión de placas (viz. Vol. 2).

Incidentalmente, las analogías con la flexión de placas van más allá y de hecho se puede probar que algunas de éstas pueden ser útiles en otros problemas[74].

12.10 Comentarios finales - la formulación mixta o una prueba de la "robustez" de un elemento

La forma mixta de la formulación de elementos finitos descrita en este capítulo abre un nuevo campo de posibilidades, algunas potencialmente de mayor precisión que la que ofrecen las formas irreducibles. Además, permite el tratamiento directo de problemas con restricciones sin la introducción de formas penalizadas. Es típico en este contexto el desarrollo de aproximaciones directas para elasticidad incompresible.

Sin embargo, una ventaja adicional aparece incluso en situaciones donde, según el *principio de limitación*, las formas irreducible y mixta dan resultados idénticos. Aquí el estudio del comportamiento de la forma mixta frecuentemente puede revelar debilidades o falta de "robustez" en la forma irreducible que de otra forma serían difíciles de determinar. Para ilustrar esto se puede considerar el caso de elasticidad compresible, que siempre se puede formular como una forma mixta (viz. Sección 12.5.1) o una forma irreducible equivalente en la que la variación de la presión sea idéntica.

Esta equivalencia en el caso de un triángulo lineal (que se ha usado en los primeros capítulos del libro), o el tetraedro lineal, inmediatamente revela por qué tales elementos "no son robustos" cuando la comprensibilidad es

pequeña (o en elasticidad isótropa cuando el coeficiente de Poisson tiende a 0.5). La razón es claramente la forma inadmisible de tales elementos cuando la compresibilidad tiene un valor límite nulo.

Mediante el mismo argumento se puede justificar el uso de integración "reducida" (selectiva) en elementos cuadráticos.

Dicho estudio de casos "límite" a menudo arroja luz sobre lo que pudiera parecer un comportamiento misterioso de un elemento. La aproximación mixta debidamente entendida expande el potencial del método de los elementos finitos y presenta posibilidades casi ilimitadas de introducir mejoras en detalle. Algunas de éstas serán discutidas en el próximo capítulo y otras en el Vol. 2. Crisfield[75] da una interesante visión de conjunto sobre este tema.

Referencias

1. S.N. ATLURI, R.H. GALLAGHER, y O.C. ZIENKIEWICZ (eds), *Hybrid and Mixed Element Methods*, Wiley, 1983.
2. O.C. ZIENKIEWICZ, R.L. TAYLOR, and J.A. BAYNHAM, "Mixed and irreducible formulations in finite element analysis", Capítulo 21 de *Hybrid and Mixed Element Methods* (eds S. N. Atluri, R. H.Gallaguer, y O. C. Zienkiewicz), pp. 405-31, Wiley, 1983.
3. I. BABUSKA y J.E.OSBORN, "Generalized finite element methods and their relations to mixed problems", *SIAM J. Num. Anal.*, **20**, 510-36, 1983.
4. R.L. TAYLOR y O.C. ZIENKIEWICZ, "Complementary energy with penalty function in finite element analysis", Capítulo 8 de *Energy Methods in Finite Element Analysis* (eds R.Glowinski, E.Y. Rodin, y O.C. Zienckiewicz), Wiley, 1979.
5. K. WASHIZU, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 2nd ed., Pergamon Press, 1975.
6. L.R. HERRMANN, "Finite element bending analysis of plates", *Proc. 1st Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*, AFFDL-TR-80, Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1965.
7. K. HELLAN, "Analysis of plates in flexure by a simplified finite element method", *Acta Polytechnica Scandinavia*, Civ. Eng. Series 46, Trondheim, 1967.
8. R.S. DUNHAM y K.S. PISTER, "A finite element application of the Hellinger Reissner varitional theorem", *Proc. 1st Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1965.
9. R.L. TAYLOR y O.C. ZIENKIEWICZ, "Mixed finite element solution of fluid flow problems", Capítulo 1 de *Finite Elements in Fluids*, Vol. **4** (eds. R.H. Galagher, D.N. Norrie, J.T. Oden y O.C. Zienkiewicz), pp. 1-20, Wiley, 1982.
10. B. FRAEIJS DE VEUBEKE, "Displacement and equilibrium models in finite element method", Capítulo 9 de *Stress Analysis* (eds. O.C. Zienkiewicz y C.S. Holister), pp. 145-97, Wiley. 1965.
11. I. BABUŠKA, "The finite element method with Lagrange multipliers", *Num. Math.*, **20**, 179-92, 1973; también "Error bounds for finite element methods", *Num. Math.*, **16**, 322-33, 1971.

12. F. BREZZI, "On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from lagrangian multipliers", RAIRO, 8-R2, 129-151. 1974.
13. O.C. ZIENKIEWICZ, S. QU, R.L. TAYLOR, y S. NAKAZAWA, "The patch test for mixed formulation", *Int. J. Num. Meth. Eng*, **23**, 1873-83, 1986.
14. J.T. ODEN, y N. NIKUCHI, "Finite element methods for constrained problems of elasticity", *Num. Meth. Eng.*, **18**, 701-25, 1982.
15. E. HELLINGER, 'Die allgemeine Aussetze der Mechanik der Kontinua", en *Encyclopedia der Matematischen Wissenschaften*, Vol. **4**, (eds. F. Klein y C. Muller), Tebner, Leipzig, 1914.
16. E. REISSNER, "On a variational theorem in elasticity", *J. Math. Phys.*, **29**, 90-5, 1950.
17. L.R. HERRMANN, "Finite element bending analysis of plates", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **94**, EM5, 13-25, 1968.
18. L.R. HERRMANN y D.M. CAMPBELL, "A finite element analysis for thin shells", JAIAA, **6**, 1842-7, 1968.
19. O.C. ZIENKIEWICZ, y D. LEFEBVRE, "Mixed methods for FEM and the patch test. Some recent developments", en *Analyse Mathematique of Aplication* (eds F. Murat y O. Pirenneau), Gauthier Villars, Paris, 1988.
20. O.C. ZIENKIEWICZ y J.M. THOMAS, "A mixed finite element method for second order elliptic problems", *Lect. Notes in Math.*, no. 606, pp. 292-315, Springer Verlag, 1977.
21. D. ARNOLD, F. BREZZI y J. DOUGLAS, "PEERS, a new mixed finite element for plane elasticity", *Japan J. Appl. Math.*, **1**, 347-67, 1984.
22. O.C. ZIENKIEWICZ y E.D. LEFEBVRE, "Three field mixed approximation and the plate bending problem", *Comm. Appl. Num. Math.*, **3**, 301-9, , 1987.
23. T.J.R. HUGHES, "Generalization of selective integration procedures to anisotropic non-linear media", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **15**, 1413-1418, 1980.
24. J.C. SIMO, R.L. TAYLOR y K.S. PISTER, "Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation plasticity", *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, **51**, 177-208, 1985.
25. L.R. HERRMANN, "Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem", *JAIAA*, **3**, 1896-900, 1965.
26. S.W. KEY, "A variational principle for incompressible and nearly incompressible anisotropic elasticity", *Int. J. Solids Struct.*, 1970.
27. M. FORTIN y N.FORTIN, "Newer and newer elements for incompressible flow", Capítulo 7 de *Finite Elements in Fluids*, Vol. 6 (eds. R.H. Gallagher, G.F. Carey, J.T. Oden, y O.C. Zienkiewicz), pp. 171-88, Wiley, 1985.
28. J.T. ODEN, "R.I.P. methods for Stokesian flow", Capítulo 15 de *Finite Elements in Fluids*, Vol. **4** (eds. R.H. Gallagher, D.N. Norrie, J.T. Oden y O.C. Zienkiewicz), pp. 305-18, Wiley, 1982.
29. M. CROUZCIX y P.A. RAVIART, "Conforming and non-conforming finite element methods for solving stationary Stokes equations", RAIRO, 7-R3, 33-76, 1973.
30. D.S. MALKUS, "Eigenproblems associated with the discrete LBB condition for incompressible finite elements", *Int. J. Eng. Sci.*, **19**, 1299-370, 1981.
31. M. FORTIN, "Old and new finite elements for incompressible flow", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **1**, 347-64. 1981.

32. C. TAYLOR y P. HOOD, "A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique", *Computers in Fluids*, **1**, 73-100. 1973.
33. J.T. ODEN y J.N. REDDY, "Note on approximation method for computing consistent conjugate stresses in finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **6**, 55-61, 1973.
34. E. HINTON y J. CAMPBELL, "Local and global smoothing of discontinous finite element function using a least squares method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **8**, 461-80, 1974.
35. O.C. ZIENKIEWICZ y S. NAKAZAWA, "The penalty function method and its aplication to numerical solution of boundary value problems", *Am. Soc. Mech. Eng. AMD*, **51**, 157-79, 1982.
36. R.L. SANI, P.M. GRESHO, R.L. LEE y D.F. GRIFFITHS, "The cause and cure of the spurious pressures generated by certain FEM solutions of the Navier-Stokes equations, Part 1", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **1**, 17, 1981.
37. T. MOAN, "Orthogonal polynomials and "best" numerical integration formulas on a triangle", *ZAMM*, **54**, 501-8, 1974.
38. H.J. BRAUCHLI y J.T. ODEN, "On the calculation of consistent stress distribution in finite element applications", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **3**, 317-25, 1971.
39. J. BARLOW, "Optimal stress locations in finite element models", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **10**, 243-51, 1976.
40. L.R. HERRMANN, "Interpretation of finite element procedure in stress error minimisation", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **98**, 1331-6, 1972.
41. E. HINTON, F.C. SCOTT, y R.E. RICKETS, "Local least squares stress smoothing for parabolic isoparametric elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **9**, 235-56, 1975.
42. D.J. NAYLOR, "Stresses in nearly inconmpressible materials for finite elements with application to the calcualtion of excess pore pressures", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **8**, 442-60, 1974.
43. O.C. ZIENKIEWICZ y P.N. GODBOTE, "Viscous incompressible flow with special reference to non-Newtonian (plastic) flows", Capítulo 2 de *Finite Elements in Fluids*, Vol. **1** (eds. R.H. Gallagher *et al.*), pp. 25-55, Wiley, 1975.
44. T.J.R. HUGHES, R.L. TAYLOR, y J.F. LEVY, "High Reynolds number, steady, incompressible flows by a finite element method", en *Finite Elements in Fluids*, Vol. 3 (eds R.H. Gallagher *et al.*), Wiley, Chichester, 1978.
45. O.C. ZIENCKIEWICZ, R.L. TAYLOR, y J.M. TOO, "Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **3**, 275-90, 1971.
46. S.F. POAWSEY y R.W. CLOUGH, "Improved numerical integration of thick shell finite elements", *J. Num. Meth. Eng.*, **3**, 545-86, 1971.
47. O.C. ZIENKIEWICZ y E. HINTON, "Reduced integration, function smoothing and nonconformity in finite element analysis", *J. Franklin Inst.*, **302**, 443-61, 1976.
48. O.C. ZIENKIEWICZ, *The finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1977.
49. D.S. MALKUS y T.J.R. HUGHES, "Mixed finite element methods in reduced and selective integration techniques: a unification of concepts", *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, **15**, 1978.

50. O.C. ZIENCKIEWICZ y S.NAKAZAWA, "On variational formulation and its modification for numerical solution", *Comp. Struct.*, **19**, 303-13, 1984.
51. M.S. ENGLEMAN, R.L. SANI, P.M. GRESHO, y H.BERCOVIER, "Consistent v. reduced integration penalty methods for incompressible media using several old and new elements", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **2**, 25-42. 1982.
52. D.N. ARNOLD, "Discretization by finite elements for a model parameter dependent problem", *Num. Meth.*, **37**, 405-21, 1981.
53. J.C. NAGTEGAAL, D.M. PARKS, y J.R. RICE, "On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range", *Comp. Meth. Apl. Mech. Eng.*, **4**, 153-78, 1974.
54. M. VOGELIUS, "An analysis of the *p*-version of the finite element method for nearly incompressible materials; uniformly optional error estimates", *Num. Math.*, **41**, 39-53, 1983.
55. S.W. SLOAN y M.F. RANDOLPH, "Numerical prediction of collapse loads using finite element methods", *Int. J. Num. Ana. Meth. Geomechanics*, **6**, 47-76, 1982.
56. O.C. ZIENKIEWICZ, J.P. VILOTTE, S. TOYOSHIMA, y S. NAKAZAWA, "Iterative method for constrained and mixed approximation. An inexpensive improvement of FEM performance", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **51**, 3-92, 1985
57. K.J. ARROW, L. HURWICZ, y H. UZAWA, *Studies in Non-Linear Programming*, Stanford University Press, 1958.
58. M.R. HESTENS, "Multiplier and gradient methods", *J. Optim. Theory Appl.*, **4**, 303-20, 1969.
59. M.J.D. POWELL, "A method for non-linear constraints in optimization problems", en *Optimization* (ed R. Fletcher), pp. 283-98, Academic Press. London, 1969.
60. C.A. FELLIPA, "Iterative procedure for improving penalty function solutions of algebraic systems", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **12**, 165-85, 1978.
61. M. FORTIN y F. THOMASSET, "Mixed finite element methods for incompressible flow problems", *J. Comp. Physics*, **31**, 113-45, 1973.
62. M. FORTIN y R. GLOWINSKI, *Methodes de Lagrandien Augmente*, Dunod, Paris, 1982.
63. J. ARGYRIS, "Three-dimensional anisotropic and inhomogeneous media. Matrix analysis of small and large displacements", *Ingr. Arch.*, **34**, 33-5, 1965.
64. O.C. ZIENKIEWICZ y S. VALLIAPPAN, "Analysis of real structures for creep, plasticity and other complex constitutive laws, *Proc. Conf. Civil Engineering Materials*, Southampton, 1969, en *Structure of Solid Mechanics and Engineering Design*, Part 1 (ed. M. Te'eni), pp. 27-48, Wiley, London, 1971.
65. O.C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Engineering Science*, pp. 404-5, McGraw-Hill, 1971.
66. O.C. ZIENKIEWICZ, XI KUI LI y S. NAKAZAWA, "Iterative solution of mixed problems and stress recovery procedures", *Comm. Appl. Num. Meth.*, **1**, 3-9, 1985.
67. S. NAKAZAWA, "Mixed finite elements and iterative solution procedures", en *Innovative Methods in Non-linear Problems* (ed. W.K. Liu *et al.*), Pinerigde Press, 1984.

68. O.C. ZIENKIEWICZ, XI KUI LI y S. NAKAZAWA, "Dynamic transient analysis by a mixed iterative method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **23**, 1343–53, 1986.
69. C. CANTIN, C. LOUBIGNAC, y C. TOUZOT, "An iterative scheme to build continuous stress and displacement solutions", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **12**, 1493–506, 1978.
70. C. LOUBIGNAC, C. CANTIN y C. TOUZOT, " Continuous stress fields in finite element analysis", *AIAA J.*, **15**, 1645–7, 1978.
71. S. TIMOSHENKO y J.N. GOODIER, *Theory of Elasticity*, 2nd ed., McGraw-hill, 1951.
72. B. FRAEUS DE VEUBEKE y O.C. ZIENKIEWICZ, "Strain energy bounds in finite element analysis", *J. Strain Analysis*, **2**, 265–71, 1967.
73. Z.M. ELIAS, "Duality in finite element methods", *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, **94**, EM4, 931–46, 1968.
74. R.V. SOUTHWELL, "On the analogues relating flexure and displacement of flat plates", *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **3**, 257–70, 1950.
75. M.A. CRISFIELD, *Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis*, Vol. **1**, Linear Analysis, Pineridge Press, Swansea, UK, 1986.

Capítulo 13

FORMULACIÓN MIXTA Y RESTRICCIONES. MÉTODOS DE CAMPO INCOMPLETO (HÍBRIDOS)

13.1 Generalidades

En el capítulo anterior se ha supuesto en la aproximación mixta que todas las variables eran definidas y aproximadas de la misma forma en todo el dominio de análisis. Sin embargo, en ocasiones se puede abandonar este procedimiento y adoptar diferentes formulaciones en diferentes subdominios y con algunas variables aproximadas sólo en las superficies que unen tales subdominios. En esta parte se discuten tales aproximaciones de *campo parcial* o *incompleto* que incluyen varias de las llamadas formulaciones *híbridas*.

En los ejemplos que se presentan se consideran sólo aproximaciones en cuerpos sólidos elásticos, pero la extensión a la transmisión del calor u otros problemas de campo se puede hacer fácilmente como un simple ejercicio siguiendo los procedimientos descritos.

13.2 Conexión a través de fuerzas en la interfase entre dos (o más) subdominios con formas irreducibles

Uno de los ejemplos más obvios y frecuentemente utilizados de aproximación de "campo incompleto" es la subdivisión de un problema en dos (o más) subdominios en cada uno de los cuales se usa una formulación irreducible (en desplazamientos) y el uso de multiplicadores de Langrange (fuerzas) definidos independientemente en la interfase para unir los subdominios, como en la Figura 13.1(a).

En este problema se formula la aproximación en el dominio Ω^1 en función de los desplazamientos $\mathbf{u}^1$ y de las fuerzas de superficie en la interfase $\mathbf{t}^1 = \boldsymbol{\lambda}$. Con la expresión estándar del trabajo virtual como forma débil [véase Ecs. (12.21) a (12.24)] se tiene:

$$\int_{\Omega^1} \delta(\mathbf{S}\mathbf{u}^1)^T \mathbf{D}^1 \mathbf{S}\mathbf{u}^1 \, d\Omega - \int_{\Gamma_I} \delta\mathbf{u}^{1T} \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma - \int_{\Omega^1} \delta\mathbf{u}^{1T} \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_{t^1}} \delta\mathbf{u}^{1T} \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma = 0 \tag{13.1}$$

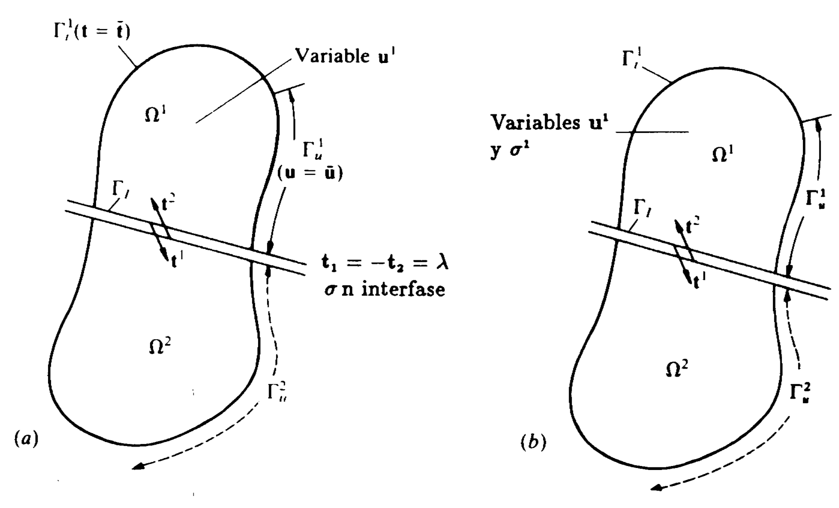


Figura 13.1 Conexión entre dos (o más) dominios mediante variables de fuerzas definidas sólo en la interfase. (*a*) Las variables en cada dominio son desplazamientos **u** (forma irreducible interna). (*b*) Las variables en cada dominio son desplazamientos y tensiones $\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{u}$ (forma mixta).

en donde, como de costumbre, se supone que la aproximación de $\mathbf{u}^1$ satisface los desplazamientos prescritos en Γ_{u1}. De forma similar se puede escribir para el dominio Ω^2, escribiendo ahora las fuerzas de superficie en la interfase como $\mathbf{t}^2 = -\boldsymbol{\lambda}$ para asegurar el equilibrio entre los dos dominios,

$$\int_{\Omega^2} \delta(\mathbf{S}\mathbf{u}^2)^T \mathbf{D}^2 \mathbf{S}\mathbf{u}^2 \, d\Omega + \int_{\Gamma_I} \delta \mathbf{u}^{2T} \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma - \int_{\Gamma^2} \delta \mathbf{u}^{2T} \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_{t2}} \delta \mathbf{u}^{2T} \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma = 0 \tag{13.2}$$

Las ecuaciones de los subdominios se completan con la forma débil de la continuidad de desplazamientos en la interfase entre los dos dominios, esto es,

$$\int_{\Gamma_I} \delta \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) \, d\Gamma = 0 \tag{13.3}$$

La discretización de los desplazamientos en cada subdominio y de las fuerzas en la interfase lleva al sistema final de ecuaciones. Así, escribiendo aproximaciones independientes de la forma

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{N}_{u1} \bar{\mathbf{u}}^1 \tag{13.4}$$

$$\mathbf{u}^2 = \mathbf{N}_{u2} \bar{\mathbf{u}}^2 \tag{13.5}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}_\lambda \bar{\boldsymbol{\lambda}} \tag{13.6}$$

se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 & \mathbf{Q}^1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{Q}^{1T} & \mathbf{O} & \mathbf{Q}^{2T} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q}^2 & \mathbf{K}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^1 \\ \bar{\boldsymbol{\lambda}} \\ \bar{\mathbf{u}}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}^2 \end{Bmatrix} \tag{13.7a}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^1 &= \int_{\Omega^1} \mathbf{B}^{1T} \mathbf{D}^1 \mathbf{B}^1 \, d\Omega \\ \mathbf{Q}^1 &= -\int_{\Gamma_I} \mathbf{N}_{u1}^T \mathbf{N}_\lambda \, d\Gamma \\ \mathbf{K}^2 &= \int_{\Omega^2} \mathbf{B}^{2T} \mathbf{D}^2 \mathbf{B}^2 \, d\Omega \\ \mathbf{Q}^2 &= \int_{\Gamma_I} \mathbf{N}_{u2}^T \mathbf{N}_\lambda \, d\Gamma \\ \mathbf{f}_1 &= \int_{\Omega^1} \mathbf{N}_{u1}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{t1}} \mathbf{N}_{u1}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \\ \mathbf{f}_2 &= \int_{\Omega^2} \mathbf{N}_{u2}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{t2}} \mathbf{N}_{u2}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \end{aligned} \tag{13.7b}$$

Nótese que en la deducción de las matrices anteriores las funciones de forma $\mathbf{N}_\lambda$, y por tanto $\boldsymbol{\lambda}$ misma, están definidas sólo sobre la línea de interfase y cumplen por ello con la definición de aproximación de campo parcial.

La formulación que se acaba de perfilar puede obviamente extenderse a muchos subdominios y en muchos casos de análisis práctico es útil para asegurar un mejor condicionamiento de las matrices y permitir que la solución se obtenga con un esfuerzo computacional reducido[1].

Las variables $\mathbf{u}^1$ y $\mathbf{u}^2$, etc., aparecen como variables internas dentro de cada dominio (o superelemento) y pueden ser eliminadas a nivel local siempre que las matrices $\mathbf{K}^1, \mathbf{K}^2$, etc., sean no singulares. Tal no singularidad presupone, sin embargo, que cada uno de los subdominios tiene prescritos suficientes desplazamientos como para eliminar los modos de sólido rígido. Si éste no es el caso, la eliminación parcial siempre es posible, conservando los modos de sólido rígido hasta que se aborda la solución completa.

Naturalmente, la formulación que se acaba de usar se puede aplicar a un solo campo en formulación en desplazamientos en el que se requiere especificar los desplazamientos en los contornos en forma débil (en vez de imponerlos directamente en las funciones de forma de los desplazamientos).

Este problema puede abordarse directamente o puede resolverse simplemente usando la primera ecuación de (13.7a) en la que se pone $\mathbf{u}^2 = \bar{\mathbf{u}}$, los desplazamientos especificados en Γ_I.

Ahora el sistema de ecuaciones es simplemente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^1 & \mathbf{Q}^1 \\ \mathbf{Q}^{1T} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^1 \\ \bar{\boldsymbol{\lambda}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_\lambda \end{Bmatrix} \tag{13.8}$$

donde

$$\mathbf{f}_\lambda = -\int_{\Gamma_I} \mathbf{N}_\lambda^T \bar{\mathbf{u}}\, d\Gamma \tag{13.9}$$

Esta formulación es conveniente a veces para imponer un desplazamiento prescrito en un campo de desplazamientos elemental cuando el valor de contorno no encaja en el campo de las funciones de forma.

En lo anterior se ha obtenido la formulación directamente vía las formas débiles o los residuos ponderados. Naturalmente, se puede dar un principio variacional tal como la minimización de la energía potencial total (véase Capítulo 2) sujeta a un multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ para imponer continuidad entre los subdominios. La estacionariedad de

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_\Omega (\mathbf{S}\mathbf{u})^T\mathbf{D}(\mathbf{S}\mathbf{u})\, d\Omega - \int_\Omega \mathbf{u}^T\mathbf{b}\, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T\bar{\mathbf{t}}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2)\, d\Gamma \tag{13.10}$$

lleva al conjunto de ecuaciones (13.1) a (13.3).

13.3 Conexión a través de fuerzas en la interfase de dos o más subdominios con formas mixtas

El problema tratado en la sección anterior puede naturalmente abordarse suponiendo una aproximación de tipo mixto de dos campos ($\boldsymbol{\sigma}/\mathbf{u}$) en cada subdominio, como se muestra en la Figura 13.1(b).

Ahora aparecerán las variables $\mathbf{u}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ en cada subdominio, pero la conexión se realizará de nuevo con la fuerza de superficie en la interfase $\boldsymbol{\lambda}$.

Se tiene ahora, utilizando la formulación de la Sec. 12.4.2 para el dominio Ω^1 [véanse las Ecs. (12.28) y (12.21)],

$$\int_{\Omega^1} \delta\boldsymbol{\sigma}^{1T}[(\mathbf{D}^1)^{-1}\boldsymbol{\sigma}^1 - \mathbf{S}\mathbf{u}^1]\, d\Omega = 0 \tag{13.11a}$$

$$\int_{\Omega^1} \delta(\mathbf{S}\mathbf{u}^1)^T\boldsymbol{\sigma}^1\, d\Omega - \int_{\Gamma_I} \delta\mathbf{u}^{1T}\boldsymbol{\lambda}\, d\Gamma - \int_{\Omega^1} \delta\mathbf{u}^{1T}\mathbf{b}\, d\Omega - \int_{\Gamma_t^1} \delta\mathbf{u}^{1T}\bar{\mathbf{t}}\, d\Gamma = 0 \tag{13.11b}$$

y de forma similar para el dominio Ω^2

$$\int_{\Omega^2} \delta\boldsymbol{\sigma}^{2T}[(\mathbf{D}^2)^{-1}\boldsymbol{\sigma}^2 - \mathbf{S}\mathbf{u}^2]\, d\Omega = 0 \tag{13.12a}$$

$$\int_{\Omega^2} \delta(\mathbf{S}\mathbf{u}^2)^T\boldsymbol{\sigma}^2\, d\Omega + \int_{\Gamma_I} \delta\mathbf{u}^{2T}\boldsymbol{\lambda}\, d\Gamma - \int_{\Omega^2} \delta\mathbf{u}^{2T}\mathbf{b}\, d\Omega - \int_{\Gamma_{t2}} \delta\mathbf{u}^{2T}\bar{\mathbf{t}}\, d\Gamma = 0 \tag{13.12b}$$

Con la fuerza en la interfase en equilibrio la imposición de la continuidad exige que

$$\int_{\Gamma_I} \delta\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1)\, d\Gamma = 0 \tag{13.13}$$

La discretización ahora es

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{N}_{u^1}\bar{\mathbf{u}}^1 \qquad \mathbf{u}^2 = \mathbf{N}_{u^2}\bar{\mathbf{u}}^2$$
$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{N}_{\sigma^1}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^1 \qquad \boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{N}_{\sigma^2}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^2$$
$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{N}_\lambda\bar{\boldsymbol{\lambda}}$$

y

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^1 & \mathbf{C}^1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}^{1T} & 0 & \mathbf{Q}^1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}^{1T} & 0 & 0 & \mathbf{Q}^{2T} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{A}^2 & \mathbf{C}^2 \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}^2 & \mathbf{C}^{2T} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^1 \\ \bar{\mathbf{u}}^1 \\ \bar{\boldsymbol{\lambda}} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^2 \\ \bar{\mathbf{u}}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^1 \\ \mathbf{f}_2^1 \\ 0 \\ \mathbf{f}_1^2 \\ \mathbf{f}_2^2 \end{Bmatrix} \tag{13.14}$$

con $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ definidos de forma parecida a la Ec. (12.31) con los subíndices de subdominio apropiados y $\mathbf{Q}^1$ y $\mathbf{Q}^2$ como en (13.7b).

Todos los comentarios de la sección anterior se pueden aplicar aquí de nuevo, aunque la forma anterior no parece que se use frecuentemente.

13.4 "Marco" de interfase en desplazamientos

13.4.1 *Generalidades.* En los ejemplos anteriores se ha usado la fuerza de superficie como variable de interfase para conectar dos o más subdominios. Debido a la falta de las restricciones de sólido rígido la eliminación de los desplazamientos locales en los subdominios es imposible en general. Por ésta y otras razones es conveniente llevar a cabo la conexión de los subdominios a través de un campo de desplazamientos *definido sólo en la interfase* [Figura 13.2(a)] y eliminar todas las variables interiores para que la conexión pueda ser llevada a cabo mediante un procedimiento estándar de matriz de rigidez usando sólo las variables de la interfase.

El *marco de desplazamientos* puede construirse de forma que rodee al subdominio completamente, y si se eliminaran todas las variables internas se llega a una matriz de rigidez de un nuevo "elemento" que puede ser usado directamente acoplándolo con cualquier otro con definiciones similares de los desplazamientos en la interfase, independientemente del procedimiento usado para deducir tal elemento [Figura 13.2(b)].

En todos los ejemplos de esta sección se aproximarán los desplazamientos del marco de la forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{N}_v\bar{\mathbf{v}} \quad \text{en} \quad \Gamma_I \tag{13.15}$$

y se consideran las "fuerzas nodales" aportadas por un solo subdominio Ω^1 a los "nodos" de este marco. Usando el principio de los trabajos virtuales se tiene

$$\int_{\Gamma_{I^1}} \mathbf{N}_v^T \mathbf{t} = \mathbf{q}^1 \tag{13.16}$$

donde $\mathbf{t}$ son las fuerzas que el interior ejerce sobre el imaginario marco. El equilibrio de las fuerzas nodales aportadas por cada subdominio proporciona la condición débil de continuidad de tensiones.

Como finalmente las fuerzas $\mathbf{t}$ se pueden expresar en función de solamente los parámetros del marco $\bar{\mathbf{v}}$, se llega a

$$\mathbf{q}^1 = \mathbf{K}^1 \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{f}_0^1 \tag{13.17}$$

donde $\mathbf{K}^1$ es la matriz de rigidez del subdominio Ω^1 y $\mathbf{f}_0^1$ son las "fuerzas" aportadas internamente.

A partir de este punto son aplicables los procedimientos estándar de ensamblaje, y el subdominio se puede tratar como un elemento estándar que puede ensamblarse a otros asegurándose de que

$$\sum \mathbf{q} = 0 \tag{13.18}$$

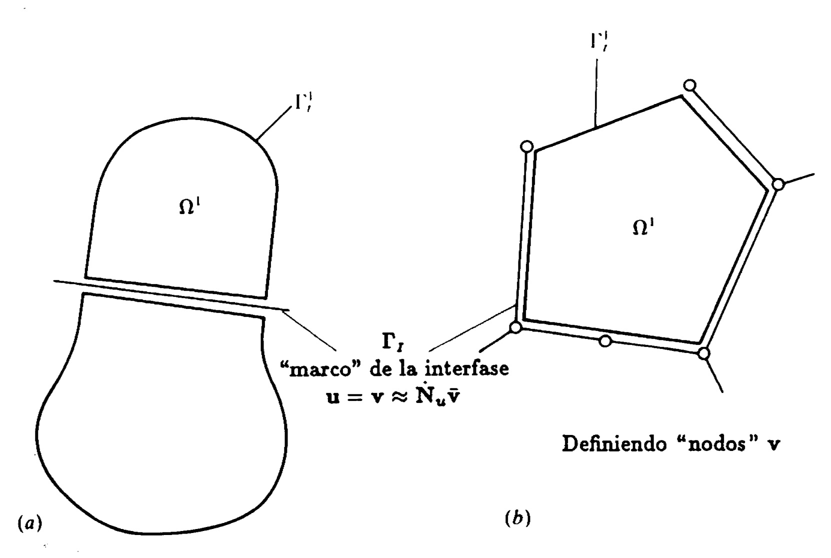


Figura 13.2 Campo de desplazamientos de interfase especificados en un "marco" de conexión de subdominios: (*a*) conexión entre dos dominios; (*b*) un "superelemento" (híbrido) que puede ser conectado a muchos otros elementos similares.

donde la suma incluye todos los subdominios (¡elementos!). Por tanto, sólo es necesario considerar un único subdominio en lo que sigue.

13.4.2 *Conexión entre dos o más subdominios con formas mixtas.* Supondremos, como en la Sec. 13.3., que en cada subdominio, ahora llamado e por generalizar, las tensiones $\boldsymbol{\sigma}^e$ y los desplazamientos $\mathbf{u}^e$ se aproximan independientemente. Las ecuaciones (13.11) se reescriben sumándole a la primera la forma débil de la imposición de continuidad de desplazamientos.

Ahora se tiene, en lugar de (13.11a) y (13.13) (y prescindiendo de los superíndices)

$$\int_{\Omega^e} \delta\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{S}\mathbf{u})\, d\Omega - \int_{\Gamma_{I^e}} \delta\mathbf{t}^T(\mathbf{u} - \mathbf{v})\, d\Gamma = 0 \tag{13.19}$$

La ecuación (13.11b) se reescribe como la forma ponderada de la ecuación de equilibrio, o sea,

$$-\int_{\Omega^e} \delta\mathbf{u}^T(\mathbf{S}^T\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b})\, d\Omega + \int_{\Gamma_{t^e}} \delta\mathbf{u}^T(\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}})\, d\Gamma = 0$$

o bien, después de integrar por partes

$$\int_{\Omega^e} \delta(\mathbf{S}\mathbf{u})^T\boldsymbol{\sigma}\, d\Omega - \int_{\Omega^e} \delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\, d\Omega - \int_{\Gamma_{I^e}} \delta\mathbf{u}^T\mathbf{t}\, d\Gamma - \int_{\Gamma_{I^e}} \delta\mathbf{u}^T\bar{\mathbf{t}}\, d\Gamma = 0 \tag{13.20}$$

En lo anterior, $\mathbf{t}$ son las fuerzas de superficie correspondientes al campo $\boldsymbol{\sigma}$ [véase la Ec. (12.29)]:

$$\mathbf{t} = \mathbf{G}\boldsymbol{\sigma} \tag{13.21}$$

En lo que sigue Γ_t^e, esto es, el contorno con tensión prescrita, se tomará como nulo.

Al aproximar las Ecs. (13.19), (13.20) y (13.26) con

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u\bar{\mathbf{u}} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_\sigma\bar{\boldsymbol{\sigma}} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = \mathbf{N}_v\bar{\mathbf{v}}$$

se puede escribir, usando el método de Galerkin y limitando las variables al "elemento" e, que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^e & \mathbf{C}^e & \mathbf{Q}^e \\ \mathbf{C}^{eT} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}^{eT} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^e \\ \bar{\mathbf{u}}^e \\ \bar{\mathbf{v}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}^e \\ \mathbf{q}^e \end{Bmatrix} \tag{13.22a}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_\sigma \, d\Omega \\ \mathbf{C}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_\sigma^T \mathbf{B} d\Omega - \int_{\Gamma_{Ie}} (\mathbf{G}\mathbf{N}_\sigma)^T \mathbf{N}_u \, d\Gamma \\ \mathbf{Q}^e &= \int_{\Gamma_{Ie}} (\mathbf{G}\mathbf{N}_\sigma)^T \mathbf{N}_v \, d\Gamma \\ \mathbf{f}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} \, d\Omega \end{aligned} \tag{13.22b}$$

La eliminación de $\boldsymbol{\sigma}^e$ y $\mathbf{u}^e$ de lo anterior proporciona la matriz de rigidez del elemento y la contribución de fuerzas internas [véase la Ec. (13.17)].

Una vez más se puede notar que los sencillos criterios de estabilidad discutidos en el Capítulo 12 ayudan a la hora de escoger el número de parámetros de $\boldsymbol{\sigma}$, u y $\mathbf{v}$. Dado que la matriz final de rigidez de un elemento debería ser singular para tres movimientos del sólido rígido, se debe tener [por la Ec. (12.17)] que

$$n_\sigma \geq n_u + n_v - 3 \tag{13.23}$$

en aplicaciones bi-dimensionales.

Existen varias formas variacionales alternativas de la formulación anterior. Una particulamente útil es la desarrollada por Pian *et al.*[2-4] En ésta la representación mixta completa se puede escribir enteramente en función de un único principio variacional (para fuerzas de volumen nulas y si no existe contorno tipo Γ_t):

$$\Pi_\Omega = -\int_\Omega \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_\Omega (\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u}_I \, d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \mathbf{v} \, d\Omega \tag{13.24}$$

En lo anterior se ha supuesto que el campo compatible de $\mathbf{v}$ está *definido sobre todo el dominio del elemento* y no sólo en sus interfases, y $\mathbf{u}_I$ se refiere al campo incompatible definido sólo en el interior del dominio elemental. †

Nótese que con esta definición

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_I + \mathbf{v} \tag{13.25}$$

Para mostrar la validez de este principio variacional, que es práctico ya que no precisa la evaluación de integrales sobre la interfase, deduciremos la forma débil correspondiente a las Ecs. (13.19) y (13.20) utilizando la condición (13.25).

† Naturalmente, en esta forma el elemento podría encajar bien en el Capítulo 12, y la división entre formas híbridas y mixtas no resulta aquí única.

Ahora se puede escribir, en lugar de (13.19) (y notando que debe ser $\mathbf{u}_I = 0$ en las interfases para asegurar la compatibilidad interelemental)

$$\int_{\Omega^e} \delta\boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{S}\mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega^e} \delta\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \mathbf{u}_I \, d\Omega + \int_{\Gamma_{Ie}} \delta \mathbf{t}^T \mathbf{u}_I \, d\Gamma = 0 \tag{13.26}$$

Usando el teorema de Green la ecuación anterior queda simplemente

$$\int_{\Omega^e} \delta\boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{S}\mathbf{v}) \, d\Omega + \int_{\Omega^e} (\mathbf{S}^T \delta\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{u}_I \, d\Gamma = 0 \tag{13.27}$$

En lugar de (13.20) se escribe (en ausencia de fuerzas de volumen $\mathbf{b}$ y contorno Γ_t)

$$\int_{\Omega^e} \delta \mathbf{u}_I^T (\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega + \int_{\Omega^e} \delta \mathbf{v}^T (\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma}) \, d\Omega = 0 \tag{13.28}$$

y usando de nuevo el teorema de Green

$$\int_{\Omega^e} \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega^e} \delta (\mathbf{S}\mathbf{v})^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = 0 \quad (\text{si } \delta\mathbf{v} = 0 \text{ en } \Gamma_I) \tag{13.29}$$

Estas ecuaciones son precisamente las variaciones del funcional (13.24).

El principio variacional expresado por la Ec. (13.24) ha sido aplicado eficazmente por Pian y Sumihara[2] para desarrollar nuevos y sencillos elementos. Uno de tales elementos cuadriláteros se deriva en detalle a continuación.

Naturalmente, el procedimiento desarrollado en esta sección puede aplicarse a otras representaciones mixtas o irreducibles con conexiones tipo "marco". Tong y Pian[5,6] han desarrollado varias formas alternativas de elemento utilizando este procedimiento.

El cuadrilátero híbrido de Pian - Sumihara (Figura 13.3). La deducción de este elemento de cuatro nodos puede separarse en dos partes. En la primera se establece la aproximación para la tensión en función de polinomios lineales en las coordenadas *naturales* (ξ, η). El primer término de la Ec. (13.28) se usa para reducir el número de parámetros de tensión a un mínimo. Los cálculos subsiguientes se hacen entonces en función de la interpolación reducida de tensión y del campo compatible de desplazamientos solamente. En la segunda parte del desarrollo se modifican las interpolaciones de tensión para reducir el esfuerzo computacional necesario para establecer la matriz "de rigidez" del elemento.

El desarrollo que se hace a continuación es para aplicaciones en problemas de tensión y deformación plana. La aproximación para la tensión en cada elemento se toma como

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \boldsymbol{\sigma}^1(\xi, \eta)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_0$ es un conjunto de tres parámetros constantes y

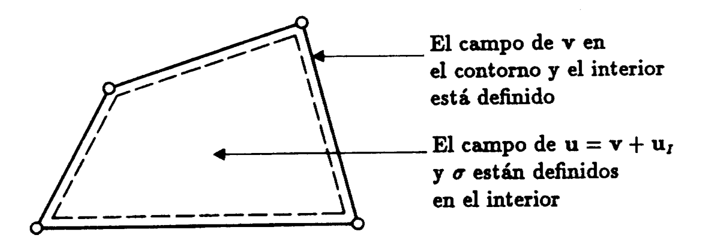


Figura 13.3 El cuadrilátero de Pian— Sumihara

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \begin{Bmatrix} \sigma_x^1 \\ \sigma_y^1 \\ \sigma_{xy}^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_1\xi + \alpha_2\eta \\ \beta_1\xi + \beta_2\eta \\ \gamma_1\xi + \gamma_2\eta \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_\sigma^1 \bar{\boldsymbol{\sigma}}_1$$

Por tanto, nueve parámetros definen la variación de tensión en el elemento.

El campo incompatible de desplazamientos se define mediante cuatro parámetros $\bar{\mathbf{u}}_\lambda$ de la forma

$$\mathbf{u}_I = \mathbf{N}_\lambda(\xi,\eta)\bar{\mathbf{u}}_\lambda$$

con

$$\mathbf{N}_\lambda = \begin{bmatrix} (1-\xi^2) & 0 & (1-\eta^2) & 0 \\ 0 & (1-\xi^2) & 0 & (1-\eta^2) \end{bmatrix}$$

y los desplazamientos compatibles del marco en el elemento se interpolan como

$$\mathbf{v} = N_i(\xi,\eta)\bar{\mathbf{v}}_i$$

donde $N_i(\xi,\eta)$ son las funciones de forma isoparamétricas de cuatro nodos usuales, bilineales (véase Capítulo 8). La ecuación (13.28) lleva al requisito de que en cada elemento

$$\int_{\Omega_e} \begin{Bmatrix} (1-\xi^2) \\ (1-\eta^2) \end{Bmatrix} (\sigma_{x,x}^1 + \sigma_{xy,y}^1)\, d\Omega = 0$$

y

$$\int_{\Omega_e} \begin{Bmatrix} (1-\xi^2) \\ (1-\eta^2) \end{Bmatrix} (\sigma_{xy,x}^1 + \sigma_{y,y}^1)\, d\Omega = 0$$

Puede verificarse fácilmente que la sustitución de la aproximación de tensión en las relaciones anteriores proporciona sólo dos ecuaciones independientes[2]:

$$b_3\alpha_1 - b_1\alpha_2 - a_3\gamma_1 + a_1\gamma_2 = 0$$

y

$$-a_3\beta_1 + a_1\beta_2 + b_3\gamma_1 - b_1\gamma_2 = 0$$

donde

$$a_1 = \sum_1^4 x_i\xi_i \qquad b_1 = \sum_1^4 y_i\xi_i$$

$$a_2 = \sum_1^4 x_i\xi_i\eta_i \qquad b_2 = \sum_1^4 y_i\xi_i\eta_i$$

$$a_3 = \sum_1^4 x_i\eta_i \qquad b_3 = \sum_1^4 y_i\eta_i$$

Por tanto, mediante la Ec. (13.28) la aproximación de tensión puede expresarse en función de siete parámetros independientes. El uso de este campo de tensión de siete parámetros en el funcional de la Ec. (13.24) sirve para eliminar el término de desplazamientos incompatibles de consideraciones ulteriores.

El rango adecuado de un elemento de cuatro nodos para tensión— deformación plana se consigue con una aproximación de tensión de cinco términos—. En la referencia 2 la aproximación de siete términos se reduce a cinco términos independientes perturbando la forma geométrica del elemento. Alternativamente, se puede conseguir el mismo resultado mediante la integración por partes del término incompatible en la Ec. (13.28). El resultado es una integral de volumen y una integral de contorno. Si se exige que los términos de volumen y de contorno se satisfagan independientemente, se obtienen cuatro ecuaciones de restricción para reducir la aproximación original de nueve términos a los cinco términos deseados. Tras la integración por partes el término de volumen es

$$\int_{\Omega^e} (\mathbf{S}\delta\mathbf{u}_I)^T \boldsymbol{\sigma}^1 d\Omega$$

Igualando esto a cero, tras restituir los campos de aproximación, resulta en

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\lambda^T \boldsymbol{\sigma}^1 d\Omega = 0$$

donde $\mathbf{B}_\lambda$ es la matriz deformación–desplazamientos deducida a partir de los desplazamientos incompatibles. Esta relación, combinada con las dos ecuaciones independientes originales, proporciona las cuatro ecuaciones

$$\begin{aligned} b_3\alpha_1 &= a_3\gamma_1 \\ b_1\alpha_2 &= a_1\gamma_2 \\ a_3\beta_1 &= a_1\gamma_1 \\ a_1\beta_2 &= b_1\gamma_2 \end{aligned}$$

que pueden usarse para construir la aproximación de tensión de cinco términos. El término de contorno da ecuaciones de restricción que necesariamente son combinaciones lineales de las cuatro ecuaciones anteriores.

Las cuatro ecuaciones de restricción se pueden usar para escribir la aproximación de tensión de cinco términos. Nótese que cualquiera de los a_i, b_i

pueden ser cero; por tanto, los parámetros de tensión se redefinen para evitar la división por estos parámetros geométricos. El resultado es

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \begin{bmatrix} a_3^2\xi & a_1^2\eta \\ b_3^2\xi & b_1^2\eta \\ a_3b_3\xi & a_1b_1\eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1^1 \\ \sigma_2^1 \end{Bmatrix}$$

La aproximación de tensión anterior puede usarse ahora en (13.24) para deducir una matriz "de rigidez" elemental. Como ya se ha dicho, la construcción de la matriz de rigidez requiere la solución de la matriz resultante del primer término en (13.24), o sea, la inversión de una matriz 5×5. En este caso esto llevaría a un número significativo de operaciones numéricas que pueden evitarse en las situaciones donde la matriz de propiedades del material sea constante en todo el elemento. Este paso se consigue modificando ligeramente la interpolación de tensiones a la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 + \bar{\mathbf{N}}_\sigma \bar{\boldsymbol{\sigma}}^1$$

donde

$$\bar{\mathbf{N}}_\sigma = \begin{bmatrix} a_3^2(\xi-\xi_0) & a_1^2(\eta-\eta_0) \\ b_3^2(\xi-\xi_0) & b_1^2(\eta-\eta_0) \\ a_3b_3(\xi-\xi_0) & a_1b_1(\eta-\eta_0) \end{bmatrix}$$

Esta modificación comporta simplemente un reescalado de los parámetros que definen la parte constante de la aproximación de la tensión. Se pueden deducir ahora valores para los parámetros ξ_0, η_0 de forma que

$$\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0^T, \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{1T} \rangle \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{D}^{-1}\Omega^e & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}^1 \end{Bmatrix}$$

En concordancia, la inversa es

$$\left[\begin{array}{c|c} \Omega^e \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}} \end{array} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega^e}\mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}^{-1} \end{bmatrix}$$

donde $\bar{\mathbf{A}}$ es una matriz 2×2 definida como

$$\bar{\mathbf{A}} = \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{N}}_\sigma^T \mathbf{D}^{-1} \bar{\mathbf{N}}_\sigma \, d\Omega$$

Los valores apropiados para ξ_0, η_0 son

$$\xi_0 = \frac{J_1}{3J_0} \qquad \text{y} \qquad \eta_0 = \frac{J_2}{3J_0}$$

donde J_i son los parámetros en el determinante jacobiano del elemento de cuatro nodos con

$$J = J_0 + J_1\xi + J_2\eta$$

Los pasos anteriores se han implementado en una rutina elemental incluida en el Capítulo 15. El elemento resultante es muy eficiente numéricamente, comparado con el elemento isoparamétrico de cuatro nodos. La eficacia computacional proviene del hecho de que

$$\int_{\Omega^e} \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{S}\mathbf{v}) \, d\Omega = \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}}_0^T, \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{1T} \rangle \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \Omega^e \\ \mathbf{C}^1 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}$$

donde $\mathbf{B}_0$ es la matriz deformación–desplazamientos del elemento isoparamétrico de cuatro nodos evaluada en el origen de las coordenadas naturales de este modo es idéntica al valor de una cuadratura de un punto de Gauss. También

$$\mathbf{C}^1 = \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{N}}_\sigma \mathbf{B} \, d\Omega$$

y, por tanto, la matriz de rigidez elemental es

$$\mathbf{k} = \mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0 \Omega^e + \mathbf{C}^{1T} \bar{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{C}^1$$

El primer término es idéntico a la evaluación del elemento en desplazamientos de cuatro nodos mediante una cuadratura de un solo punto. El segundo término es una matriz de estabilización de rango 2 cuyos términos se pueden evaluar fácilmente de forma analítica. En consecuencia, el elemento se puede implementar con considerablemente menos operaciones que la derivación del elemento en desplazamientos con cuadratura de Gauss 2×2.

Una vez se han obtenido los parámetros de desplazamientos $\bar{\mathbf{v}}$ en la solución global del problema, los parámetros de tensión $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_0$ se calculan como

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \mathbf{D}\mathbf{B}_0 \bar{\mathbf{v}}$$

Comparando esto con la interpolación de tensión, se observa que $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_0$ son las tensiones medias sobre cada elemento. Estos son valores precisos que son fáciles de calcular en un elemento. Debe notarse que las tensiones medias están asociadas al punto ξ_0, η_0 y no con el origen, donde se calcula $\mathbf{B}_0$. Este resultado de la formulación mixta contrasta con la solución en desplazamientos. Nótese también que no es necesario calcular $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^1$ para determinar los valores medios en el elemento.

El elemento descrito arriba no sólo es muy eficiente en su implementación, sino que es probablemente el elemento de cuatro nodos más preciso en una amplia gama de problemas de tensión y deformación plana hasta la fecha. El elemento funciona bien en problemas con flexión (ej., con los términos $\bar{\mathbf{N}}_\sigma \bar{\boldsymbol{\sigma}}^1$) y en aplicaciones cuasi- incompresibles. Además, la sensibilidad a la distorsión es menor que en otros elementos isoparamétricos de cuatro nodos. Resultados típicos obtenidos en la referencia 2. En las Figuras 13.4 y 13.5 se muestran.

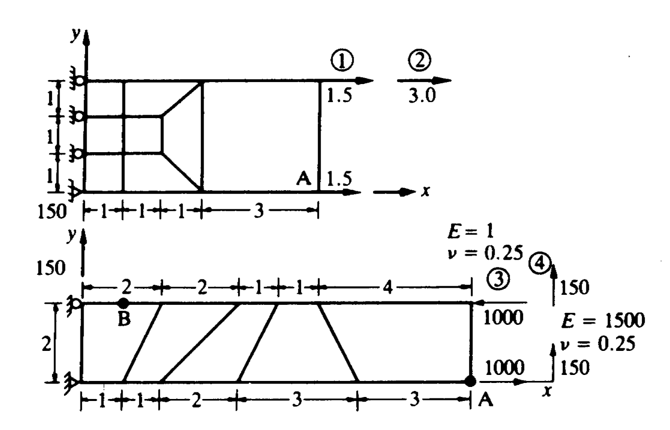


Figura 13.4 El cuadrilátero de Pian-Sumihara. Resultados comparativos en los ejemplos mostrados.

Resultados

Elementos	Caso 1 u_A	Caso 2 $-v_A$	Caso 3 v_A	Caso 3 σ_{x_B}	Caso 4 v_A	Caso 4 σ_{x_B}
Isoparamétrico bilineal Q 4	6.00	17.00	45.7	-1761	50.7	-2448
Incompatible (Taylor, Wilson) Q 6 (ver Capítulo 11)	6.00	17.61	-	-	-	-
Pian-Sumihara	6.00	17.64	96.18	-3014	98.19	-4137
Exactos	6.00	18.00	100	-3000	102.6	-4050

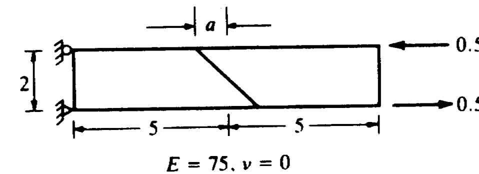
13.4.3 *Conexión de subdominios de formas equilibradas.* En esta técnica supondremos *a priori* que el campo de tensión es tal que

$$\boldsymbol{\sigma}_T = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}_0 \tag{13.30}$$

y que las ecuaciones de equilibrio se satisfacen idénticamente. Por tanto,

$$\mathbf{S}^T\boldsymbol{\sigma} \equiv 0 \; ; \; \mathbf{S}^T\boldsymbol{\sigma}_0 \equiv \mathbf{b} \quad \text{en } \Omega \quad \text{y} \quad \mathbf{G}\boldsymbol{\sigma} = 0 \; ; \; \mathbf{G}\boldsymbol{\sigma}_0 = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \Gamma_t^e$$

En ausencia de Γ_t^e, la Ec. (13.20) se satisface idénticamente y se puede escribir (13.19) como (véase Capítulo 12, Sec. 12.9)



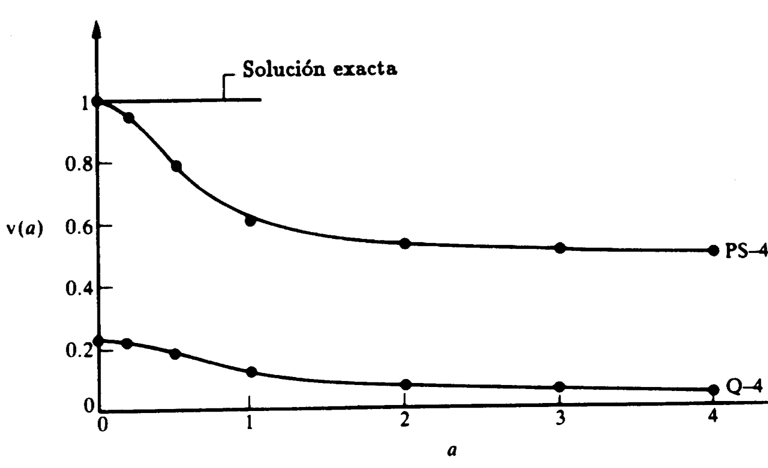


Figura 13.5 El cuadrilátero Pian-Sumihara (P-S4) comparado con el cuadrilátero en desplazamientos (Q4). Efecto de la distorsión del elemento.

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^e} \delta\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{D}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_T - \mathbf{S}\mathbf{u})\, d\Omega + \int_{\Gamma_{Ie}} \delta\mathbf{t}^T(\mathbf{u} - \mathbf{v})\, d\Gamma \equiv \\ \equiv \int_{\Omega^e} \delta\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{D}^{-1}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}_0)\, d\Omega - \int_{\Gamma_{Ie}} (\mathbf{G}\delta\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{v}\, d\Gamma = 0\end{aligned} \tag{13.31}$$

Al discretizar, notando que el campo $\mathbf{u}$ no aparece en el problema

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_\sigma\bar{\boldsymbol{\sigma}} \qquad \mathbf{v} = \mathbf{N}_v\bar{\mathbf{v}}$$

se tiene, al usar la Ec. (13.16), que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^e & \mathbf{Q}^e \\ \mathbf{Q}^{eT} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \bar{\mathbf{v}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^e \\ \mathbf{q}^e - \mathbf{f}_2^e \end{Bmatrix} \tag{13.32}$$

donde

$$\mathbf{A}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_\sigma \mathbf{D}^{-1} \mathbf{N}_\sigma \, d\Omega$$
$$\mathbf{f}_1 = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_\sigma \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_0 \, d\Omega$$
$$\mathbf{Q}^e = \int_{\Gamma_{Ie}} (\mathbf{G}\mathbf{N}_\sigma)^T \mathbf{N}_v \, d\Gamma$$

y

$$\mathbf{f}_2^e = \int_{\Gamma_{Ie}} \mathbf{N}_v \mathbf{G} \boldsymbol{\sigma}_0 \, d\Gamma$$

Aquí la eliminación de $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ es sencilla y se puede escribir directamente

$$\mathbf{K}^e \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{q}^e - \mathbf{f}_2^e - \mathbf{Q}^{eT} \mathbf{A}^{e-1} \mathbf{f}_1^e$$

y

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{Q}^{eT} \mathbf{A}^{e-1} \mathbf{Q}^e \tag{13.33}$$

En la Seccción 12.9 se han discutido los posibles campos de equilibrio y se han indicado las dificultades para elegir tales campos para un dominio subdividido en elementos finitos. En este caso, por otro lado, la situación es bastante simple ya que los parámetros que describen las tensiones de equilibrio dentro del elemento se pueden elegir arbitrariamente usando una expresión polinómica.

Por ejemplo, si se usa una expresión polinómica simple en dos dimensiones:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \\ \sigma_y &= \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y \\ \sigma_{xy} &= \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y \end{aligned} \tag{13.34}$$

se observa que para satisfacer el equilibrio se requiere

$$\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \gamma_2 \\ \beta_2 + \gamma_1 \end{bmatrix} = 0 \tag{13.35}$$

y esto implica simplemente

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= -\alpha_1 \\ \gamma_1 &= -\beta_2 \end{aligned}$$

Por tanto, un desarrollo lineal en función de $6 - 2 = 4$ parámetros independientes se consigue fácilmente. Naturalmente, se pueden usar desarrollos con términos de mayor orden.

Es interesante observar que:

1. $n_\sigma \geq n_v - 3$ es necesario para asegurar estabilidad.
2. Según el principio de limitación, la precisión de tal aproximación no puede ser mayor que la conseguida por una formulación en desplazamientos con un desarrollo compatible de $\mathbf{v}$ en todo el elemento, siempre que aparezcan expresiones polinómicas similares en las variaciones de las componentes de tensión.

Sin embargo, en la práctica se obtienen dos ventajas con tales elementos, conocidos como elementos híbridos de tensión. En primer lugar, no es necesario construir campos compatibles de desplazamiento en todo el elemento (un punto útil en su aplicación, por ejemplo, a problemas de flexión de placas). En segundo lugar, para elementos distorsionados (isoparamétricos) es fácil usar campos de tensión que varíen con las coordenadas globales, y conseguir así mayor precisión.

Pian[7] hizo uso de estos elementos por primera vez, y hoy se usan muchas variantes útiles.[8–22]

13.5 Conexión de soluciones de contorno (o tipo Trefftz) mediante "marcos" de desplazamientos prescritos

Ya se ha hecho referencia previamente (Capítulo 9) a las soluciones de contorno (tipo Trefftz)[23]. En este caso los campos de desplazamiento/tensión escogidos son tales que las ecuaciones homogéneas de equilibrio y las relaciones constitutivas se satisfacen *a priori* (y de hecho, a veces, algunas condiciones de tensión o desplazamiento prescritas en el contorno).

Así, en las Ecs. (13.19) y (13.20) los términos integrales sobre el subdominio (elemento e) desaparecen y, como las variaciones $\delta\mathbf{t}$ y $\delta\mathbf{u}$ están conectadas, se puede combinar todo en una única expresión (en ausencia de fuerzas de volumen) de la forma

$$-\int_{\Gamma_{Ie}} \delta\mathbf{t}^T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{te}} \delta\mathbf{u}^T(\mathbf{t} - \bar{\mathbf{t}}) \, d\Gamma + d\Omega = 0 \tag{13.36}$$

Esto unido a la ecuación de contorno (13.16) proporciona los medios para deducir la matriz de rigidez de tales subdominios.

Por ejemplo, si se expresa el campo aproximado como

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{a}} \tag{13.37}$$

lo cual implica

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\mathbf{S}\mathbf{N})\bar{\mathbf{a}} \quad \text{y} \quad \mathbf{t} = \mathbf{G}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{G}\mathbf{D}(\mathbf{S}\mathbf{N})\bar{\mathbf{a}}$$

se puede escribir en lugar de (13.22)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^e & \mathbf{Q}^e \\ \mathbf{Q}^{eT} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{v}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^e \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \tag{13.38}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^e &= \int_{\Gamma_{Ie}} [\mathbf{GD(SN)}]^T\mathbf{N}\ d\Gamma + \int_{\Gamma_{te}} \mathbf{N}^T\mathbf{GD(SN)}\ d\Gamma \\ \mathbf{Q}^e &= \int_{\Gamma_{Ie}} [\mathbf{GD(SN)}]^T\mathbf{N}_v\ d\Gamma \\ \mathbf{f}_1^e &= \int_{\Gamma_{te}} \mathbf{N}^T\tilde{\mathbf{t}}\ \ d\Gamma \end{aligned} \tag{13.39}$$

En las Ecs. (13.38) y (13.39) se ha omitido la integral sobre el dominio de la solución particular $\boldsymbol{\sigma}_0$ correspondiente a las fuerzas de volumen $\mathbf{b}$ pero se ha permitido que una parte del contorno Γ_t^e esté sometida a tensión prescrita. Las expresiones completas incluyendo la solución particular pueden obtenerse fácilmente.

La ecuación (13.38) se puede usar para la solución de un problema de contorno en el que $\mathbf{v}$ y $\tilde{\mathbf{t}}$ sean conocidos en partes del contorno. Más importante, sin embargo, es que resulta una matriz de rigidez muy simple para un elemento completo rodeado por el marco. Se tiene

$$\mathbf{K}^e\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{q} - \mathbf{f}^e \tag{13.40}$$

en la cual

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \mathbf{Q}^{eT}\mathbf{H}^{e-1}\mathbf{Q}^e \\ \mathbf{f}^e &= \mathbf{Q}^{eT}\mathbf{H}^{e-1}\mathbf{f}_1^e \end{aligned} \tag{13.41}$$

Esta forma es muy similar a la de la Ec. (13.33) excepto que ahora sólo es preciso evaluar integrales sobre los contornos del elemento subdominio.

No es evidente a primera vista que la matriz $\mathbf{H}^e$ de la Ec. (13.39) deba ser simétrica. La simetría se demuestra a partir de la unicidad de la energía de deformación y, por consiguiente,

$$\int_{\Gamma^e} \mathbf{t}^T\mathbf{u}\ d\Gamma \equiv \int_{\Gamma^e} \mathbf{u}^T\mathbf{t}\ d\Gamma$$

y en consecuencia

$$\int_{\Gamma^e} \mathbf{N}^T\mathbf{GD(SN)}\ d\Gamma \equiv \int_{\Gamma^e} [\mathbf{GD(SN)}]^T\mathbf{N}\ d\Gamma \tag{13.42}$$

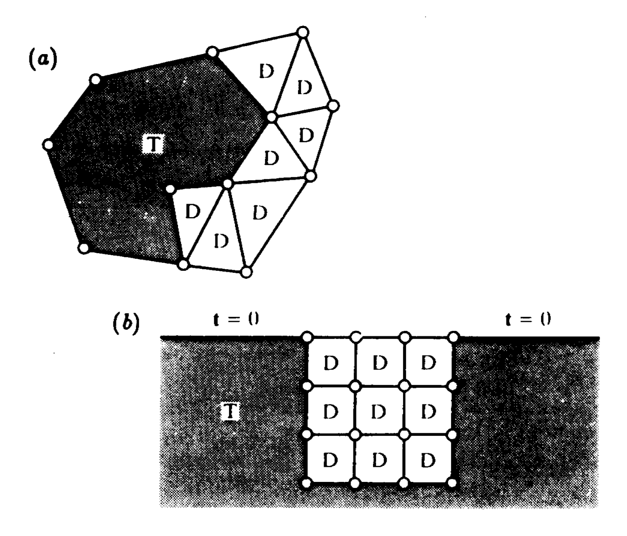


Figura 13.6 Elementos de contorno tipo Trefftz (T) con "marcos" de forma compleja que permiten la combinación con elementos estándar en desplazamientos (D): (*a*) elemento *interior*; (*b*) elemento *exterior*.

Es, por tanto, conveniente escribir $\mathbf{H}^e$ en una forma obviamente simétrica como

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^e =& \frac{1}{2}\int_{\Gamma_{Ie}} \{[\mathbf{GD(SN)}]^T\mathbf{N} + \mathbf{N}^T\mathbf{GD(SN)}\}\ d\Gamma - \\ &- \frac{1}{2}\int_{\Gamma_{te}} \{[\mathbf{GD(SN)}]^T\mathbf{N} + \mathbf{N}^T[\mathbf{GD(SN)}]\}\ d\Gamma \end{aligned} \tag{13.43}$$

Se ha escrito mucho sobre los llamados "elementos de contorno" y sus méritos y desventajas.[24-26] Muy frecuentemente se usan soluciones singulares (funciones de Green) para satisfacer las ecuaciones de campo y éstas requieren complejos procedimientos de integración. Sin embargo, es posible obtener conjuntos completos de funciones que satisfagan las ecuaciones de gobierno sin introducir singularidades[27-31] y entonces basta con integración sencilla.

Mientras que las soluciones de contorno se limitan a dominios lineales homogéneos, éstas dan soluciones muy precisas para un rango limitado de parámetros, y a veces se ha descrito su combinación con elementos finitos "estándar". En el pasado se han desarrolado varios procedimientos de acoplamiento,[32-35] pero la forma que se presenta aquí coincide con el trabajo más reciente de Zielinski y Zienkiewicz,[36] Jirousek[37-40] y Piltner.[41] El último ha desarrollado elementos de elasticidad bi-dimensional y flexión de placas muy generales que pueden ser circundados por un dominio (elemento)

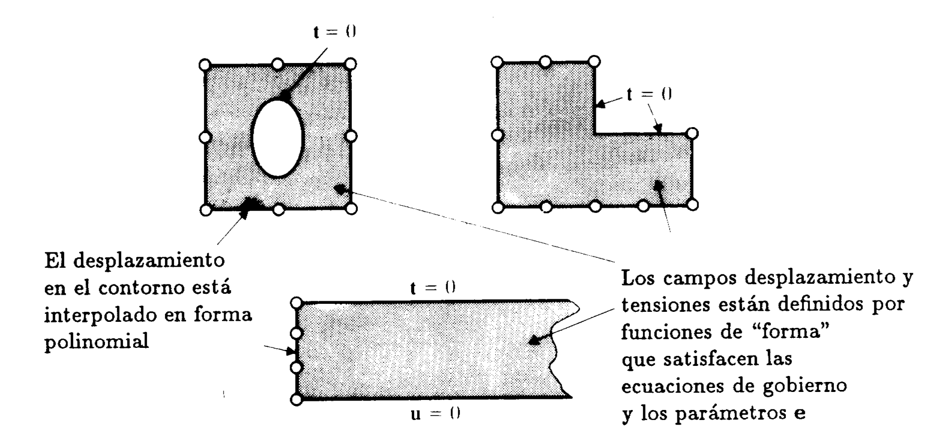


Figura 13.7 Elementos de contorno tipo Trefftz. Algunas formas generales útiles.[39]

poligonal de muchos lados que puede acoplarse directamente a elementos estándar siempre que se tenga la misma interpolación de desplazamientos en los bordes, tal como se muestra en la Figura 13.6. Se ilustran, tanto elementos *interiores* con un marco circundando el volumen del elemento, como elementos *exteriores* satisfaciendo las condiciones de tensión en la superficie libre y en el infinito.

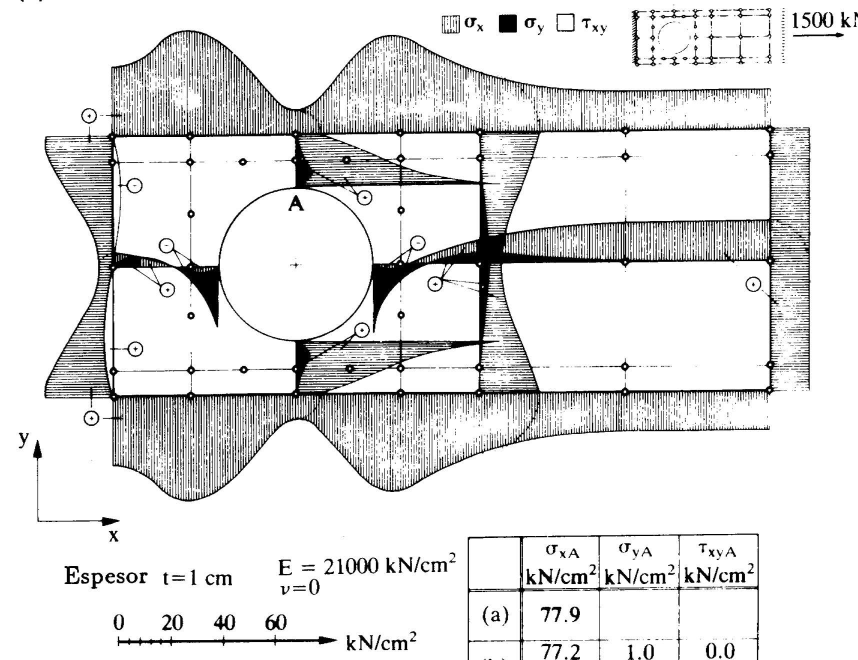
Tales elementos pueden incluir en el arsenal de las "funciones de forma" $\mathbf{N}^e$ [véase Ec. (13.37)] soluciones que sean solución exacta a singularidades o que satisfagan automáticamente las condiciones de tensión en contornos interiores, ej., círculos o elipses inscritos dentro de elementos grandes como se muestra en la Figura 13.7.

Claramente, tales elementos pueden funcionar muy bien comparados con los estándar, ya que el carácter de la solución analítica se ha incluido de forma esencial. La Figura 13.8 muestra excelentes resultados que se pueden obtener utilizando estos elementos complejos. El número de grados de libertad es mucho menor que para una solución estándar en desplazamientos pero, naturalmente, el ancho de banda es mucho mayor.[39]

Dos puntos llaman claramente la atención en la formulación general de las Ecs. (13.36) a (13.39).

Primero, el campo de desplazamientos, **a**, sólo puede determinarse excluyendo los modos de sólido rígido. Éstos sólo pueden dar deformaciones **SN** idénticamente iguales a cero y, por tanto, no dan contribución a la matriz **H**.

(*a*) 21 elementos de Trefftz, 252 GDL



	σ_{xA} kN/cm²	σ_{yA} kN/cm²	τ_{xyA} kN/cm²
(a)	77.9		
(b)	77.2 (74.2)	1.0 (2.6)	0.0 (0.1)

(*b*) 920 elementos estándar Q8, 5960 GDL

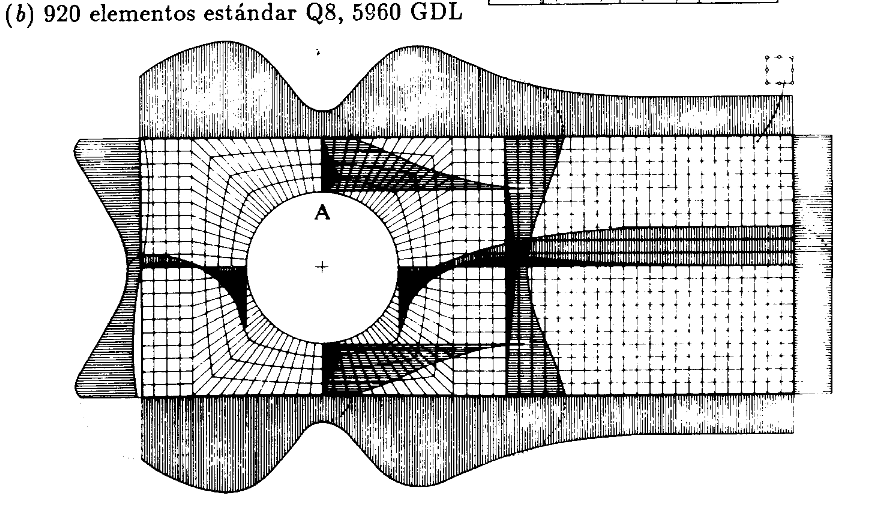


Figura 13.8 Aplicación de elementos tipo Trefftz a un problema de tracción de una barra con un agujero circular en tensión plana. (*a*) Solución con un elemento de Trefftz. (*b*) Solución con elementos estándar de desplazamientos. (Los números entre paréntesis indican la solución estándar con 230 elementos, 1600 GDL.)

Segundo, las condiciones de estabilidad requieren que (para problemas en dos dimensiones)

$$n_a \geq n_u - 3$$

y de este modo se puede encontrar fácilmente el n_a mínimo. De nuevo tiene poco interés incrementar substancialmente el número de parámetros internos por encima del número mínimo, ya que puede no ganarse precisión adicional.

Se ha dicho anteriormente que la "traducción" de la formulación discutida a problemas gobernados por ecuaciones cuasi-armónicas es casi evidente. Esto se consigue reemplazando

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\to \phi \\ \boldsymbol{\sigma} &\to \mathbf{q} \\ \mathbf{t} &\to q_n \\ \mathbf{S} &\to \nabla \end{aligned} \tag{13.44}$$

Para la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = Q \tag{13.45}$$

se puede escribir una serie completa de soluciones analíticas en dos dimensiones de la forma

$$Re(z^n) = 1, x, x^2 - y^2, x^3 - 3xy^3, \ldots \qquad \text{para } z = x + iy \tag{13.46}$$

La Figura 13.9 muestra una solución simple de dos subdominios con valores de Q constantes pero diferentes y una conexión en el contorno, como indicación de la precisión de los procedimientos de conexión.

13.6 Subdominios con elementos "estándar" y funciones globales

El procedimiento que se acaba se describir puede usarse convenientemente con aproximaciones construidas internamente con elementos estándar (en desplazamientos) y funciones globales que ayudan a tratar singularidades en otros problemas internos. En este caso surge un término adicional en los nodos colocados en el interior del subdominio, pero el efecto de las funciones globales queda contenido dentro del subdominio. La formulación es algo más simple ya que no es preciso usar funciones complicadas tipo Trefftz.

Se dejan los detalles al lector, y en la Figura 13.10 se muestran algunos posibles ensamblajes de subdominios de utilidad.

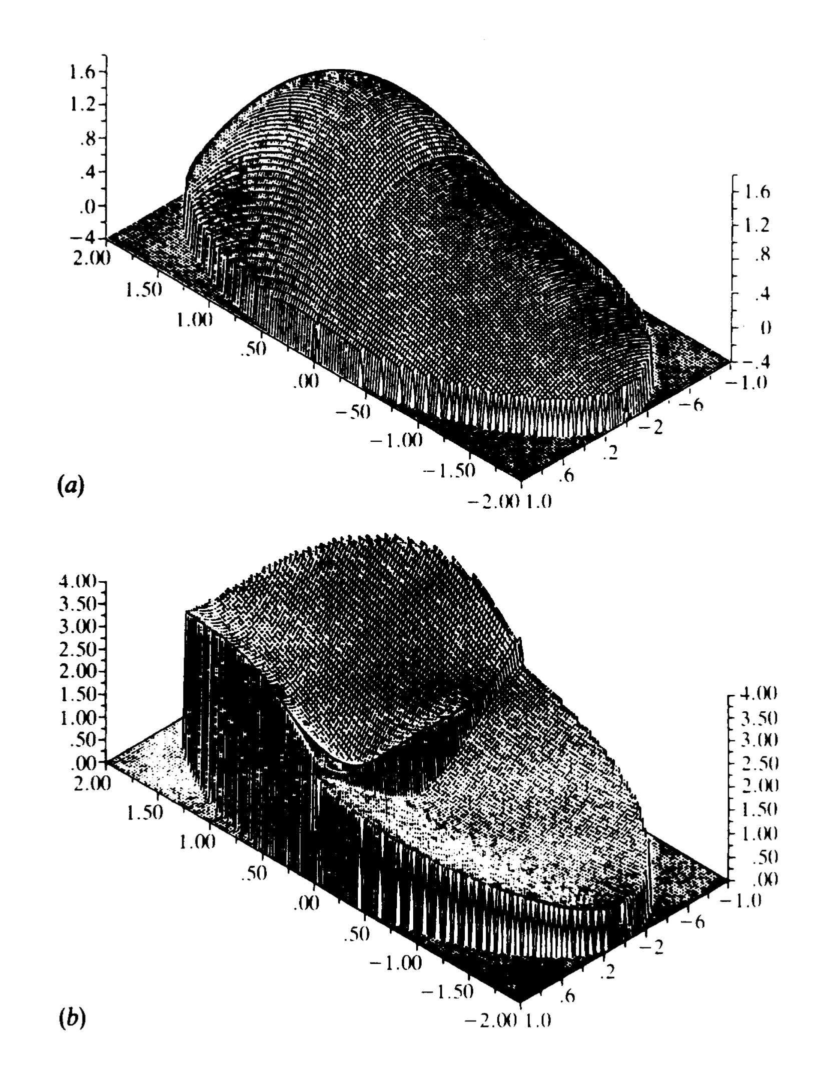


Figura 13.9 "Elementos" de contorno tipo Trefftz conectando dos dominios de diferentes materiales en una barra elíptica sometida a torsión (ecuaciones de Poisson).[36] (*a*) Función de tensión dada por las variables internas mostrando casi continuidad completa. (*b*) componente x de la tensión de cortante (gradiente de la función de tensión mostrando discontinuidad abrupta en la unión de los materiales).

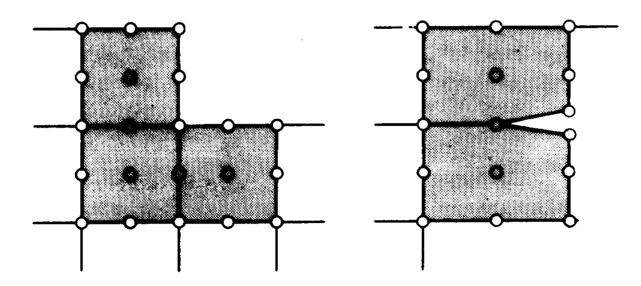


Figura 13.10 "Superelementos" construídos por ensamblaje de elementos estándar en desplazamientos mediante funciones globales eliminando singularidades limitadas al ensamblaje.

13.7 Comentarios finales

Las posibilidades de elementos o "superelementos" construídos mediante los métodos mixtos de campo incompleto de este capítulo son muy grandes. Muchos han encontrado uso práctico en programas de ordenador existentes como "elementos híbridos"; otros sólo ahora están disponibles de forma amplia. Una investigación más a fondo establecerá las ventajas de algunas de las formas descubiertas, y creemos que el uso de tales desarrollos aumentará en el futuro.

Referencias

1. N.E. WIBERG, "Matrix structural analysis with mixed variables", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **8**,1 67–94, 1974.
2. T.H.H. PIAN, y K. SUMIHARA, "Rational approach for assumed stress finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **20**, 1685–95, 1984.
3. T.H.H. PIAN y D.P. CHEN, "Alternative ways for formulation of hybrid elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **18**, 1679–84, 1982.
4. T.H.H PIAN, D.P. CHEN, y D. KONG, "A new formulation of hybrid/mixed finite elements", *Comp. Struct.*, **16**, 81–7, 1983.
5. P. TONG, "A familly of hybrid elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **18**, 1455–68, 1982.
6. T.H.H. PIAN y P. Tong, "Relations between incompatible displacement model and hybrid strain model", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **22**, 173–181, 1986.
7. T.H.H. Pian, "Derivation of element stiffness matrices by asssumed stress distribution", *JAIAA*, **2**, 1333–5, 1964.
8. S.N. ATLURI, R.H. GALLAGHER y O.C. ZIENCKIEWICZ, (Eds), *Hybrid y Mixed Finite Element Methods*, Wiley, 1983.
9. T.H.H. PIAN, "Element stiffness matrices for boundary compatibility and for prescribed boundary stresses", *Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*, AFFDL–TR–66–80, pp. 457–78, 1966.

10. R.D. COOK y J. AT-ABDULLA "Some plane quadrilateral 'hybrid' finite elements", JAIAA, **7**, 1969.
11. T.H.H. PIAN y P. TONG "Basis of finite element methods for solid continua", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **1**, 3–28, 1969.
12. S.N. ATLURI, "A new assumed stress hybrid finite element for solid continua", *JAIAA*, **9**, 1947–9, 1971.
13. R.D. HENSHELL, "On hybrid finite elements", *The Mathematics of finite Elements and Applications* (ed. J. R. Whiteman), pp. 299–312, Academic Press, 1973.
14. R. DUNGAR y R.T. SEVERN, "Triangular finite elements of variable thickness", *J. Strain Analysis*, **4**, 10–21, 1969.
15. R.J. ALLWOOD y G.M.M. CORNES, "A polygonal finite element for plate bending problems using the assumed stress approach", *Int. J. Num. Meth. Eng.* **1**, 135–49, 1969.
16. T.H.H. PIAN, "Hybrid models", *Numerical and Computer Merthods in Applied Meschanics*, (eds S. J. Fenves *et alien*), Academic Press, 1971.
17. R. ALI, S. GOPALACHARYULU y P.W. SHARMAN, "The development of a series of hybrid-stress finite elements", *Proc. World Congress Finite Element Methods in Structural Mechanics*, **2**, 13.1–13.27, 1978.
18. Y. YOSHIDA, "A hybrid stress element for thin shell analysis", *Finite Element Methods in Engineering* (eds V. Pulmano y A. Kabaila), pp. 271–86, University of New South Wales, Australia, 1974.
19. R.D. COOK y G. LADKANY "Observations regarding assumed-stress hybrid plate elements", *Int. J. Mum. Meth. Eng.*, **8**, (3), 513–20, 1974.
20. J.P. WOLF, "Generalized hybrid stress finite element models", *JAIAA*, **11**, 1973.
21. P.L. GOULD y S.K. SEN, "Refined mixed method finite elements for shells of revolution", *Proc. 3rd Air Force Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics"*, Wright-Patterson AF Base, Ohio, 1971.
22. P. TONG, "New displacement hybrid finite element models for solid continua", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **2**, 73–83, 1970.
23. E. Trefftz, "Ein Gegenstruck zum Ritz'schem Verfohren", *Proc. 2nd Int. Cong. Appl. Mech.*, Zurich, 1926.
24. P.K. BANERJEE y R. BUTTERFIELD, *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill, London and New York, 1981.
25. J.A. LIGGET y P.L.F. LIU, *The Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow*, Allen and Unwin, London, 1983.
26. C.A BREBBIA y S. Walker, *Boundary Element Technique in Engineering*, Newnes–Butterworth, London, 1980.
27. I. Herrera, "Boundary methods: a criteria for completeness", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **77**(8), 4395–8, August 1980.
28. I. HERRERA, "Boundary methods for fluids", Chapter 19 of *Finite Elements in Fluids*, Vol. 4 (eds R. H. Gallagher, H. D. Norrie, J. T. Oden y O. C. Zienkiewicz), Wiley, New York, 1982.
29. I. HERRERA, " Trefftz method", *Progress in Boundary Element Methods*, Vol. 3 (ed. C. A. Brebbia), Wiley, New York, 1983.
30. I. HERRERA y H. GOURGEON, "Boundary methods, C-complete system for

Stokes problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **30**, 225–44, 1982.
31. I. HERRERA, y F.J. SABINA, "Connectivity as an alternative to boundary integral equations: construction of bases", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **85**(5), 2059–63, May 1978.
32. O.C. ZIENKIEWICZ D.W. KELLY y P. BETTESS, "The coupling of the finite element method and boundary solution procedures", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**, 355–75, 1977.
33. O.C. ZIENKIEWICZ, D.W. KELLY y P. BETTESS, "Marriage a la mode–the best of both worlds (finite elements and boundary integrals)", Chapter 5 of *Energy Methods in Finite Element Analysis* (eds R. Glowinski, E. Y. Rodin y O. C. Zienkiewicz), pp. 81–107, Wiley, London and New York, 1979.
34. O.C. ZIENKIEWICZ y K. MORGAN, *Finite Elements and Approximation*, Wiley, London and New York, 1983.
35. O.C. ZIENKIEWICZ, "The generalized finite element method– state of the art and future directions", *J. Appl. Mesach.*, 50th anniversary issue, 1983.
36. A.P. ZIELINSKI y O.C. ZIENKIEWICZ, "Generalized finite element analysis with T complete boundary solution", *Int. J. Num. Mech. Eng.*, **21**, 509–28, 1985.
37. J. JIROUSEK, "A powerful finite element for plate bending", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **12**, 77–96, 1977.
38. J. JIROUSEK, "Basis for development of large finite elements locally satisfying all field equations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **14**, 65–92, 1978.
39. J. JIROUSEK y P. TEODORESCU, "Large finite elements for the solution of problems in the theory of elasticity", *Comp. Struct.*, **15**, 575–87, 1982.
40. J. JIROUSEK y LAN GUEX, "The hybrid Trefftz finite element model and its application to plate bending", *Int. J. Num. Mech. Eng.*, **23**, 651–93, 1986.
41. R. PILTNER, "Special elements with holes and internal cracks", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **21**, 1471–85, 1985.

Capítulo 14

ESTIMACIÓN DE ERROR Y REFINAMIENTO ADAPTABLE EN ELEMENTOS FINITOS

14.1 Introducción

A lo largo de este libro se ha enfatizado el hecho de que el método de los elementos finitos ofrece solamente *una aproximación* a la solución exacta de un problema planteado matemáticamente. Se ha establecido que las diferencias entre las soluciones *exactas* y *aproximadas*, ej., errores en desplazamientos

$$\mathbf{e}_u = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} \tag{14.1a}$$

o errores en tensiones

$$\mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \tag{14.1b}$$

disminuyen si el tamaño de la subdivisión "h" se reduce o si "p", el orden del polinomio en la función de prueba utilizada, crece. Esto estableció la convergencia y, por tanto, la aceptabilidad o no de varias formas de elementos finitos. Sin embargo, la cuestión central de determinar la magnitud del error para un grado de subdivisión dado, no ha sido tratado hasta ahora (sino comparando en algunos ejemplos las soluciones de "elementos finitos" con la "exacta").

En este capítulo nos ocuparemos de determinar aproximadamente:

a) el error que se ha cometido en un análisis particular de elementos finitos llevado a cabo (estimación de error *a posteriori*);
b) la manera óptima de refinar la aproximación para conseguir resultados de una exactitud deseada dada, de forma económica.

En general la interacción entre *a*) y *b*) será *adaptable* y serán necesarios muchos pasos para alcanzar resultados óptimos.

Se discutirán los principios de tal análisis completamente adaptable pero también se indicarán caminos más directos que pueden ser utilizados en la práctica.

En la regeneración de la malla el usuario tiene a menudo la opción de ahorrar esfuerzos de preparación de datos manteniendo la malla original y refinando localmente, bien sea

a) introduciendo nuevos elementos del tipo usado originalmente pero de menor tamaño (h), o

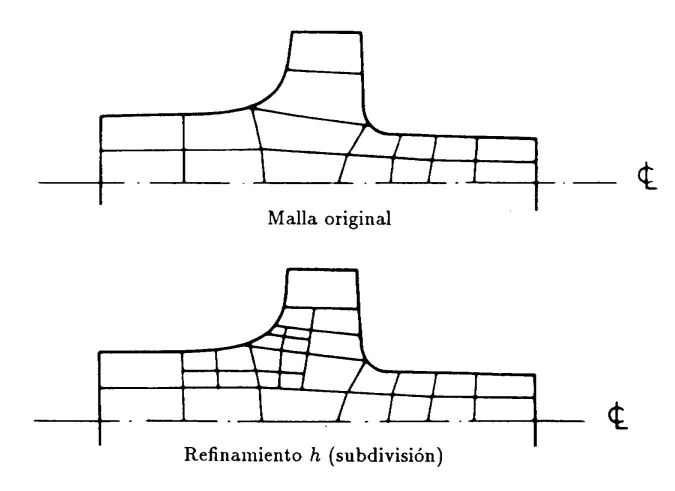
b) utilizando la misma definición de elementos pero aumentando el orden de polinomios utilizados (p) implicando nuevos "nodos" colocados en tales elementos, o

c) utlilizando una combinación de *a*) y *b*).

En la Figura 14.1 se muestran las dos primeras posibilidades, llamadas a menudo refinamientos "h" o "p", respectivamente. En el Capítulo 8, al tratar de las funciones de forma jerárquicas, se ha indicado cómo pueden añadirse fácilmente términos polinómicos más altos a los elementos existentes. Señalaremos aquí los méritos de tales formas en el análisis adaptable.

14.2 Normas de error y velocidad de convergencia

La determinación del error local en la forma dada en las Ecs. (14.1) no es conveniente en general y a veces puede resultar engañosa. Por ejemplo, bajo una carga puntual ambos errores, en desplazamientos y



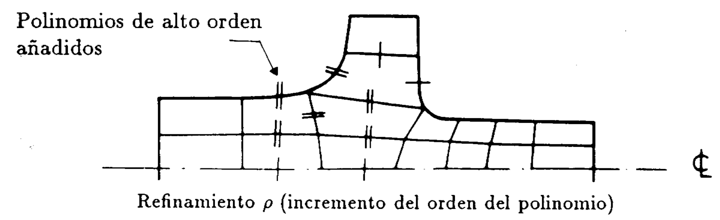


Figura 14.1 Refinamientos posibles de una malla poco precisa.

tensiones, serán localmente infinitos pero la solución en conjunto podría ser aceptable. Situaciones similares se darán cerca de ángulos entrantes donde, como es sabido, existen singularidades de tensiones en análisis elásticos y singularidades del gradiente en problemas de campo. Por esta razón se introducen a menudo varias "normas" que representan alguna cantidad escalar integral para medir el error o la función misma.

Si, por ejemplo, estamos interesados en una ecuación general lineal de la forma de la Ec. (9.6) (véase Capítulo 9), esto es,

$$\mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{p} = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \tag{14.2}$$

se puede definir una "norma de energía" escrita para el error como

$$\|e\| = \left(\int_\Omega \mathbf{e}^T \mathbf{L} \mathbf{e} \, d\Omega \right)^{1/2} \equiv \left[\int_\Omega (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})^T \mathbf{L} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \, d\Omega \right]^{1/2} \tag{14.3}$$

Esta medida escalar corresponde de hecho a la raíz cuadrada del funcional cuadrático, tal como se ha discutido en la Sec. 9.11 del Capítulo 9 y buscado su mínimo en el caso de un operador auto-adjunto $\mathbf{L}$.

Para problemas de elasticidad la norma de energía se define de forma idéntica y resulta, tras integración por partes, en

$$\|e\|^2 = \int_\Omega (\mathbf{S}\mathbf{e})^T \mathbf{D} (\mathbf{S}\mathbf{e}) \, d\Omega \tag{14.4}$$

(con la notación utilizada en el Capítulo 2).

Aquí $\mathbf{e}$ viene dado por la Ec. (14.1a) y el operador $\mathbf{S}$ define las deformaciones como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\mathbf{u} \qquad \text{y} \qquad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{u}} \tag{14.5}$$

y $\mathbf{D}$ es la matriz de elasticidad (véase Capítulo 2), resultando las tensiones

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \text{y} \qquad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{14.6}$$

La norma de energía de la Ec. (14.4) puede, por lo tanto, escribirse alternativamente como

$$\begin{aligned} \|e\| &= \left[\int_\Omega (\boldsymbol{\varepsilon} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \, d\Omega \right]^{1/2} \\ &= \left[\int_\Omega (\boldsymbol{\varepsilon} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})(\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \, d\Omega \right]^{1/2} \\ &= \left[\int_\Omega (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \, d\Omega \right]^{1/2} \end{aligned} \tag{14.7}$$

y su relación con la energía de deformación es evidente.

Fácilmente pueden ser ideadas otras normas escalares. Por ejemplo, la llamada norma de desplazamientos L_2 o el error en tensiones pueden escribirse como

$$\|e_u\|_{L_2} = \left[\int_\Omega (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})^T (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})\, d\Omega\right]^{1/2} \tag{14.8}$$

$$\|e_\sigma\|_{L_2} = \left[\int_\Omega (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})\, d\Omega\right]^{1/2} \tag{14.9}$$

Tales normas nos permiten fijarnos en la cantidad particular de interés y realmente es posible calcular valores tales como la "raíz cuadrada de la media cuadrática" (RMC) de su error. Por ejemplo, el error RMC en tensiones, $\Delta\sigma$, es para el dominio Ω

$$|\Delta\sigma| = \left(\frac{\|e_\sigma\|^2_{L_2}}{\Omega}\right)^{1/2} \tag{14.10}$$

Cualquiera de las normas mencionadas puede ser evaluada sobre el dominio total o sobre subdominios, o incluso sobre elementos individuales.

Nótese que

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|e\|_i^2 \tag{14.11}$$

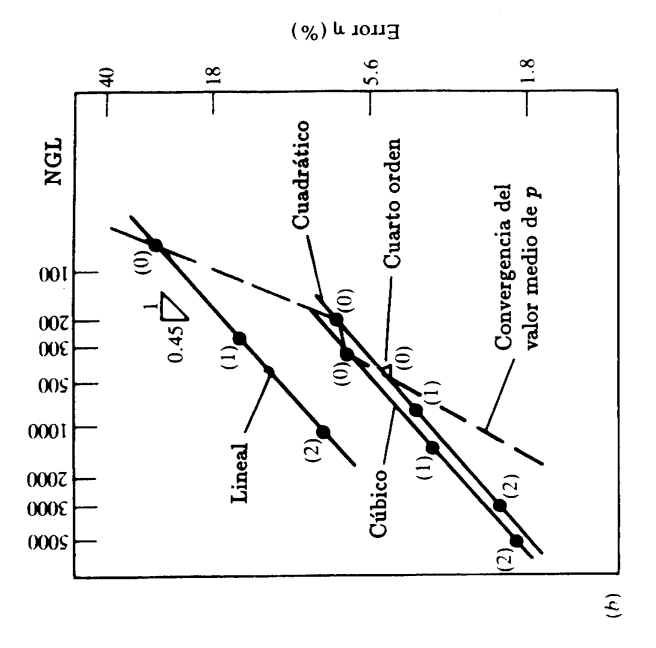
donde i se refiere a elementos individuales Ω_i, tal que su unión sea Ω.

Señalemos además que la norma de energía expresada en función de las tensiones, la norma L_2 de tensiones y el error RMC en tensiones tienen una estructura muy similar y que éstas se aproximan de forma parecida.

Al llegar a este punto es interesante recordar la discusión del Capítulo 2 (Sec. 2.6) en relación con las velocidades de convergencia. De ahí observaremos que con funciones de prueba de grado p en la formulación en desplazamientos, los errores en tensiones eran de orden $O(h)^p$. Este orden debería, por lo tanto, corresponderse con el error de la norma de energía, $\|e\|$. Estos argumentos son correctos para problemas sin singularidades, pero es interesante ver cómo la regla anterior es violada cuando éstas existen.

En las Figuras 14.2 y 14.3 se muestran dos problemas similares de análisis de tensiones, en el primero de los cuales existe una fuerte singularidad. En ambas figuras se muestra la variación del *error relativo de la norma en energía* (en porcentaje):

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|u\|} \times 100\% \tag{14.12}$$



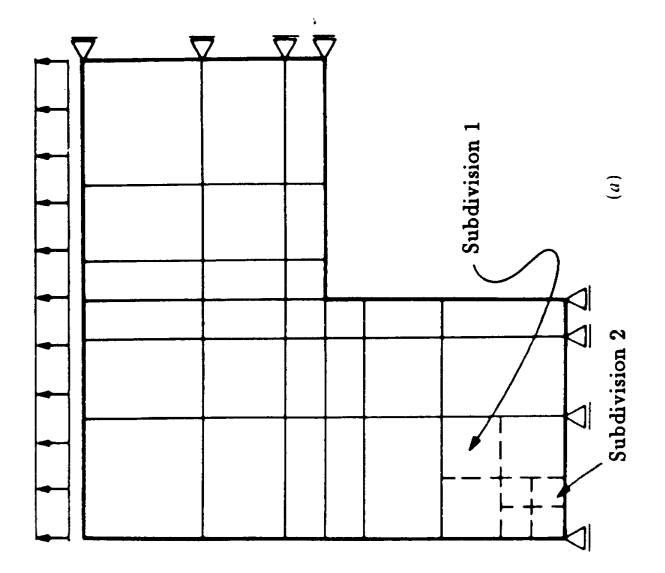
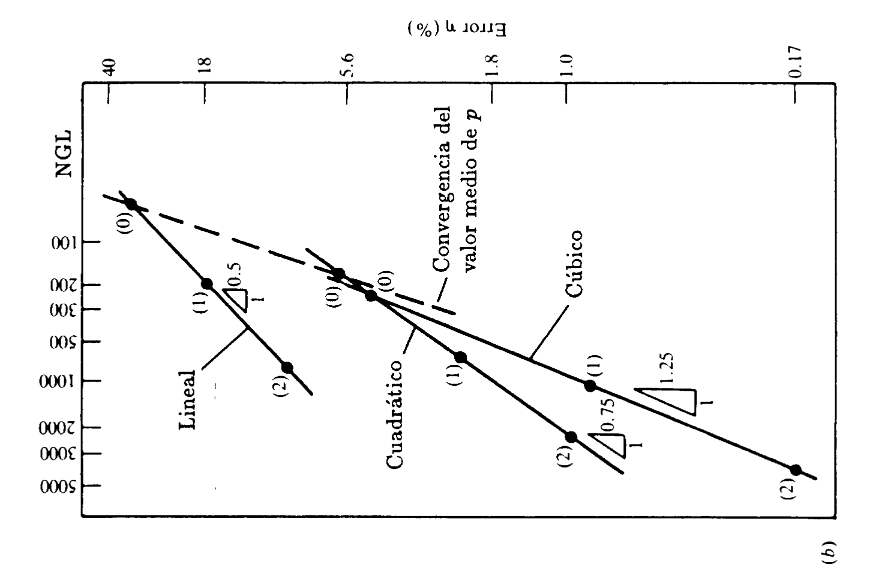


Figura 14.2 Análisis de un dominio en forma L. Convergencia tipo h para varios valores de p. Tensión plana $E = 1$, $\nu = 0.3$. (*a*) Malla inicial (0) y subdivisiones uniformes (i). (*b*) % error (η) versus NGL (número de grados de libertad).



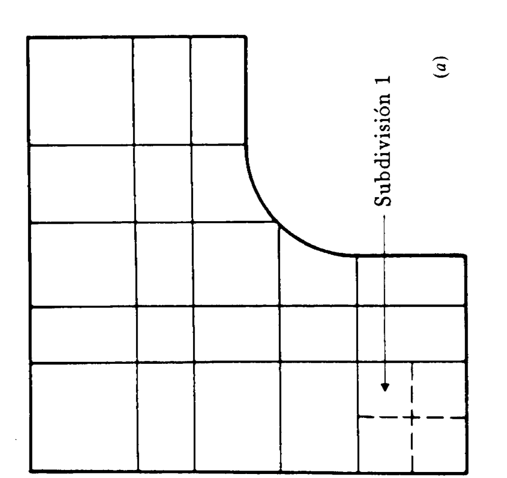


Figura 14.3 Análisis de un dominio de forma L sin singularidad. h convergencia para varios valores de p y subdivisión uniforme. Tensión plana $E = 1$, $\nu = 0.3$. (a) Malla inicial (0). (b) (η) versus NGL (número de grados de libertad).

para un refinamiento tipo h resultante de una subdivisión uniforme de la malla inicial y para un refinamiento tipo p en el que el orden polinómico aumenta en toda la malla original.

Señalemos dos hechos interesantes: Primero, las velocidades de convergencia h para varios grados polinómicos de las funciones de forma son casi las mismas en el ejemplo con singularidad (Figura 14.2) y están muy por debajo del orden teórico predicho $O(h)^p$, [o $O(\text{NGL})^{-p/2}$ ya que NGL (número de grados de libertad) es aproximadamente inversamente proporcional a h^2].

Segundo, como muestra el caso de la Figura 14.3, donde se evita la singularidad redondeando el ángulo, la velocidad de convergencia mejora para elementos de orden más alto, aunque una vez más no se consiguen las velocidades teóricas (asintóticas).

La razón de este comportamiento es claramente la singularidad y en general puede demostrarse que la velocidad de convergencia para problemas con singularidad es

$$O(\text{NGL})^{-[\min(\lambda,p)]/2} \tag{14.13}$$

donde λ es un número asociado a la intensidad de la singularidad. Para problemas de elasticidad, λ varía desde 0.5 para una fisura casi cerrada a 0.71 para un ángulo de 90.°[1] La velocidad de convergencia que se muestra en la Figura 14.2 se acerca al valor controlado por la singularidad para todos los valores de p utilizados en los elementos.

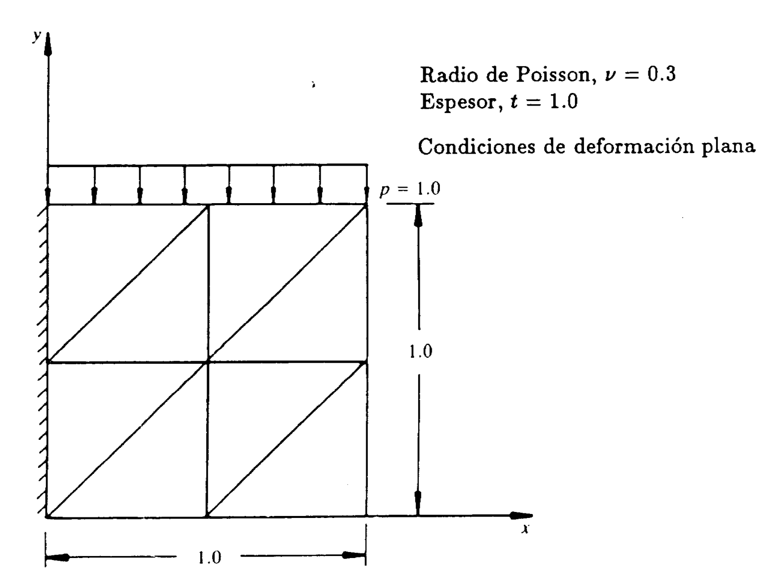
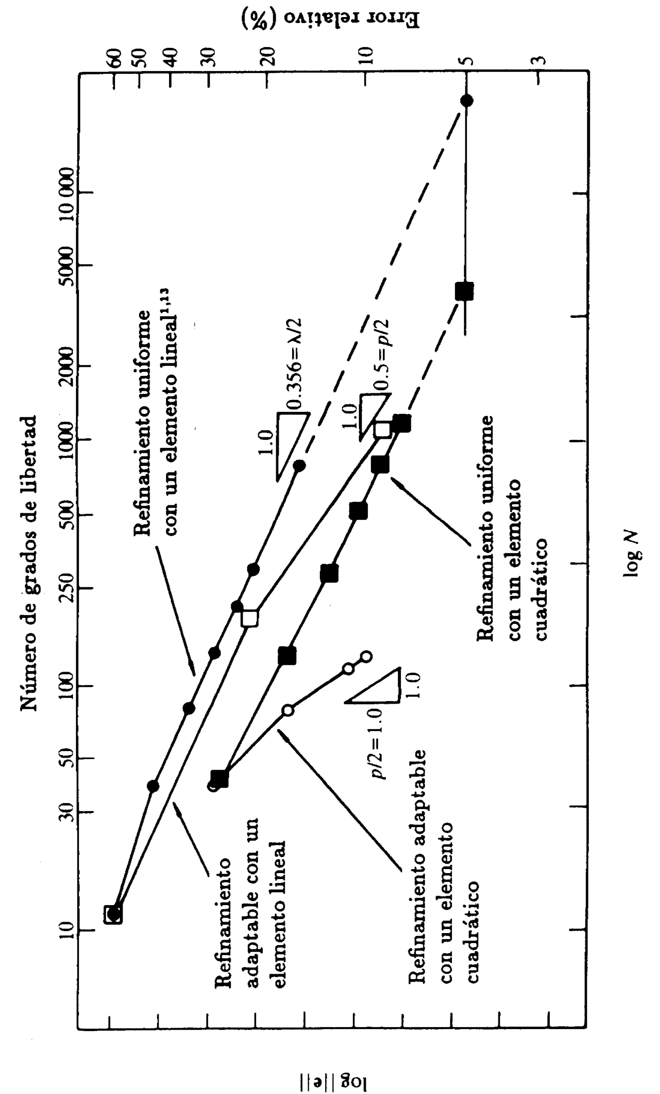


Figura 14.4 Viga corta en voladizo.



$\lambda/2 = 0.356$, Velocidad teórica de convergencia para un refinamiento uniforme

$p/2$ máxima velocidad de convergencia

Figura 14.5 Velocidades experimentales de convergencia para la viga corta en voladizo.

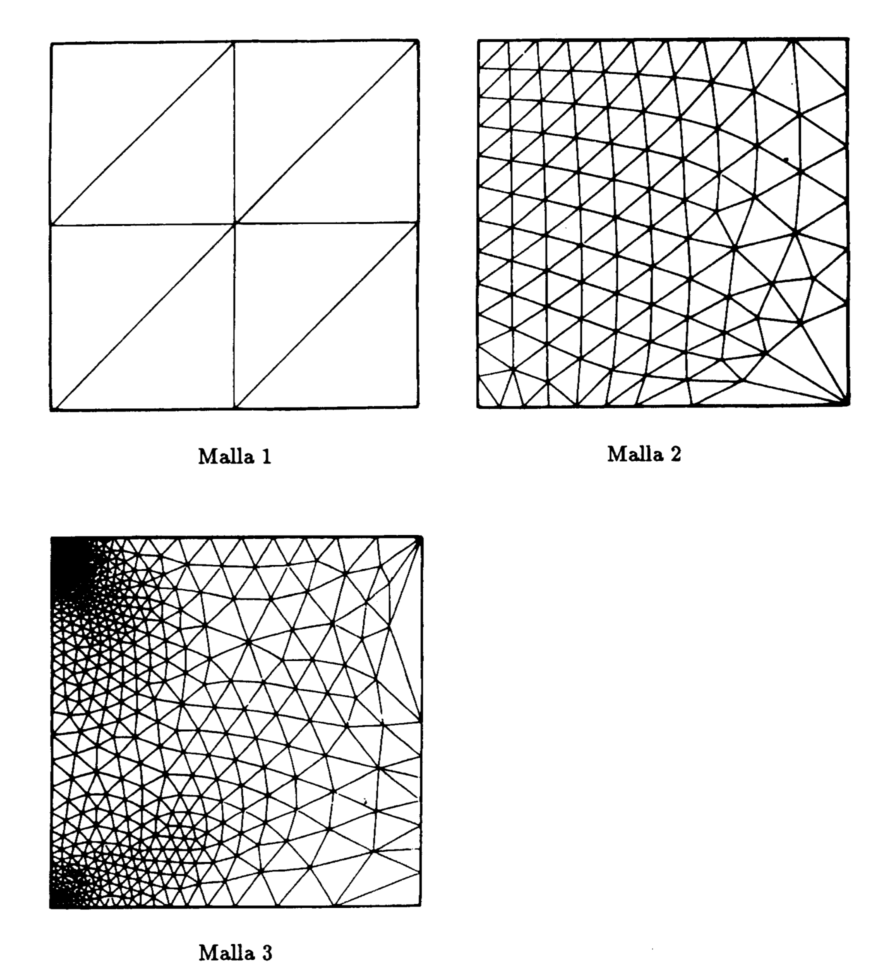


Figura 14.6 Malla adaptable de elementos triangulares lineales para la viga corta en voladizo.

En la Figura 14.4 se muestra otro problema con una influencia de singularidad fuerte tomado de la misma referencia.[1] En este caso, la convergencia que se muestra en la Figura 14.5 para una subdivisión uniforme de triángulos cuadráticos y lineales es casi la misma en el límite (dominado por la singularidad), a menos que se utilice la secuencia de las mallas que se muestra en la Figura 14.6. Se intenta conseguir para esta secuencia una *malla óptima* en la que el error en cada elemento sea (en el límite) constante.

Para tales mallas la velocidad de convergencia teórica, dependiente de p, es alcanzable, tal como se muestra en la Figura 14.5.

Más adelante se trata sobre cómo puede conseguirse tal subdivisión de malla.

Una última observación evidente tras haber examinado los resultados de la Figura 14.2 ó la 14.3 muestra que la convergencia tipo p tiene en general una velocidad más alta. Estos resultados se demuestran simplemente examinando las respuestas dadas para la misma malla utilizando polinomios diferentes.

Una vez más es posible mostrar que la velocidad de convergencia tipo p alcanza valores muy altos si se utiliza una malla óptimamente subdividida.[2]

El hecho de que determinar la velocidad de convergencia *a priori* resulte imposible en la práctica quiere decir que con la excepción de los problemas más simples, la extrapolación tipo Richardson a la respuesta exacta (descrita en el Capítulo 2) no es generalmente útil a la hora de estimar errores. Por esta razón utilizaremos procedimientos más sofisticados en lo que sigue.

14.3 Estimación de error–un procedimiento simple y efectivo para el refinamiento tipo h

En aproximaciones irreducibles (en desplazamientos) a la elasticidad lineal y problemas de campo tratados anteriormente se ha supuesto en general una aproximación C_0 continua para $\hat{\mathbf{u}}$ (el desplazamiento) y esto conlleva tensiones discontinuas $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$. En el Capítulo 12 se ha mostrado cómo se puede obtener un campo continuo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}^*$ mediante promediado o "proyección". Así, si $\boldsymbol{\sigma}^*$ es un campo C_0 continuo interpolado mediante funciones del mismo tipo que las utilizadas para representar el campo $\hat{\mathbf{u}}$, osea,

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}} \tag{14.14}$$

y

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \tag{14.15}$$

la ecuación aproximada se consigue exigiendo la igualdad entre $\boldsymbol{\sigma}^*$ y $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, de forma ponderada, esto es,

$$\int_\Omega \mathbf{N}^T(\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})\, d\Omega = 0 \tag{14.16}$$

dando

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^* = \mathbf{A}^{-1}\left(\int_\Omega \mathbf{N}^T\hat{\boldsymbol{\sigma}}\, d\Omega\right) = 0 \tag{14.17a}$$

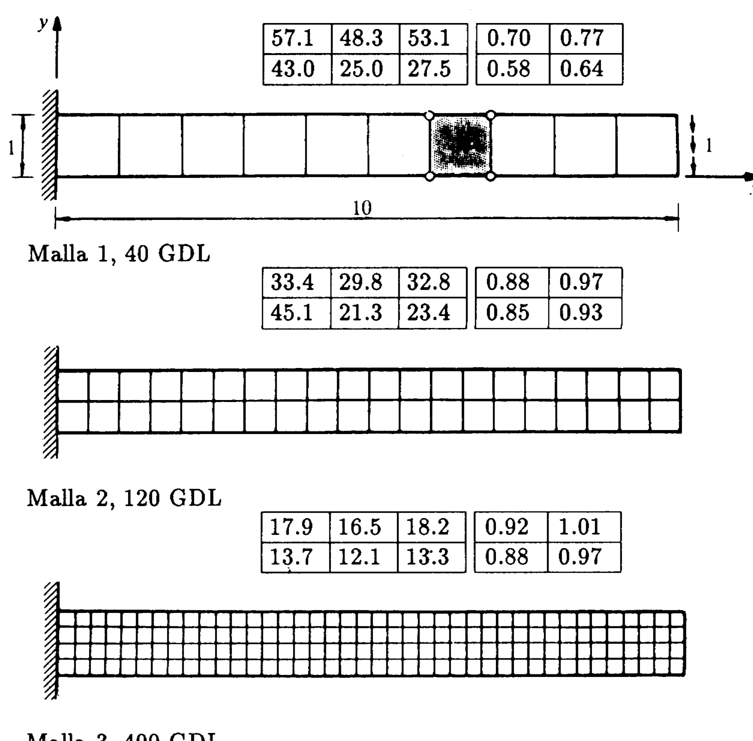
con

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \tag{14.17b}$$

y

$$\mathbf{A} = \int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{N}\, d\Omega \tag{14.17c}$$

El cálculo anterior se simplifica si se hace una aproximación diagonal o aglutinada para $\mathbf{A}$ y se sigue además un proceso iterativo de solución (véase el Capítulo 12, Sec. 12.6.1).



η	η°	η^*	θ	θ^*
η_L	η_L°	η_L^*	θ_L	θ_L^*

η % de error real en norma de energía
η° % de error predicho en norma de energía
η^* % de error predicho usando factor de corrección
θ Indice de efectividad
θ^* Indice de efectividad usando factor de corrección
El sufijo L indica uso de la norma L_2

Figura 14.7 Elementos bilineales. Viga en voladizo, tensión plana, $E = 10^5$, $\nu = 0.3$. Análisis y estimación del error para subdivisión uniforme.

Con ambos campos $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ y $\boldsymbol{\sigma}^*$ disponibles se tiene que el error en tensiones puede ***estimarse con gran precisión*** como

$$\boxed{\mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}} \tag{14.18}$$

La inserción de esta cantidad en las Ecs. (14.7), (14.9) o (14.10) ***después de la solución del problema*** (esto es, ***a posteriori***) permite calcular el error en cualquiera de las normas tratadas hasta ahora.

Las estimaciones así obtenidas son excelentes, tal como indican las comparaciones con los valores exactos de error. Las Figuras desde la 14.7 a la 14.15[3] muestran una serie de problemas en los que se representa el índice de efectividad de la estimación de error para diversas mallas y tipos de elemento. Este índice se define como

$$\theta = \frac{\|e\|_{\text{estimado}}}{\|e\|_{\text{exacto}}} \tag{14.19}$$

0.57	0.90	0.78	0.81	0.80	0.80	0.80	0.81	0.83	0.77

0.70	1.21	1.02	1.08	1.06	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.06	1.06	1.06	1.06	1.05	1.03	1.02	0.99	0.92	0.62
0.70	1.21	1.02	1.08	1.06	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.06	1.06	1.06	1.06	1.05	1.03	1.02	0.99	0.92	0.62

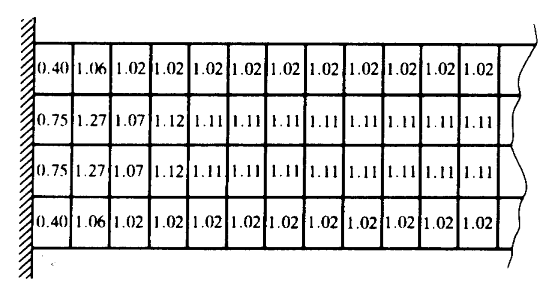


Figura 14.8 Indices de efectividad local para el problema de la Figura 14.7 (mallas 1 a 3)(θ^* norma de energía; en la norma L_2 los resultados son muy similares).

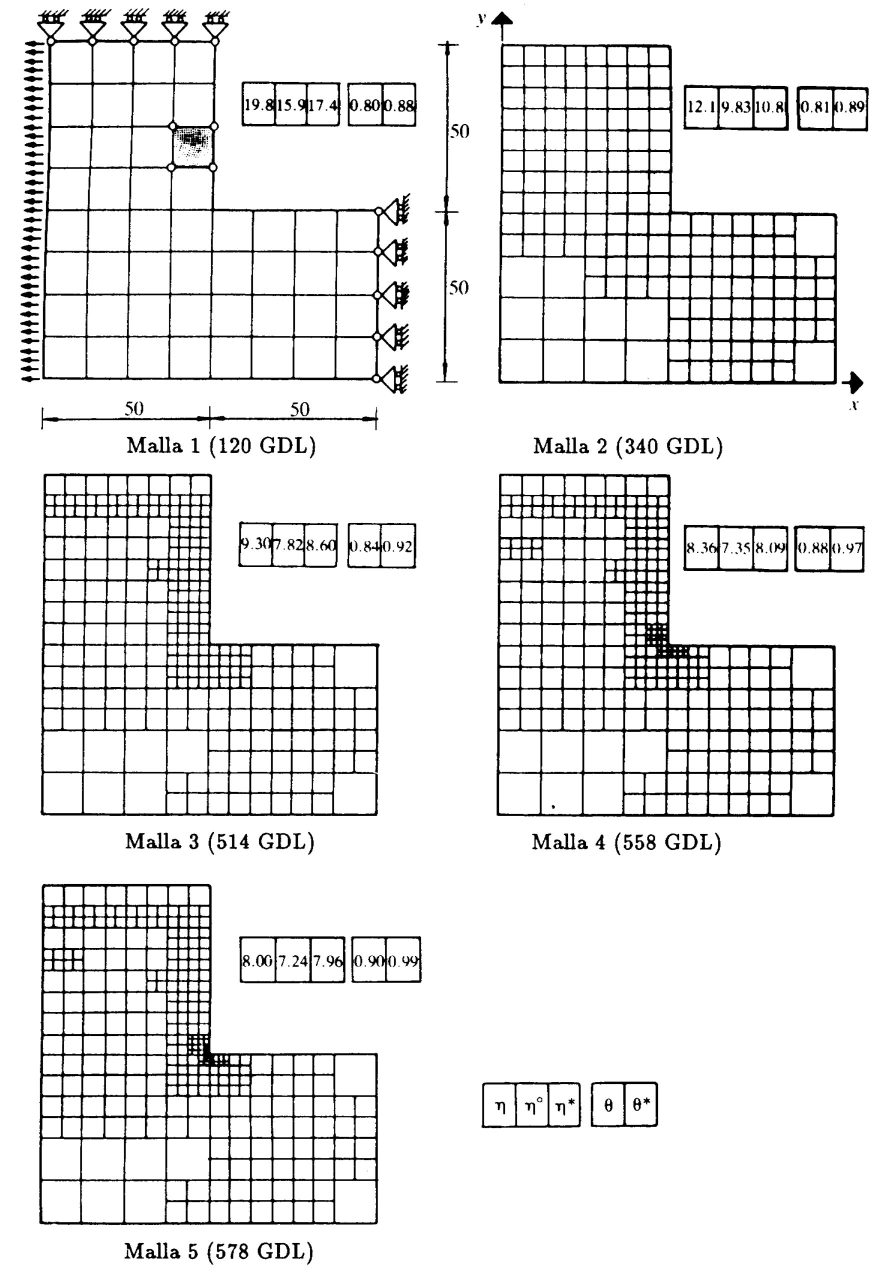
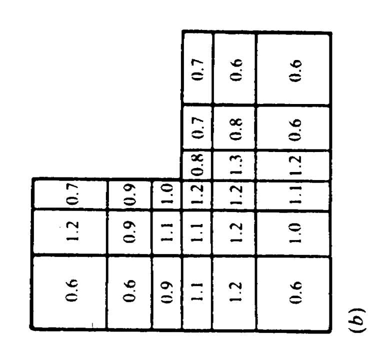


Figura 14.9 Elementos bilineales. Una región en forma de L en tensión plana. Secuencia de refinamiento de malla.



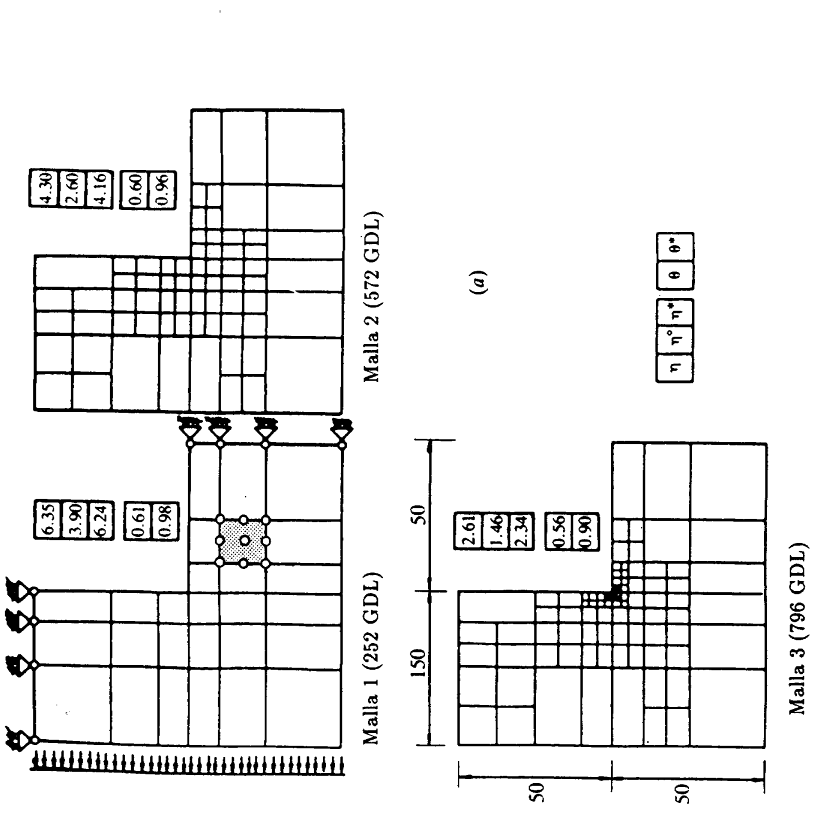


Figura 14.10 Elementos bicuadráticos (nueve nodos). Región en forma de L en tensión plana. (*a*) Secuencias de refinamiento de malla. (*b*) Indices de efectividad local (malla 1)(θ^*).

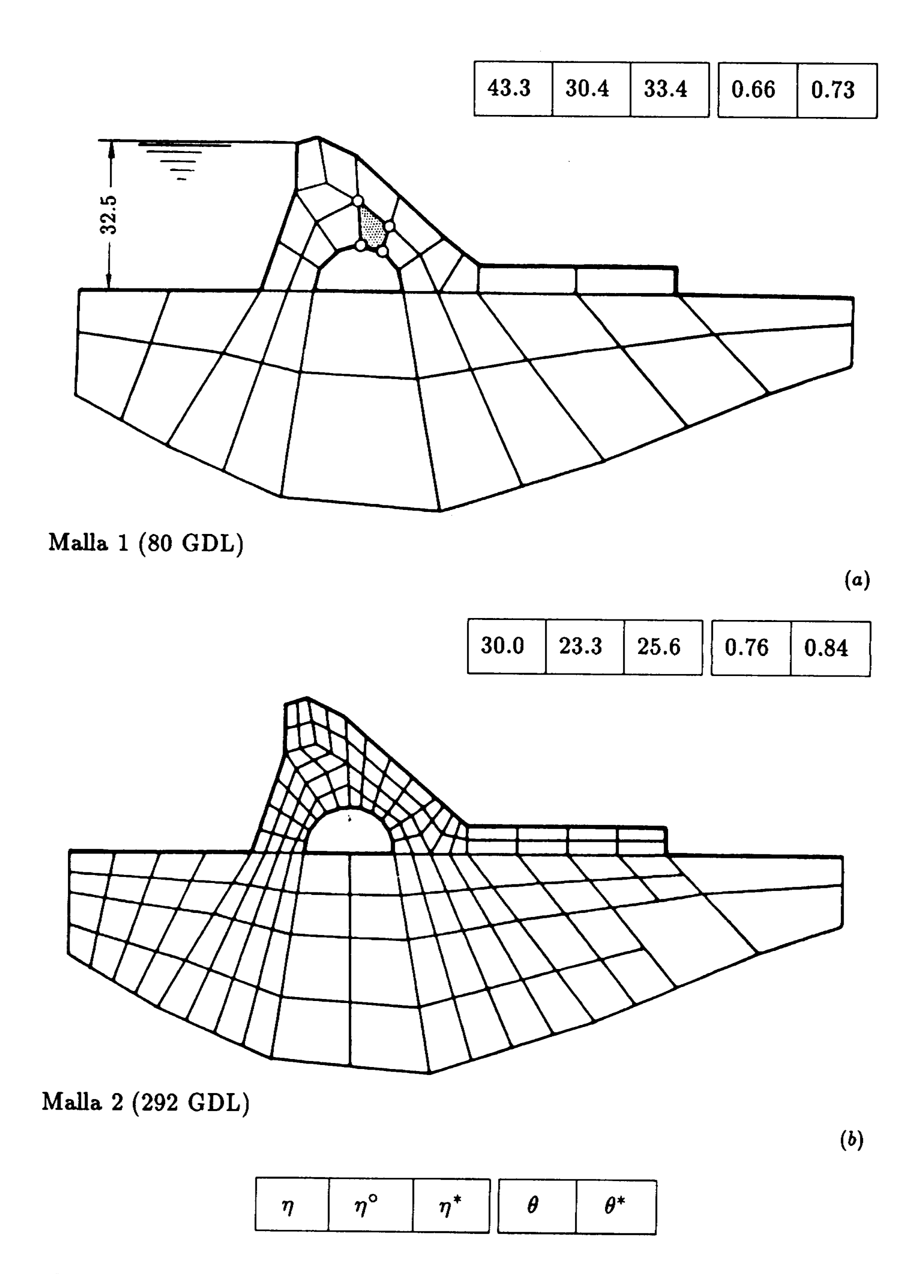


Figura 14.11 Elementos bilineales. Análisis en deformación plana de una presa con una cavidad. Carga de agua solamente. Varios niveles de refinamiento (*a*) – (*d*).

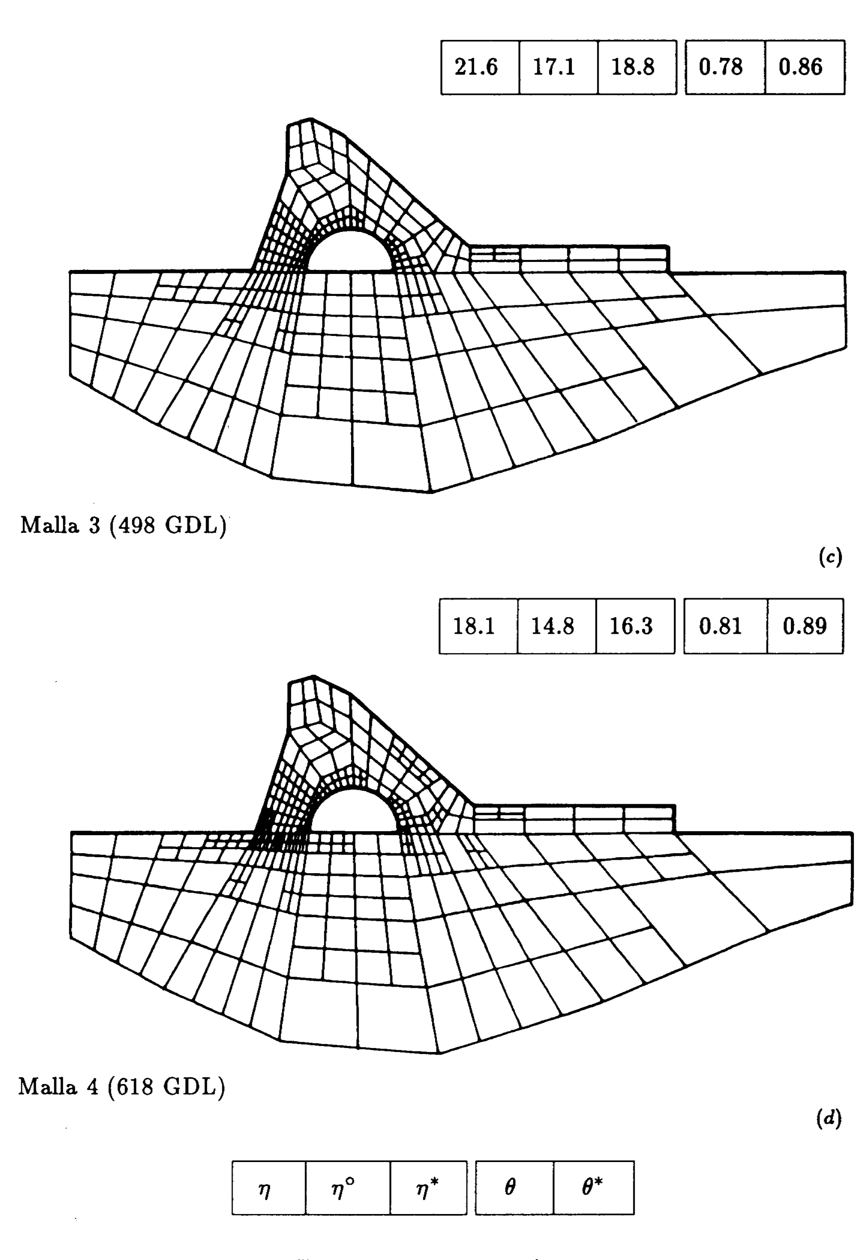


Figura 14.11 continuación

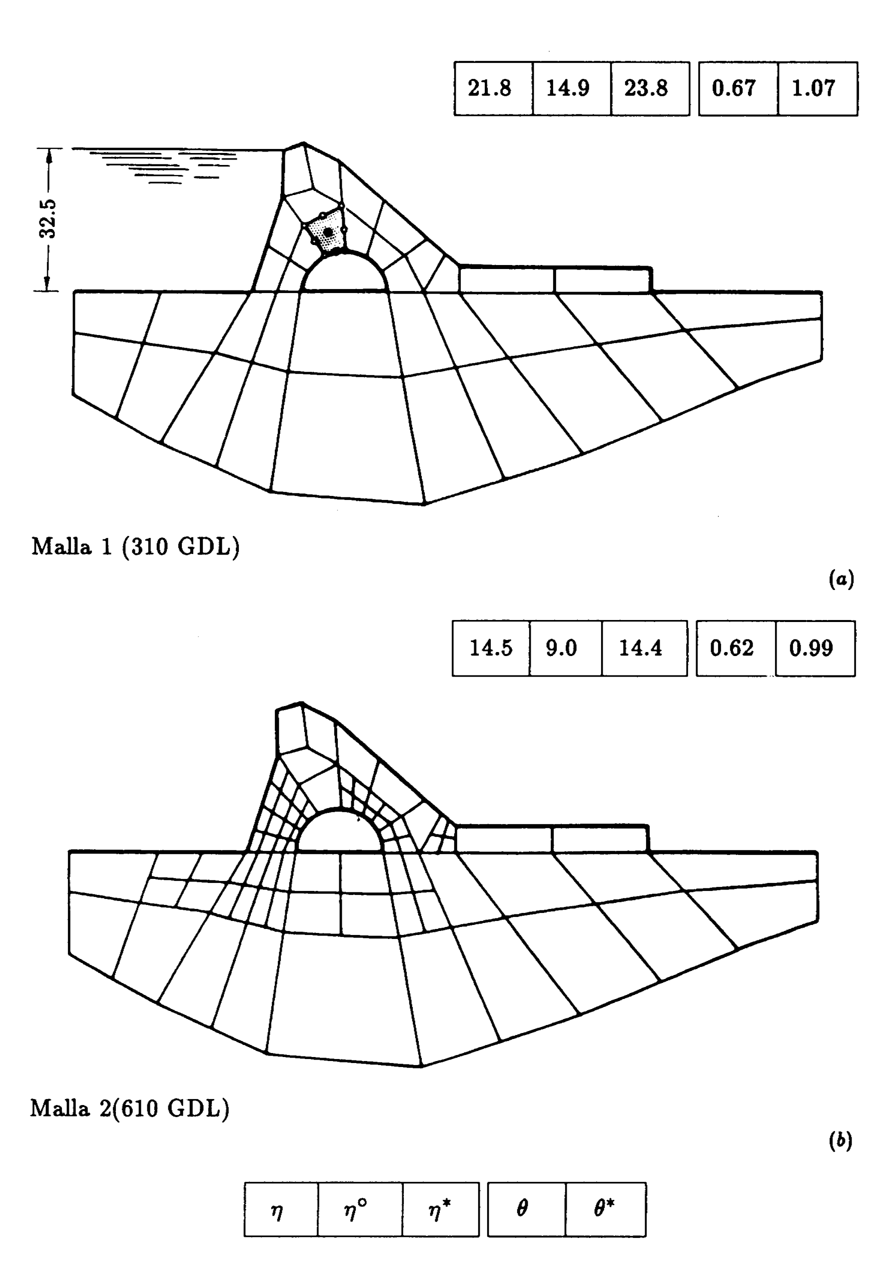
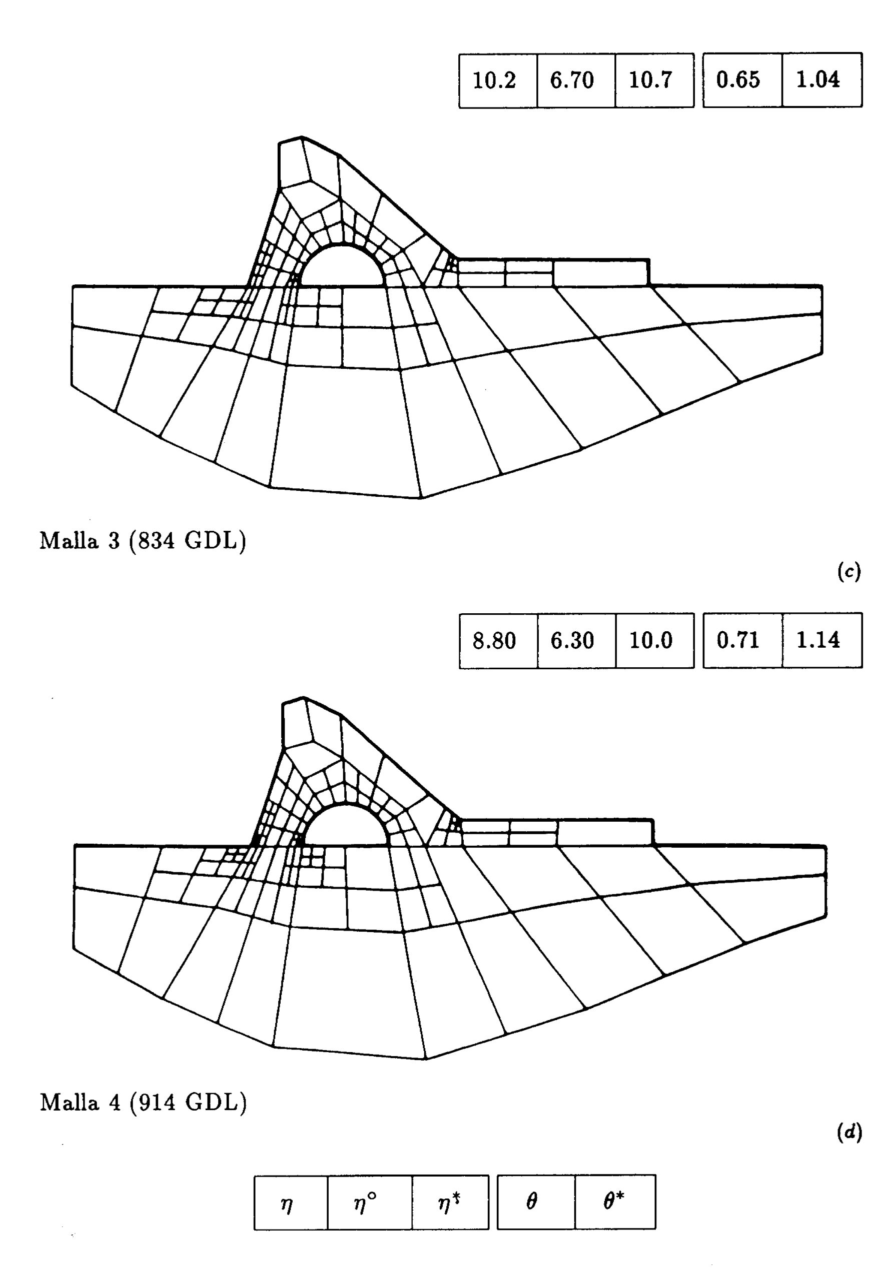


Figura 14.12 Elemento bicuadrático. Análisis en deformación plana de una presa con una cavidad. Carga de agua solamente. Varios niveles de refinamiento $(a) - (d)$.

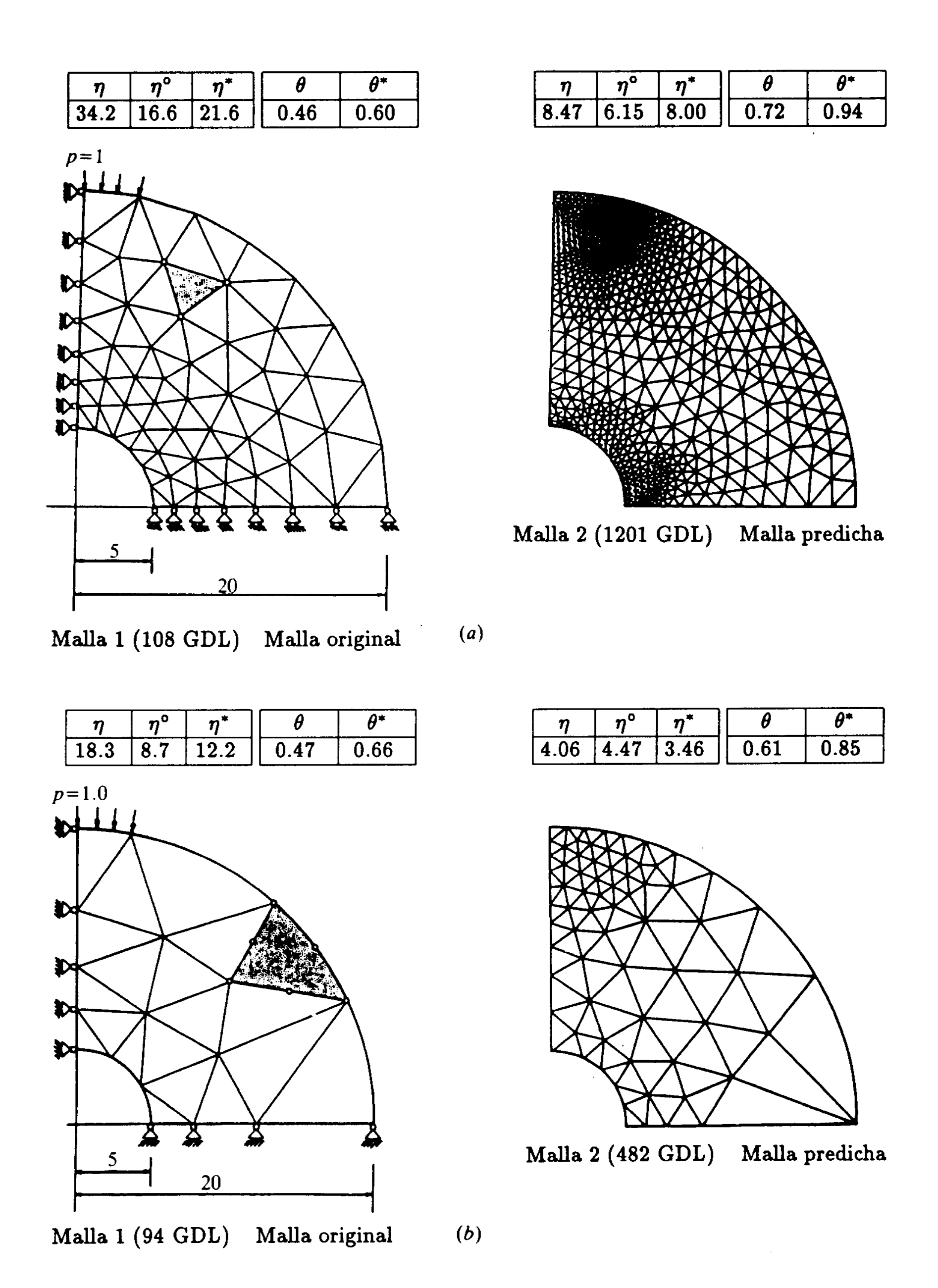


10.2	6.70	10.7	0.65	1.04

8.80	6.30	10.0	0.71	1.14

η	η°	η^*	θ	θ^*

Figura 14.12 continuación



η	η°	η^*	θ	θ^*
34.2	16.6	21.6	0.46	0.60

η	η°	η^*	θ	θ^*
8.47	6.15	8.00	0.72	0.94

η	η°	η^*	θ	θ^*
18.3	8.7	12.2	0.47	0.66

η	η°	η^*	θ	θ^*
4.06	4.47	3.46	0.61	0.85

Figura 14.13 Generación automática de malla para alcanzar el 5 por ciento de precisión: cilindro grueso bajo carga diametral. (*a*) Elementos lineales. (*b*) Elementos cuadráticos.

Se encuentra empíricamente que este índice (y, por tanto, la estimación del error) puede mejorarse corrigiendo la estimación directa por un factor constante. Este factor resulta ser para problemas de elasticidad:

1.1 para elementos cuadrilaterales bilineales
1.3 para elementos triangulares lineales
1.6 para elementos bicuadráticos de nueve nodos
1.4 para elementos triangulares cuadráticos

De esta manera se obtienen los valores θ^* y η^* que se muestran en las figuras. Sin embargo, incluso sin este recurso empírico los índices de efectividad son buenos.

Aunque resulta intuitivamente "obvio" que las tensiones "alisadas" $\boldsymbol{\sigma}^*$ son más precisas que las discontinuas y que, por consiguiente las estimaciones basadas en la Ec. (14.18) deberían ser buenas, se necesitaría una prueba más matemática de la corrección de la estimación. En la Figura 14.16 se ofrece una explicación simple y válida en la que se muestra una solución para un problema elástico unidimensional con un módulo constante, utilizando elementos cuadráticos y lineales. En este caso los valores de σ son proporcionales a du/dx, y es evidente que el proceso de proyección o alisado es simplemente *una aproximación en diferencias de mayor orden de la derivada nodal* que la utilizada para calcular $\hat{\sigma}$. Los argumentos son similares en dos y tres dimensiones.†

El estimador de error presentado anteriormente es uno de los más sencillos de evaluar y de utilizar en la práctica. Su exactitud puede compararse con otros en los que el cálculo conlleva la evaluación de residuos obtenidos mediante la sustitución de la solución aproximada $\hat{\mathbf{u}}$ en la ecuación del problema. [Véase Ec. (14.2)], esto es,

$$\mathbf{r} = \mathbf{L}\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{p} \tag{14.20}$$

Este residuo se evalúa fácilmente dentro de cada elemento, pero en las interfases entre elementos resulta infinito si, por ejemplo, se tiene una ecuación diferencial de segundo orden y una aproximación continua C_0. El efecto integrado del residuo cerca de una interfase I cuando $d\Omega \rightarrow 0$ es equivalente a una integral de línea de la discontinuidad en los gradientes de $\mathbf{u}$ (o tracciones en un problema elástico) que llamaremos $\mathbf{J}$ (salto). Así

$$\int_\Omega \mathbf{r}\, d\Omega \equiv \int_I \mathbf{J}\, dI \tag{14.21}$$

Los estimadores de error que usan la norma de energía obtenidos por varios autores[4–10] tienen la forma general (con $r^2 \equiv \mathbf{r}^T\mathbf{r}$, etc.)

† Una prueba más formal de validez de la estimación de error aquí propuesta ha sido presentada muy recientemente.[17]

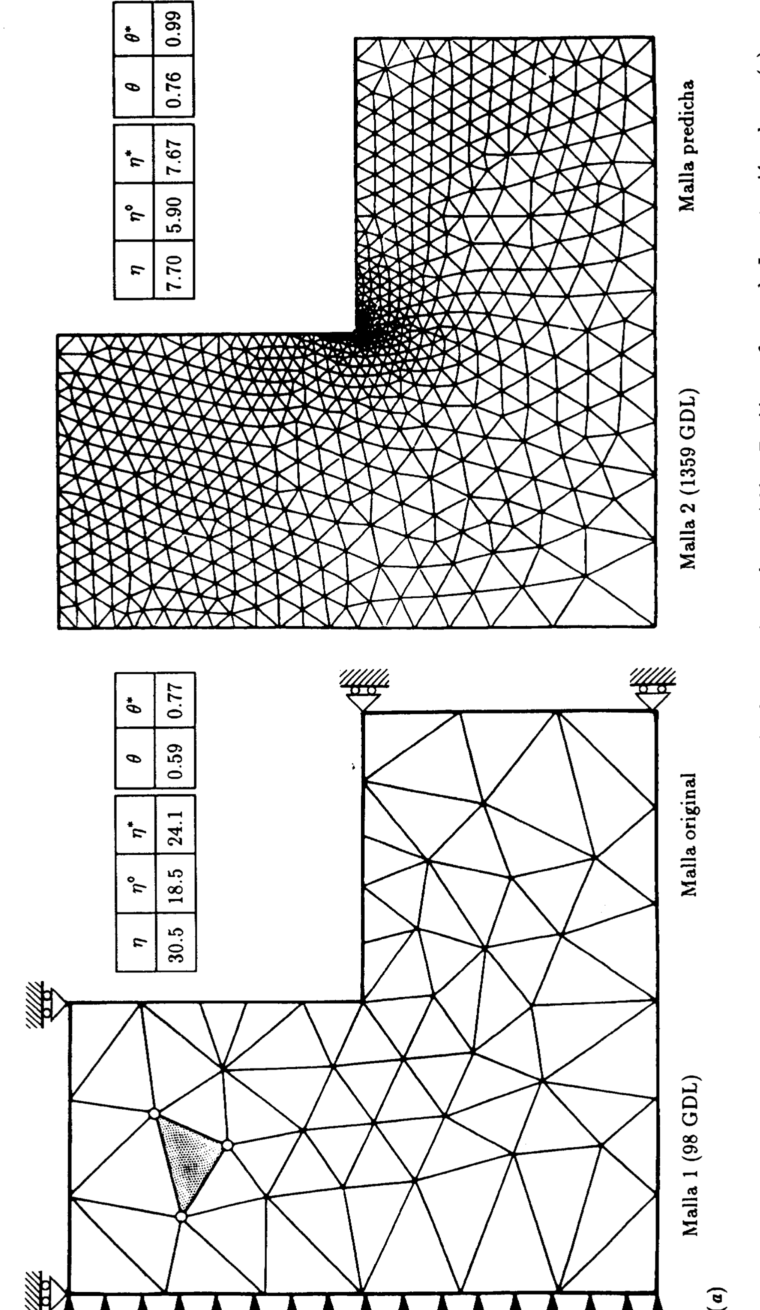


Figura 14.14 Generación automática de malla para conseguir el 5 por ciento de precisión. Región en forma de L en tensión plana. (*a*) Triángulo lineal. (*b*) Triángulo cuadrático. Con la estrategia de refinamiento de la Ec. (14.32) se alcanza, en una operación, una precisión del 4.61 por ciento con 358 GDL[14].

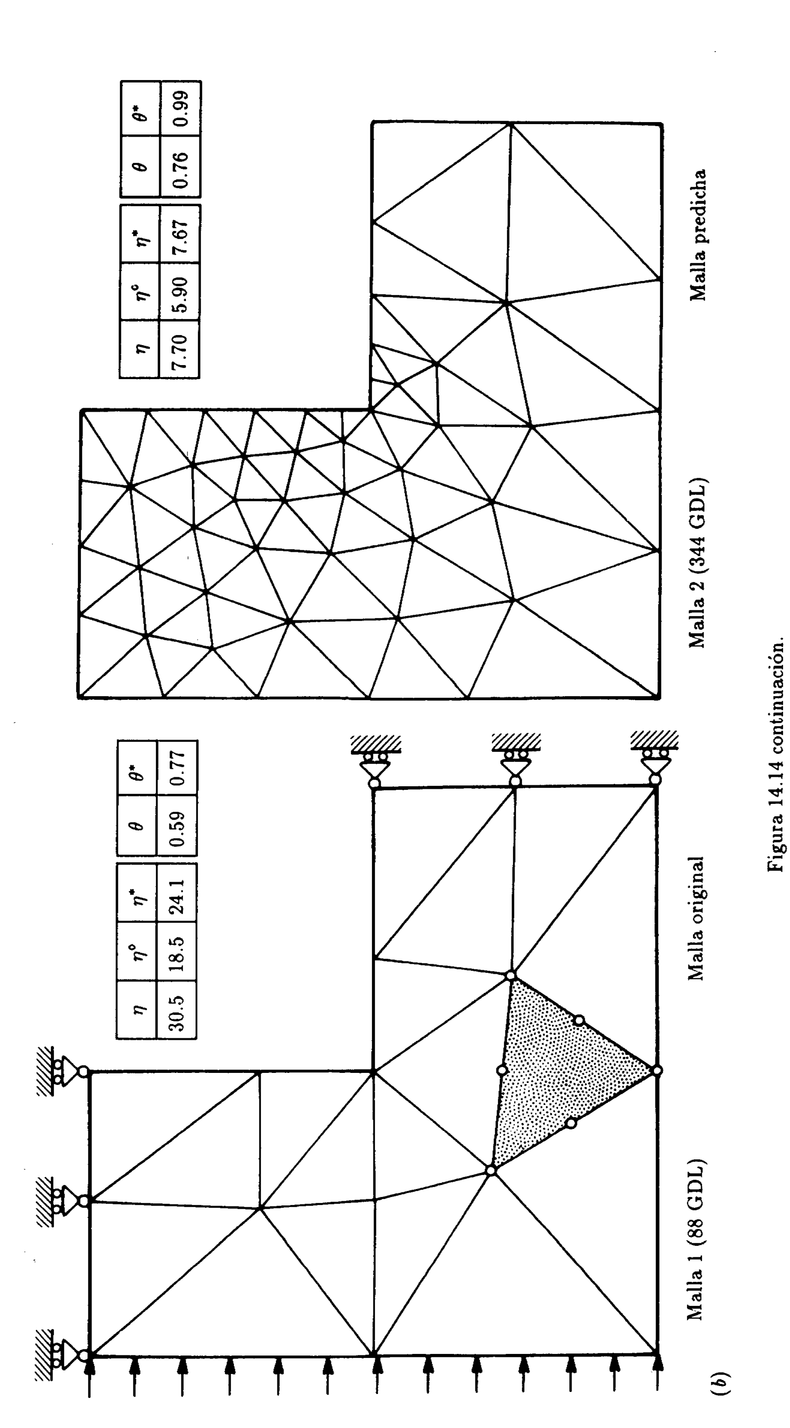


Figura 14.14 continuación.

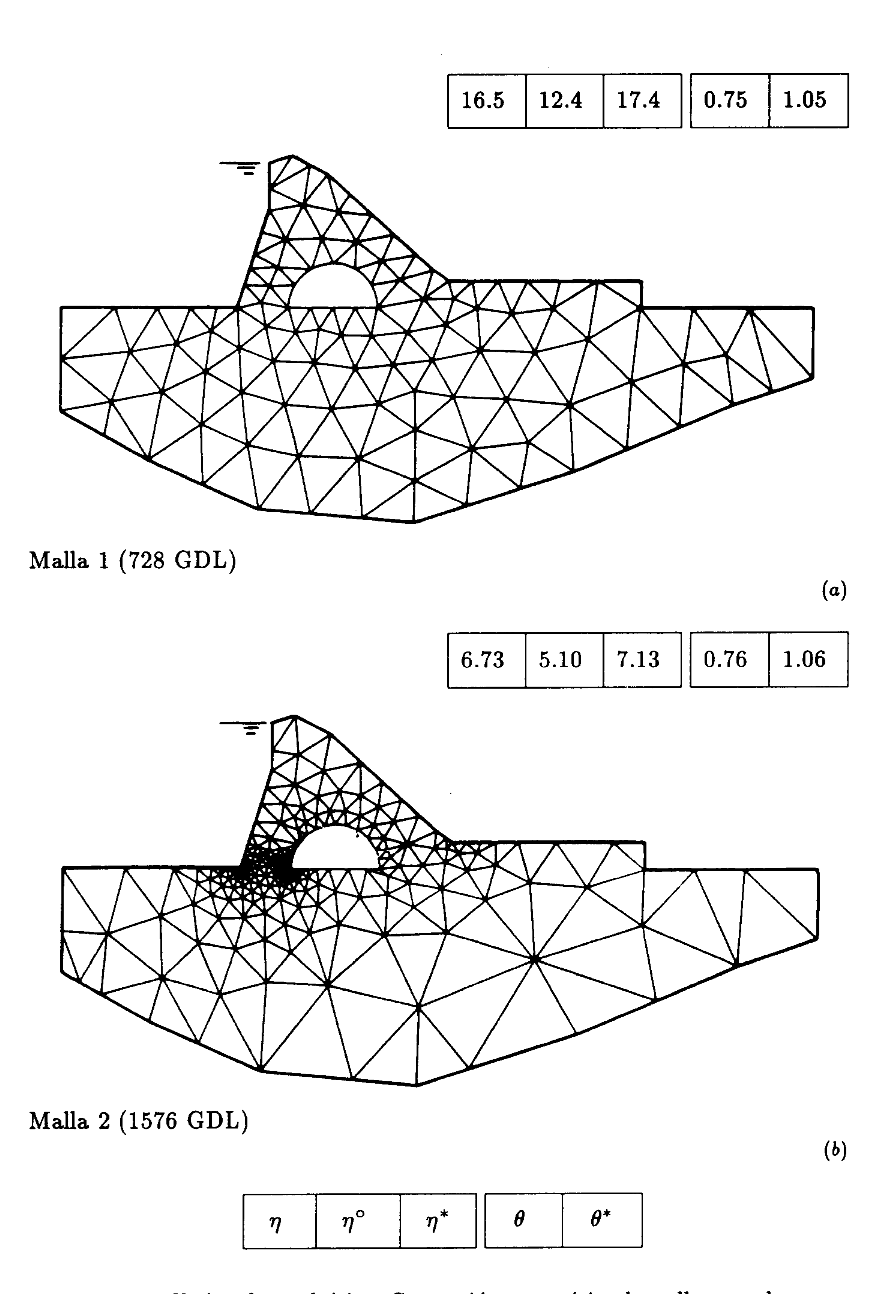
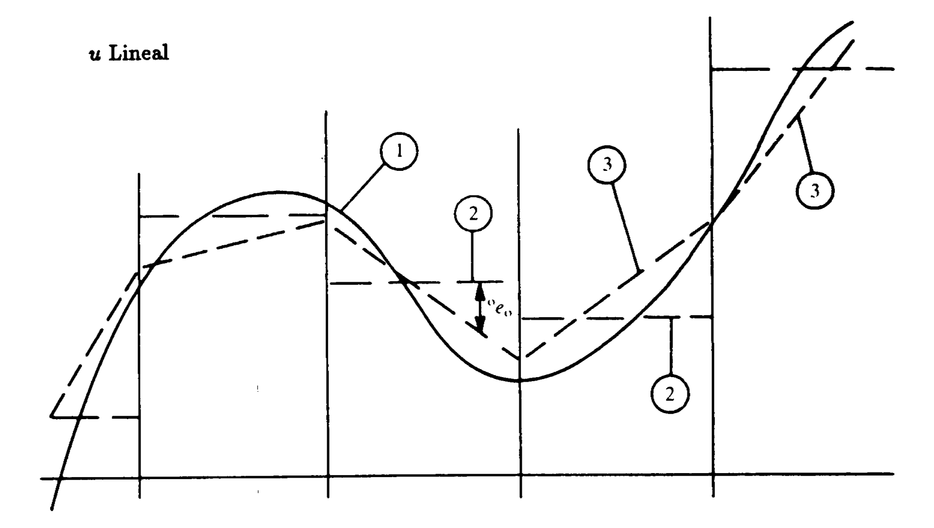


Figura 14.15 Triángulo cuadrático. Generación automática de malla para alcanzar el 5 por ciento de precisión. Análisis de deformación plana de una presa con una cavidad bajo carga de agua solamente. (*a*) Malla original. (*b*) Malla refinada. Con la estrategia de refinamiento de la Ec. (14.32) se alcanza, en una operación, una precisión del 4.88 por



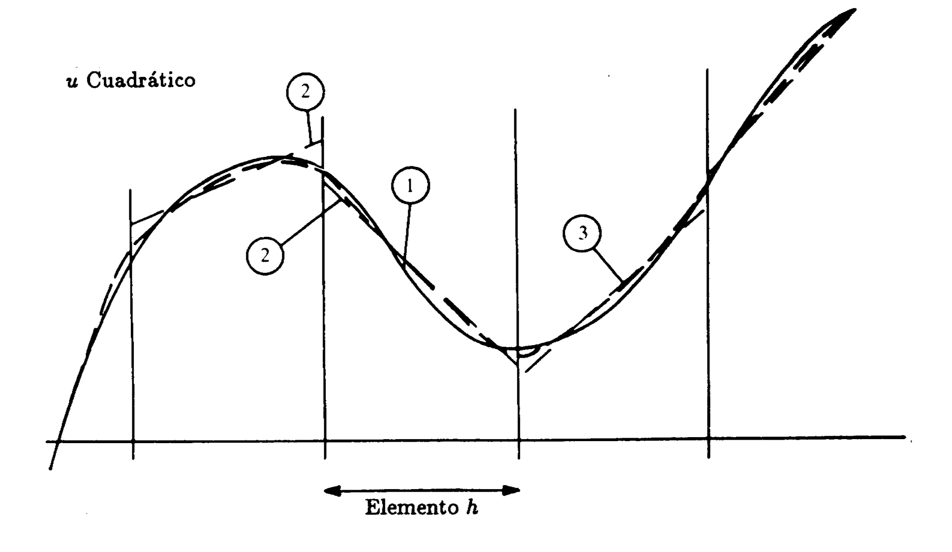


Figura 14.16 Porqué la proyección da una aproximación de mayor orden. (1) σ Solución exacta. (2) $\hat{\sigma}$ solución MEF = aproximación por mínimos cuadrados a σ (discontinua). (3) σ^* solución proyectada = aproximación por mínimos cuadrados a $\hat{\sigma}$ (continua de alto orden).

$$\|e\|^2 = C_1 \int_\Omega r^2\, d\Omega + C_2 \int_I J^2 dI \tag{14.22}$$

donde Ω es el dominio total e I la interfase total entre elementos.

Para un único elemento, una expresión particular obtenida en las referencias 5 y 6 para problemas de dos dimensiones da una contribución elemental de la forma

$$\|e\|_i^2 = \frac{h^2}{24kp^2} \int_{\Omega^e} r^2\, d\Omega + \frac{h}{24kp} \int_{I^e} J^2 dI \tag{14.23}$$

donde k depende del problema (siendo $E/(1-\nu)$ para elasticidad en tensión plana), p es el orden polinómico de las aproximaciones utilizadas, y h el tamaño del elemento.

Más adelante se volverá a tratar un estimador de este tipo, cuando se discutan los problemas de convergencia p, pero ahora señalaremos que:

a) el estimador es más complejo de utilizar que el obtenido anteriormente ya que implica una evaluación de integrales de línea de las discontinuidades;
b) se puede demostrar que el estimador simple utilizando alisado de tensiones es equivalente al obtenido y probado anteriormente por Babuska y Rheinboldt[5], por lo menos en el caso de elementos bilineales (cuatro nodos);[5,11]
c) que para elementos de bajo orden la mayor contribución a las integrales (14.23) viene del término que incluye discontinuidades de las fuerzas de superficie entre elementos. Los usuarios de elementos finitos a menudo toman estas discontinuidades como una medida directa de error y existe de hecho una justificación teórica para esto como se muestra en lo anterior.

14.4 El proceso de refinamiento h – Adaptabilidad

Los estimadores de error tratados en la sección anterior permiten determinar la norma de energía global del error y los errores a nivel local (a nivel de elemento) también quedan normalmente bien representados como muestran las Figuras 14.8 y 14.10. Si estos errores se encuentran dentro de los límites prescritos por el analista, entonces el trabajo está claramente terminado. Sin embargo, frecuentemente estos límites se ven superados y es necesario refinar. La pregunta que se trata en esta sección es cómo llevar a cabo este refinamiento de forma óptima. Naturalmente son posibles muchas estrategias y mucho depende de los *objetivos* que se quieren alcanzar.

En el caso más simple se intentará, por ejemplo, hacer el porcentaje de error relativo en la norma de energía η menor que algún valor especificado $\bar{\eta}$ (por ejemplo 5 por ciento en muchas aplicaciones de ingeniería). Así debe conseguirse que

$$\eta \leq \bar{\eta} \tag{14.24}$$

En una "malla óptima" es deseable que la distribución del error en norma de energía (esto es, $\|e\|_i$) sea igual para todos los elementos. Así, si el error permisible total está determinado (suponiendo que viene dado por el resultado de un análisis aproximado) por

$$\bar{\eta}(\|\hat{\mathbf{u}}\|^2 + \|e\|^2)^{1/2} \tag{14.25}$$

se podría exigir una condición en la que el error en cualquier elemento i fuera

$$\|e\|_i < \bar{\eta}\left(\frac{\|\hat{\mathbf{u}}\|^2 + \|e\|^2}{m}\right)^{1/2} \equiv \bar{e}_m \tag{14.26}$$

donde m es el número de elementos implicados.

Los elementos en los que no se cumple lo anterior son claros candidatos para el refinamiento. Así, si se define el coeficiente

$$\frac{\|e\|_i}{\bar{e}_m} = \xi_i \tag{14.27}$$

se refinará allí donde †

$$\xi_i > 1 \tag{14.28}$$

El refinamiento podría llevarse a cabo progresivamente refinando solamente un cierto número de elementos en los que ξ_i sea mayor que un cierto límite y cada vez dividir a la mitad el tamaño de tales elementos. En las Figuras 14.9 a 14.12 se muestra este tipo de proceso conocido como *enriquecimiento de malla.* El proceso de refinamiento mostrado arriba, aunque lleva finalmente a una solución satisfactoria obtenida con un número relativamente pequeño de grados totales de libertad, no es en general económico, ya que el número total de soluciones de prueba puede ser excesivo (como puede verse en los ejemplos).

Un procedimiento más eficaz es diseñar una malla completamente nueva que cumpla el requisito de que

$$\xi_i \leq 1 \tag{14.29}$$

En este caso una posibilidad es recurrir a los criterios de velocidad de convergencia asintótica a nivel de elemento (aunque hemos visto que no son realistas en presencia de singularidades) y predecir la distribución de tamaños de elementos. Por ejemplo, supongamos

† De hecho se puede "desrefinar" o usar un espaciamiento mayor entre elementos donde $\xi_i < 1$ si se desea un ahorro computacional.

$$\|e\|_i \propto h_i^p \tag{14.30}$$

donde h_i es el tamaño del elemento actual y p el orden polinómico de aproximación; entonces, el tamaño del elemento para satisfacer el requisito de la Ec. (14.25) no debería ser mayor que

$$h = \xi^{-1/p} h_i \tag{14.31}$$

Hoy existen programas de generación de malla en los que se puede especificar localmente el tamaño de los elementos y éstos se pueden usar para generar una nueva malla en la que realizar de nuevo el análisis.[12] En la Figura 14.6 y las Figuras 14.13 a 14.15 se muestra cómo empezando por una solución relativamente grosera una única predicción de malla permite una solución que (casi) satisface el nivel de precisión especificado como deseable.

La razón del éxito de la regeneración de malla basada en el simple supuesto de velocidad de convergencia asintótica supuesto en la Ec. (14.30) es el hecho de que, con refinamiento, la malla tiende a ser "óptima" y la influencia de la singularidad localizada ya no afecta a la convergencia global. Ya se mostró este efecto en la Figura 14.6.

Por supuesto los efectos de la singularidad estarán todavía presentes en los elementos adyacentes a la misma, y la subdivisión de malla puede mejorarse si en tales elementos se utiliza la convergencia adecuada y se escribe, en lugar de la Ec. (14.13),[13]

$$h = \xi_i^{-1/\lambda} h_i \tag{14.32}$$

en la que λ es la potencia de la singularidad. Un número conveniente para utilizar en este caso es $\lambda = 0.5$, ya que la mayoría de los parámetros de singularidad están entre 0.5–1.0. Con este procedimiento añadido a la estrategia de refinamiento se alcanza mayor precisión que el 5 por ciento en un remallado para los problemas de las Figuras 14.14b y 14.15.

En los ejemplos ilustrados hasta ahora se ha mostrado en general un proceso de refinamiento con el número total de grados de libertad aumentando en cada nivel, aunque la malla sea rediseñada. Este no debe ser siempre el caso, ya que una malla fina pero mal estructurada puede tener un error mucho mayor que otra casi óptima. Para ilustrar este punto se muestra en la Figura 14.17 el refinamiento de un solo nivel diseñado para alcanzar un 5 por ciento de precisión en un paso empezando desde subdivisiones de malla uniforme. El problema aquí es el mismo que el que se muestra en las Figuras 14.4 a 14.6 y en el proceso de refinamiento se utilizan los criterios de malla de las Ecs.(14.31) y (14.32).[14]

Señalemos que ahora, en al menos un refinamiento, se produce un descenso de error total con una reducción de grados totales de libertad

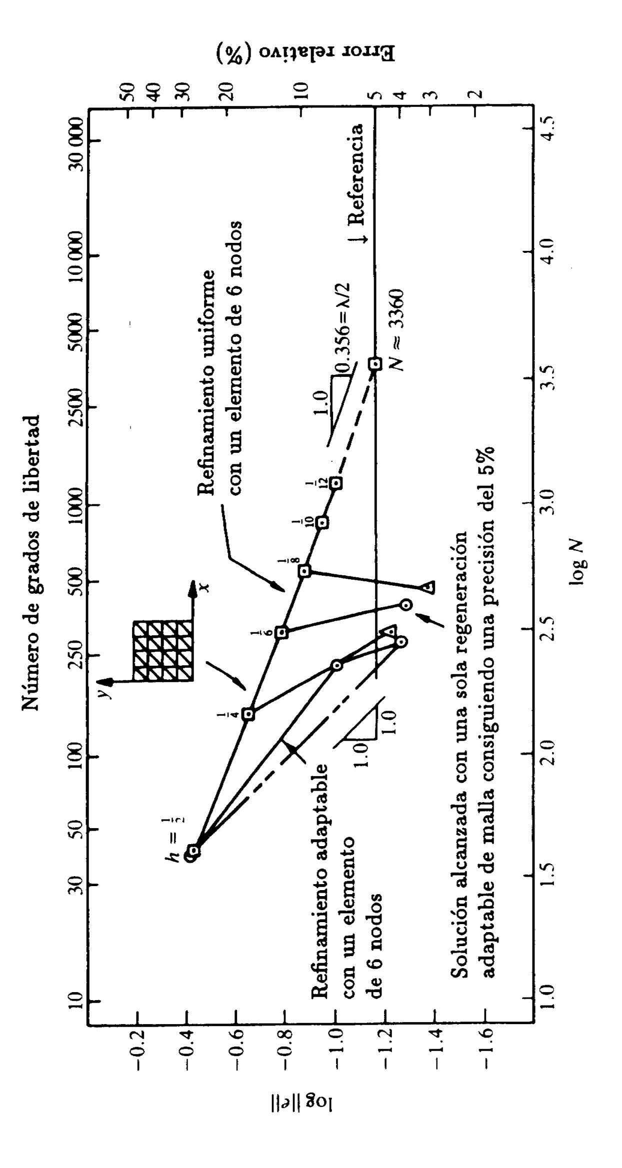


Figura 14.17 Influencia de la malla inicial en la velocidad de convergencia en versión tipo h. Refinamiento adaptable utilizando elementos triangulares cuadráticos.

(empezando para subdivisión uniforme 8×8 con $NGL = 544$ y $\eta = 9.8$ por ciento hasta $NGL = 460$ y $\eta = 3.1$ por ciento).

Ninguna de las estrategias sugeridas es "óptima" en el sentido de que un refinamiento de malla uniforme no es de ninguna manera necesario si el problema muestra "características direccionales" (esato es, la función u puede variar rápidamente a lo largo de alguna coordenada local x' y a una velocidad menor a lo largo de y'). Para tales situaciones podrían introducirse "indicadores de corrección" que nos indiquen en qué dirección es más efectivo el refinamiento. Se tratará este procedimiento en una sección relacionada con la convergencia p. Alternativamente podrían introducirse diferentes normas de energía "direccionales". Estos refinamientos serán tratados más adelante.

Como se mencionó anteriormente, la norma de energía no es, en la práctica, necesariamente el mejor criterio para refinar. El error de tensión local puede ser utilizado eficazmente y, aunque tales estimadores locales mediante los procedimientos señalados no son necesariamente precisos, éstos han sido utilizados con buenos resultados.[3]

Puede obtenerse una información local muy precisa en relación con tensiones, desplazamientos, factores de intensidad de tensiones, etc., mediante un replanteamiento adecuado del problema, que generalmente necesita una solución auxiliar.[15] La discusión de dichos procedimientos se deja a la literatura publicada, ya que es algo compleja para incluirla aquí.

14.5 Estimadores de error para formulaciones jerárquicas. Una base para el refinamiento adaptable tipo p

Existen varias posibilidades alternativas para derivar una aproximación al error total [tal como se ha mostrado en la Ec. (14.7)]. Una de ellas es, por supuesto, obtener una solución completa, por ejemplo, dividiendo a la mitad la malla existente. Otra es introducir un polinomio completo adicional en la aproximación. La diferencia entre dos soluciones consecutivas da una estimación del error local aunque a un coste muy considerable.

Si se utiliza una forma jerárquica de aproximación, se puede obtener esta diferencia a un coste más razonable, utilizando la aproximación original. En esta forma jerárquica las ecuaciones discretizadas son (ver Capítulo 7), para $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}}$,

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \tag{14.33a}$$

y, con una variable $\bar{\mathbf{u}}^h$ añadida jerárquicamente,

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}}^n + \mathbf{N}^h\bar{\mathbf{u}}^h$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}^{nh} \\ \mathbf{K}^{hn} & \mathbf{K}^{hh} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^n \\ \bar{\mathbf{u}}^h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} \tag{14.33b}$$

La solución de las Ecs. (14.33) tendrá, por supuesto, un error de aproximación de la forma

$$\mathbf{e} = \mathbf{N}(\bar{\mathbf{u}}^n - \bar{\mathbf{u}}) + \mathbf{N}^h\bar{\mathbf{u}}^h \tag{14.34}$$

Sin embargo, se puede hacer una aproximación razonable poniendo

$$\bar{\mathbf{u}}^n \approx \bar{\mathbf{u}} \tag{14.35}$$

en la segundo ecuación, osea, utilizando la aproximación original. Ahora

$$\bar{\mathbf{u}}^h = (\mathbf{K}^{hh-1})(\mathbf{f}_2 - \mathbf{K}^{hn}\bar{\mathbf{u}}) \tag{14.36}$$

y para conseguir esto sólo se necesita la inversión de la matriz $\mathbf{K}^{hh}$.

A menudo bastará una aproximación más cruda si se introducen los refinamientos jerárquicos uno a uno. Así, para cada grado de libertad que se introduzca en el "nodo" i, $\bar{u}_i^h$ es un escalar, y

$$(K_{ii}^{hh})^{-1} \equiv \frac{1}{K_{ii}^{hh}} \tag{14.37}$$

Para convertir la estimación de error local $e_i^h = N_i^h\bar{u}_i^h$ en una norma de energía se puede proceder de nuevo de varias formas.

Una posibilidad es evaluar los cambios de tensión y deformación correspondientes, esto es, se obtiene, [ver Ec. (14.7)]

$$\|e\|_i^2 = \bar{u}_i^{hT}\int(\mathbf{S}N_i^h)^T\mathbf{D}(\mathbf{S}N_i^h)\,d\Omega\bar{u}_i^h = \bar{u}_i^{hT}K_{ii}^{hh}\bar{u}_i^h \tag{14.38}$$

siendo el estimador total

$$\|e\| = \left(\sum_{i=1}^{S}\|e\|_i^2\right)^{1/2} \tag{14.39}$$

para un gran número de grados de libertad introducidos.

Otro procedimiento se basa en el residuo y en que

$$\|e\|_i = \left(\int_\Omega \mathbf{e}^T\mathbf{L}\mathbf{e}\,d\Omega\right)^{1/2} = \left(-\int_\Omega \mathbf{e}^T\mathbf{r}\,d\Omega\right)^{1/2} \tag{14.40}$$

para cualquier ecuación diferencial, ya que

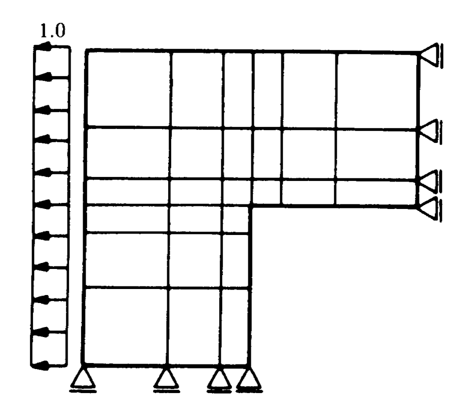
$$\begin{aligned}\mathbf{L}\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{p} &= \mathbf{r}\\ \mathbf{L}\mathbf{u} + \mathbf{p} &= 0\end{aligned} \tag{14.41}$$

y

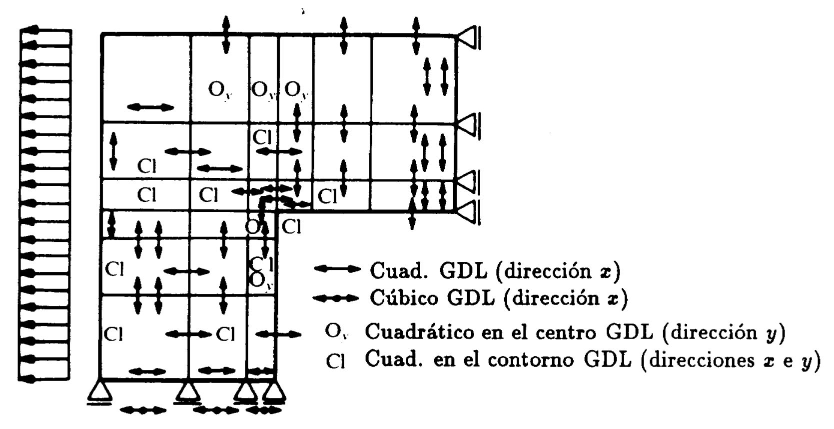
$$\mathbf{L}\mathbf{e} \equiv \mathbf{L}(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) = -\mathbf{r}$$

Ahora $\mathbf{r}$ puede ser evaluado para una $\hat{\mathbf{u}}^h$ dada tanto dentro del elemento como en las interfases [ver Ecs. (14.20) y (14.21)], y si se observa que, de hecho, la segunda de las ecuaciones (14.33b) es una forma de residuos ponderados

$$\mathbf{K}^{hh}\bar{\mathbf{u}}^h = -\int_\Omega \mathbf{N}^h\mathbf{r}\,d\Omega \tag{14.42}$$



Paso 1. Geometría inicial de la malla, Condiciones de contorno y carga: $\eta = 25.8\%$. 72 GDL.



Paso 5. Versión adaptada de p. $\eta = 7.2\%$. 144 GDL

Figura 14.18 Una solución con refinamiento tipo p para el problema del dominio en forma de L.

se puede escribir para una única variable introducida utilizando las Ecs. (14.33) y (14.40) a (14.42),

$$\|e\|_i^2 = \frac{(\int_\Omega N_i^h \mathbf{r}\, d\Omega)^2}{K_{ii}^{hh}} = C_i^2 \tag{14.43}$$

La cantidad anterior es útil como un *indicador de corrección* que da de forma bastante exacta la magnitud del error que puede ser corregida introduciendo un grado particular de libertad y es, por supuesto, idéntica a la Ec. (14.38). Sin embargo, no es un buen estimador de error ya que a veces la nueva función de forma introducida N_i^h puede ser ortogonal al residuo $\mathbf{r}$.

Se obtiene un estimador de error mejorado utilizando la desigualdad de Schwartz al sustituir la integral en la Ec. (14.43) de la forma[8]

$$\left(\int_\Omega N_i^h \mathbf{r}\, d\Omega\right)^2 \leq \left(\int_\Omega N_i^{h^2}\, d\Omega\right)\left(\int_\Omega r^2\, d\Omega\right) \tag{14.44}$$

Resulta que esta forma da un estimador que es eficiente, particularmente si se introduce un factor de corrección de $\sqrt{2}$. Ahora se evalúa

$$\|e\|_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sum(\int_\Omega N_i^{h^2}\, d\Omega \int_\Omega r^2\, d\Omega + \int_I N_i^{h^2} dI \int_I J^2 dI)}{K_{ii}^{hh}}\right]^{1/2} \tag{14.45}$$

reconociendo como antes la necesidad de tratar con saltos interelementales. La suma se lleva a cabo sobre todos los nuevos grados de libertad que pueden ser introducidos en la nueva etapa jerárquica.

Obviamente el procedimiento tiene ventajas para refinamiento tipo p cuando se considera el siguiente orden polinómico más alto en un elemento al establecer los indicadores de corrección y el estimador de error.

Durante el proceso de refinamiento el orden polinómico puede ser variable de elemento a elemento.

Disponiendo de indicadores de error para todos los grados de libertad candidatos que pueden introducirse, la estrategia adaptable puede introducir directamente aquellos que proporcionen la mayor disminución de error [ver Ec. (14.43)].

Una técnica empleada a veces[9] consiste en incluir en el siguiente análisis todos aquellos grados de libertad que dan

$$C_i \geq \gamma C_{\text{máx}} \tag{14.46}$$

donde $C_{\text{máx}}$ es el máximo valor de cualquier indicador de corrección y γ un número en el rango 0.1-0.5.

Obviamente $\gamma = 0$ corresponde simplemente al refinamiento completo de todos los elementos, pero cualquier valor razonable mayor que 0 tenderá a dar un refinamiento óptimo, en el que el error en cada elemento tienda a ser constante después de muchos pasos adaptables.

La Figura 14.18 muestra de nuevo el problema discutido previamente pero resuelto ahora utilizando refinamientos tipo p jerárquicos. La figura muestra la distribución final de los grados de libertad.

El proceso adaptable descrito aquí debe ser continuado hasta que se alcance la precisión deseada y, aunque lleve a un ahorro en los grados de libertad usados finalmente, es menos eficaz que el descrito previamente en el cual se intentaba alcanzar directamente la solución de precisión buscada.

14.6 Comentarios finales

Los métodos de estimación de error y refinamiento adaptable que se describen en este capítulo constituyen una herramienta muy importante para la aplicación práctica de los métodos de elementos finitos. El rango de aplicaciones es grande y sólo se ha tratado aquí el rango relativamente simple de la elasticidad lineal y problemas similares autoadjuntos. Un reciente estudio[4] muestra muchas más áreas de aplicación y se dirige al lector a esta publicación si desea conocer interesantes detalles. En este punto querríamos reiterar que se pueden usar muchas normas o medidas de error diferentes y que para algunos problemas la norma en energía no es, de hecho, "natural". Un buen ejemplo es el presentado por los problemas de flujo de gases a alta velocidad, donde pueden aparecer gradientes muy pronunciados ("ondas de choque"). La formulación de tales problemas es compleja, pero no es necesaria para la presente argumentación. En este análisis la atención se centra en la función $\mathbf{u}$ misma, y no en sus derivadas (tensiones). En tales casos se procede usando la norma L_2 de la función $\mathbf{u}$ misma como medida del error. En un caso unidimensional, tal como el ilustrado en la Figura 14.16, se encuentra que las derivadas nodales se aproximan bien por proyección y, por tanto, la segunda derivada (o curvatura) $d^2\hat{u}/dx^2$ se aproxima dentro de cada elemento con precisión.

Esto proporciona una estimación del error e de la forma

$$e = u - \hat{u} = \frac{1}{2}x_1(h - x_1)\left|\frac{d^2\hat{u}}{dx^2}\right| \tag{14.47}$$

si x_1 es la coordenada medida desde el lado del elemento y si se supone que $\hat{u}$ es nodalmente exacta. Inmediatamente, la norma L_2 del error viene dada para el elemento i como

$$\|e\|_i \approx \frac{1}{8}h_i^2\left|\frac{d^2\hat{u}}{dx^2}\right| \tag{14.48}$$

que puede ser usada en el control de un refinamiento de malla si se pretende limitar este error a un valor fijo en cada elemento.

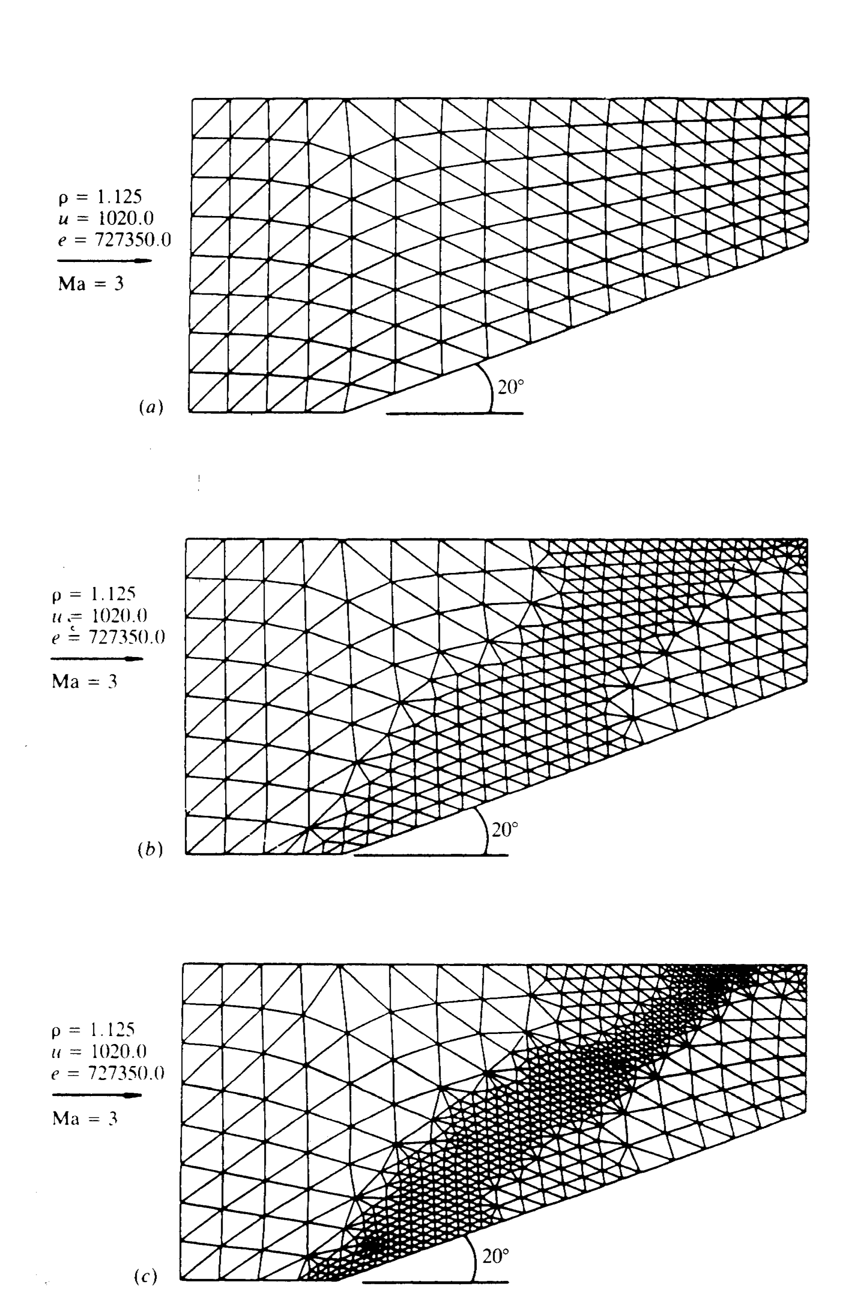


Figura 14.19 Enriquecimiento de malla. Flujo supersónico sobre una cuña (número de Mach 3). (*a*) Configuración inicial de la malla. (*b*) Después de 101 pasos. (*c*) Después de 201 pasos (ρ=densidad; u=velocidad; e=energía específica).

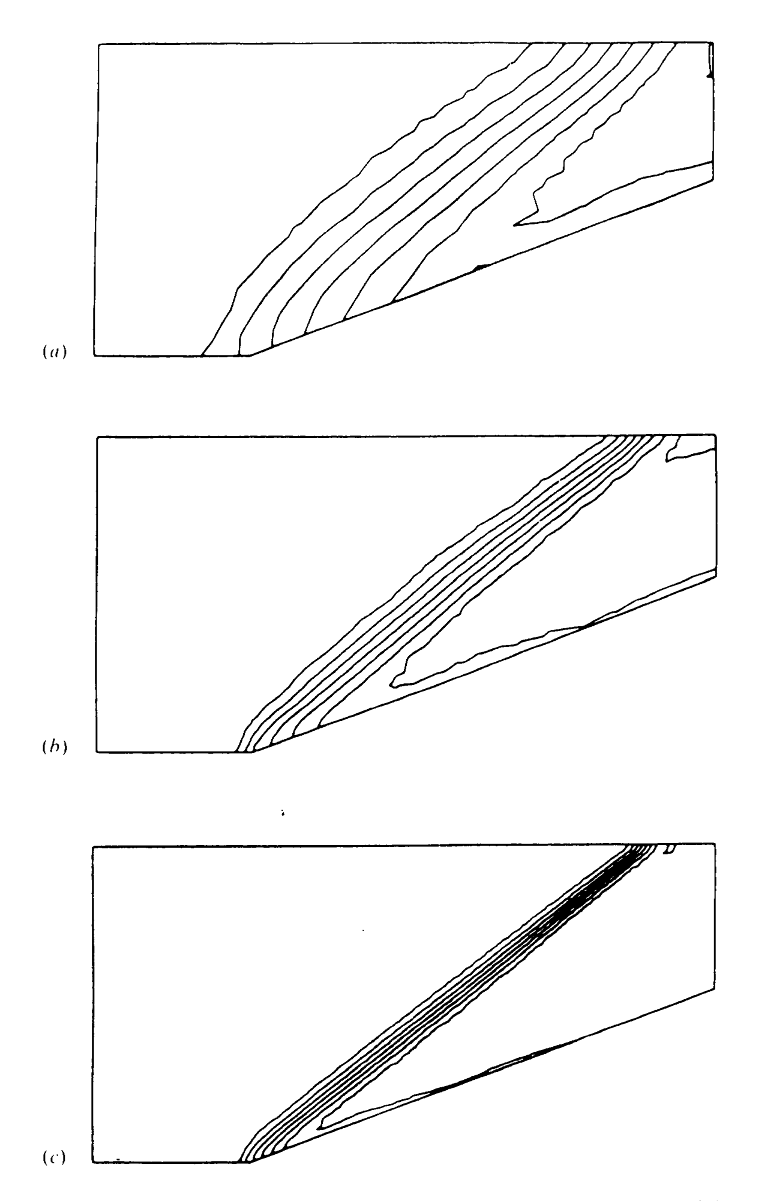
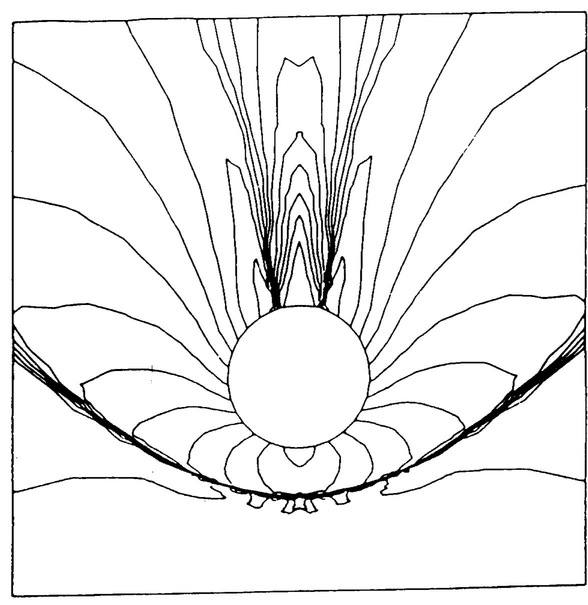


Figura 14.20 Problema de la Figura 14.19. Densidad después de: (*a*) 100 pasos; (*b*) 200 pasos; (*c*) 250 pasos (utilizando las mallas refinadas mostradas en la Figura 14.19).


(b) Coeficientes de presión

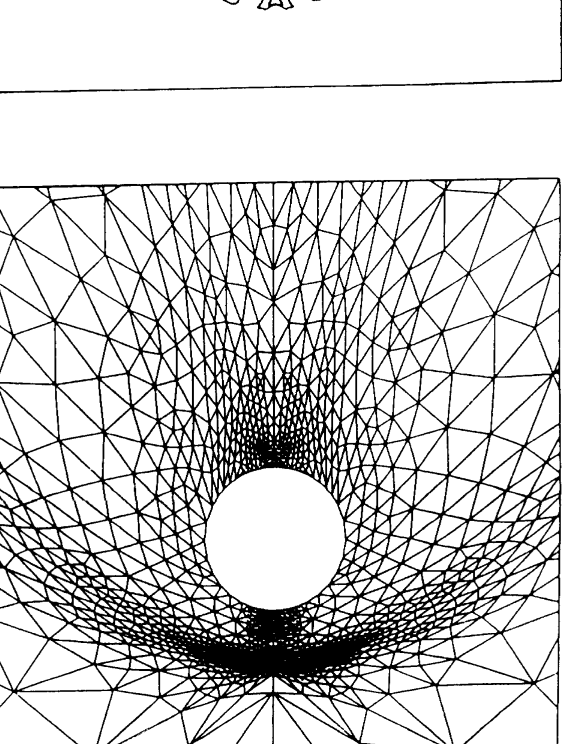

(a) Malla local

Figura 14.21 Refinamiento de malla direccional. Flujo alrededor de un cilindro circular— número de Mach 3. Tercer refinamiento de malla 709 nodos (1348 elementos)

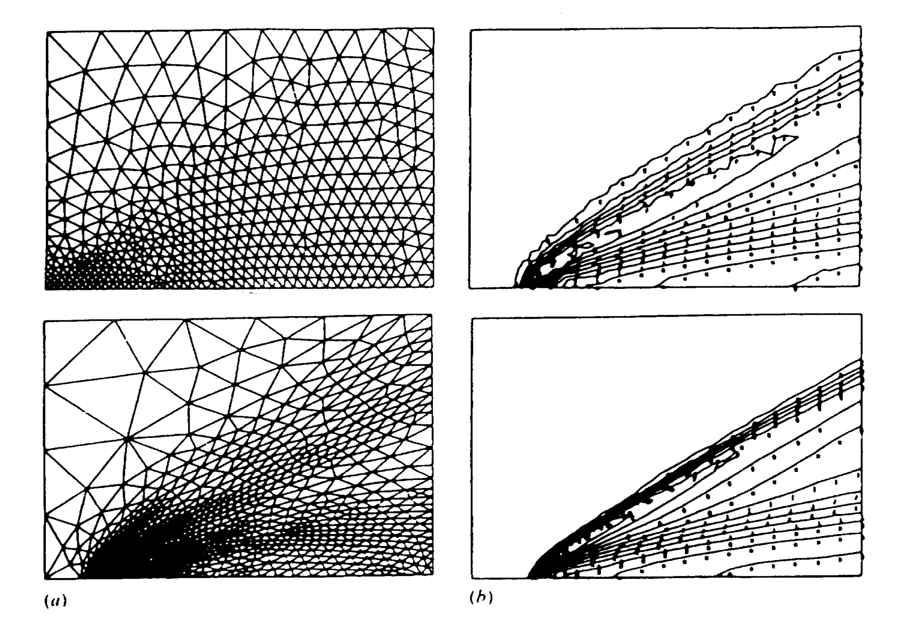


Figura 14.22 Flujo viscoso sobre una placa plana. Número de Mach 3. (a) Mallas inicial y regenerada. (b) Líneas de isodensidad calculadas.

Esta medida puede extenderse a un problema bidimensional, bien realizando un refinamiento uniforme *o* aplicando la medida según los ejes principales de curvatura. Las Figuras 14.19 a 14.22 muestran la aplicación de tales refinamientos adaptables para localizar con éxito las zonas de "shock" en problemas de flujo supersónico. En el primer ejemplo la malla se refina uniformemente y en el segundo direccionalmente,[12,16] mostrando la malla óptima resultante. Tal refinamiento no uniforme tiene también interés en problemas tales como el de deformación plástica donde tienen importancia las líneas de deslizamiento direccional, y aquí hay por tanto otro campo para su aplicación.

Referencias

1. B.A. SZABO, "Estimation and control of error based on *p*-convergence", Chapter 3, *Accuracy Estimates and Adaptive Refinement in Finite Element Computations*, (eds I. Babuska, O. C. Zienkiewicz, J. Gago y E. R. de Oliviera), pp. 61–73, Wiley, 1986.
2. B. GUO y I. BABUSKA, "The $h-p$ version of the finite element method", Lab. Num. Analysis Tech. Note BN 1043, University of Maryland, USA, 1985.
3. O.C. ZIENKIEWICZ y J.Z. ZHU, "A simple error estimator and adaptive

procedure for practical engineering analysis", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **24**, 337-57, 1987.
4. I. Babuska, O.C. ZIENKIEWICZ, J. GAGO y E.R. DE OLIVEIRA, (eds), *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element computations*, Wiley, 1986.
5. I. BABUSKA y W.C. RHEINBOLDT, "*A-posteriori* error estimates for the finite element method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **11**, 1597-615, 1978.
6. I. BABUSKA y W.C. RHEINBOLDT, "Adaptive approaches and reliability estimates in finite element analysis", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **17/18**, 519-40, 1979.
7. D.W. KELLY, S.R. GAGO, O.C. ZIENKIEWICZ y I. BABUSKA, "*A-posteriori* error analysis and adaptive processes int the finite element method. Part I–Error analysis, Adaptive mesh refinement", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **19**, 1593–619, 621-56, 1983.
8. O.C. ZIENKIEWICZ, J.P. DE S.R. GAGO y D.W. KELLY, "The hierarchical concept in finite element analysis", *Comp. Struct.*, **16**, 53–65, 1981.
9. O.C. ZIENKIEWICZ y A. CRAIG, "Adaptive refinement, error estimates multigrid solution and hierarchic finite element concepts", Chapter 2 of *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, (eds I. Babuska, O. C. Zienkiewicz, J. Gago y E. R. de Oliveira), pp. 25–55, Wiley, 1986.
10. B.A. SZABO, "Some recent developments in finite element analysis", *Comp. Math. Appl.*, **5**, 99–115, 1979.
11. E. RANK y O.C. ZIENKIEWICZ, "A simple error estimator for the finite element method", *Comm. Appl. Num. Meth.*, **3**, 243–50, 1987.
12. J. PERAIRE, M. VAHDATI, K. MORGAN y O.C. ZIENKIEWICZ, "Adaptive remeshing for compressible flow computations", *J. Comp. Phys.*, **72**, 449–66, 1987.
13. J.Z. ZHU, O.C. ZIENKIEWICZ y A.W. CRAIG, "Adaptive techniques in finite element analysis", *Proc. NUMETA*, Conference S3/1 to S3/10, Martinus Nijhoff Publ., 1987.
14. J.Z. ZHU y O.C. ZIENKIEWICZ, "Adaptive techniques in the finite element method", *Comm. App. Num. Math.*, **4**, 197–204, 1988.
15. I. BABUSKA y A. MILLER, "The post processing approach in the finite element method: Part 1–Calculation of displacement, stress and other higher derivates of displacements. Part 2–The calculation of stress intensity factors. Part 3–*A posteriori* error estimates and adaptive mesh selection", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **20**, 1085–109, 1111–29, 2311–24, 1984.
16. R. LOHNER, K. MORGAN y O.C. ZIENKIEWICZ, "An adaptive finite element procedure for compressible high speed flows", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **51**, 441–65, 1985.
17. M. AINSWORTH, J.Z. ZHU, A.W. CRAIG y O.C. ZIENKIEWICZ, "Analysis of a simple a-posteriori error estimator in the finite element method", *Int. J. Num. Meth. Eng.* To Appear.

Capítulo 15

MÉTODOS DE CÁLCULO POR ORDENADOR PARA ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS

15.1 Introducción

En este capítulo consideraremos algunos de los aspectos relativos al desarrollo de los programas de ordenador para cálculo por elementos finitos que utilizan la teoría presentada en los capítulos anteriores. El programa de cálculo que presentamos puede utilizarse para resolver cualquiera de los problemas uni-, bi-, o tridimensionales discutidos previamente, siempre que la matriz global de coeficientes de las ecuaciones algebraicas resultantes sea simétrica. El programa puede ser fácilmente modificado para permitir la extensión al caso no simétrico. Aunque la teoría en este volumen se limita a las aplicaciones lineales, el programa se puede usar también para resolver problemas no lineales y/o transitorios, que serán discutidos en detalle en el próximo volumen.

El programa de ordenador presentado es una extensión del trabajo contenido originalmente en la 3ª edición.[1] Se han hecho diversas extensiones para permitir la consideración de un rango más amplio de implementaciones computacionales y de tipos de problemas (aunque con algunas limitaciones debido a requisitos de espacio). La versión que se incluye en este capítulo se llama PCFEAP y está específicamente diseñada para usarla en ordenador personal. El nombre del programa es acrónimo de "Personal Computer Finite Element Analysis Program". En una versión para ordenador personal la principal limitación es la memoria disponible, y no es posible tener todos los vectores necesarios disponibles en memoria central ("in-core") al mismo tiempo. En consecuencia, se ha adoptado un sistema frontal con memoria en disco ("out-of-core") para resolver las ecuaciones algebraicas lineales.[2,3] Se usa un sencillo sistema de gestión de la memoria, que maneja la memoria principal y archivos en disco, para almacenar los vectores grandes que resultan de la matriz global de coeficientes y los términos elementales de historia.

Para la implementación en grandes ordenadores con gestión de memoria virtual, es más eficiente evitar el uso de archivos en disco en la medida de lo posible. Así, para estos sistemas se incluye un solver "in-core" de banda variable como opción para la solución de las ecuaciones.[4] Es necesario seleccionar uno de estos sistemas a la hora de instalar el programa. Ambos

sistemas de manejo de ecuaciones que se incluyen son compatibles con la versión para ordenadores personales, PCFEAP. Se puede obtener una cierta mejora en la eficiencia reprogramando para evitar todas las operaciones de entrada/salida a disco y manteniendo los vectores en memoria principal.

La versión actual de PCFEAP permite la solución de problemas tanto en "cola" como de forma interactiva. El modelo de elementos finitos del problema se introduce mediante un archivo de entrada de datos que se prepara según las instrucciones que se detallan más adelante en este capítulo. Se incluye también una opción sencilla para gráficos que permite mostrar modelos de elementos finitos en una y dos dimensiones, tanto en la configuración indeformada como en la deformada. De nuevo, las limitaciones de espacio han impedido que se incluyeran otras opciones; sin embargo, programadores con experiencia pueden añadir fácilmente otras posibilidades. Al desarrollar el programa se han usado subprogramas de la librería de dibujo Graphics Development Toolkit.[5] En caso necesario éstas pueden ser sustiuidas por otros sistemas gráficos.

Los programas de elementos finitos pueden dividirse en dos partes básicas:

a) módulo de entrada de datos y preprocesadores, y

b) módulos de resolución y salida de resultados que llevan a cabo el cálculo real (véase esquema simplificado en la Figura 15.1).

En la práctica, cada módulo puede ser muy complejo. En las secciones siguientes discutiremos con algún detalle aspectos de la programación de cada uno de los módulos. Se supone que el lector está familiarizado con

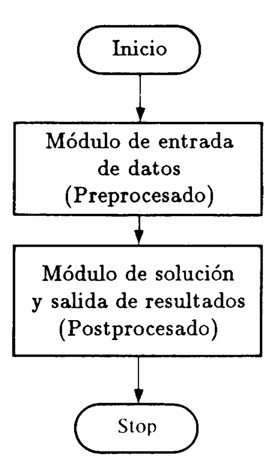


Figura 15.1 Esquema simplificado del programa de elementos finitos.

los principios de los elementos finitos presentados en este libro, el álgebra lineal, la programación, y en particular con el lenguaje FORTRAN. Aquellos lectores que simplemente quieran usar el programa listado al final del capítulo pueden pasar por alto las secciones que siguen y pasar directamente a las instrucciones de utilización incluidas en las Secciones 15.3, 15.4 y 15.8.

Este capítulo está dividido en ocho secciones. Las Secciones 15.2 y 15.3 discuten el procedimiento adoptado para la entrada de datos, de manera que quede descrito el problema de elementos finitos, y las instrucciones para la preparación de las tarjetas de datos respectivamente. Básicamente, los datos consisten en cantidades asociadas a los nodos (ej. coordenadas, datos de condiciones de contorno, cargas, etc.) y cantidades asociadas a los elementos (ej. datos de conectividad, propiedades de los materiales, etc.).

La Sección 15.4 discute algoritmos de solución para distintos tipos de análisis por elementos finitos. Con objeto de obtener un programa capaz de resolver muchos tipos de problemas de elementos finitos se introduce un *macrolenguaje* de programación. Este macrolenguaje está asociado a un conjunto de subprogramas compactos, pensado cada uno de ellos para calcular uno o, como máximo, algunos de los pasos básicos del proceso de solución mediante elementos finitos. Ejemplos de macrolenguaje son las instrucciones para formar la matriz de rigidez global, así como las instrucciones para resolver las ecuaciones, escribir resultados, etc. El concepto de macroprogramación permite incluir una amplia gama de algoritmos de solución en el programa que aquí se presenta.

En la Sección 15.5 se discute la metodología comúnmente utilizada para obtener las matrices de los elementos. En particular, se utiliza la integración numérica para obtener las matrices de "rigidez", "masa" y "cargas" de los elementos para los problemas lineales de transferencia de calor y elasticidad. Asimismo, se discute la utilización de rutinas para obtener las funciones de forma básicas (ver Capítulos 7 y 8).

En la Sección 15.6 se presentan los métodos para resolver los grandes sistemas de ecuaciones algebraicas resultantes de las formulaciones por elementos finitos. Los métodos adoptados para el programa de ordenador son un método frontal, basado en la eliminación gaussiana,[2,3] y un método de perfil de ancho variable, basado en el método de Crout.[4] El método básico consiste en factorizar la matriz de coeficientes en el producto de una matriz triangular inferior y otra superior. El uso de este esquema conduce a un programa muy compacto y permite incluir la capacidad de resolución (esto es, nuevos estados de carga) sin ningún esfuerzo de programación importante adicional. El aprovechamiento de la capacidad de resolución puede reducir sustancialmente el coste del análisis de distintos estados de cargas. Los suprogramas que se incluyen sólo permiten la solución de matrices de coeficientes simétricas. Para formulaciones de elementos finitos que no conduzcan a una matriz simétrica es posible extender el sistema de

solución frontal tal como lo describe Hood.[6] El método de ancho variable es capaz de resolver algunos problemas no simétricos; sin embargo, es necesario modificar el mapa de memoria y el proceso de ensamblaje (ver referencias 1 ó 4).

En la actualidad, existen muchos programas complejos y eficientes para análisis por elementos finitos capaces de tratar un gran número de variables y formulaciones. La gran complejidad de dichos programas hace implícita la dificultad de ponerlos al día para introducir las innovaciones tecnológicas. El programa que se presenta se ha escrito específicamente como un instrumento de educación e investigación, en el que los distintos "módulos" pueden modificarse o añadirse como se desee. Por supuesto, las subrutinas pueden combinarse para objetivos que incluso hoy pueden ser obviamente innecesarios.

Para desarrollar un programa para ordenadores pequeños no se mantienen todas las ecuaciones en memoria central; así, la capacidad del programa queda limitada por la memoria y el tamaño del disco del ordenador usado. Con la memoria central disponible en algunos ordenadores personales actuales, el programa sólo puede manejar problemas de ingeniería con varios cientos de incógnitas (el máximo ancho de frente es definido como 120). A costa de cierta complejidad y eficiencia, el programa puede extenderse para problemas mayores, y trataremos este tema en la Sección 15.7.

Finalmente, la Sección 15.8 contiene un listado completo del programa discutido en este capítulo. También se incluyen rutinas de elemento para análisis de problemas bidimensionales de elasticidad lineal. Mediante el formato de estas rutinas el lector se encontrará en condiciones, una vez dominado este capítulo, de programar rutinas adicionales para otros problemas y de ampliar las capacidades del programa.

15.2 Módulo de entrada de datos

El módulo de entrada de datos esquematizado en la Figura 15.1 debe transmitir suficiente información a los otros módulos de manera que pueda resolverse cada problema. En el programa que aquí examinamos, el módulo de entrada de datos se utiliza para leer de un archivo de entrada los datos necesarios acerca de la geometría, materiales y fuerzas actuantes, de forma que puedan establecerse todas las matrices de elementos finitos posteriores. En el programa se establece un conjunto de matrices dimensionadas que almacenan las coordenadas nodales, la conectividad de los elementos, las propiedades del material, los códigos para las condiciones de contorno, fuerzas nodales y los desplazamientos prescritos, las temperaturas nodales, etc. La Tabla 15.1 lista los nombres de las matrices (y sus dimensiones) utilizadas para almacenar estas cantidades.

La notación empleada para las matrices es distinta a la empleada en el resto del libro. Por ejemplo, en el texto se ha encontrado conveniente

TABLA 15.1

NOMBRES DE LAS VARIABLES UTILIZADAS PARA ALMACENAMIENTO DE DATOS

Nombre de la variable(dimensión)	Descripción
D(18,NUMMAT)	Datos relativos a las propiedades del material, limitado a 18 palabras por tipo de material.
F(NDF,NUMNP)	Fuerzas y desplazamientos nodales.
ID(NDF,NUMNP)	Condiciones de contorno que después de la entrada de datos cambia los números de las ecuaciones en los vectores globales.
IE(8,NUMMAT)	Tipo de elemento para cada tipo de material.
IX(NEN1,NUMEL)	Conexiones nodales del elemento y número del tipo de material.
T(NUMNP)	Temperaturas nodales.
X(NDM,NUMNP)	Coordenadas nodales.
NDF	Número máximo de grados de libertad en un nodo (6 como máximo).
NDM	Dimensión espacial del problema (3 como máximo).
NEN	Número máximo de nodos conectados a un elemento.
NEN1	NEN+3
NUMEL	Número de elementos.
NUMMAT	Número de tipos de materiales.
NUMNP	Número de nodos.

denominar a las coordenadas nodales por x_i, y_i, z_i, mientras que en el programa se llaman X(1,i), X(2,i), X(3,i) respectivamente. Esta modificación se hizo de manera que todas las matrices utilizadas en el programa pudieran dimensionarse dinámicamente; por tanto, cuando se analice un problema bidimensional, no han de reservarse posiciones para las coordenadas X(3,i) e igualmente para X(2,i) en los problemas unidimensionales.

Además, el desplazamiento nodal en el texto se denomina a_i; en el programa se le denomina U(i) ó U(1,i), U(2,i), etc., donde el primer índice se refiere a los grados de libertad de un nodo (desde 1 a NDF).

15.2.1 *Asignación del espacio de almacenamiento.* Un único vector se divide para almacenar todas las matrices de datos, así como alguna de las matrices globales, ej., de residuos, desplazamientos, cargas, etc. Cada una de las matrices relacionadas en la Tabla 15.1 está dimensionada exactamente al tamaño requerido para cada problema mediante el empleo de indicadores establecidos en el programa de control (véase Figura 15.2). De esta manera no se desperdicia espacio en el almacenamiento de datos y se reserva un espacio máximo para almacenar las matrices globales. Puesto que se utiliza este método de dimensionamiento automático no es posible establecer valores absolutos para el máximo número de materiales, nodos o elementos.

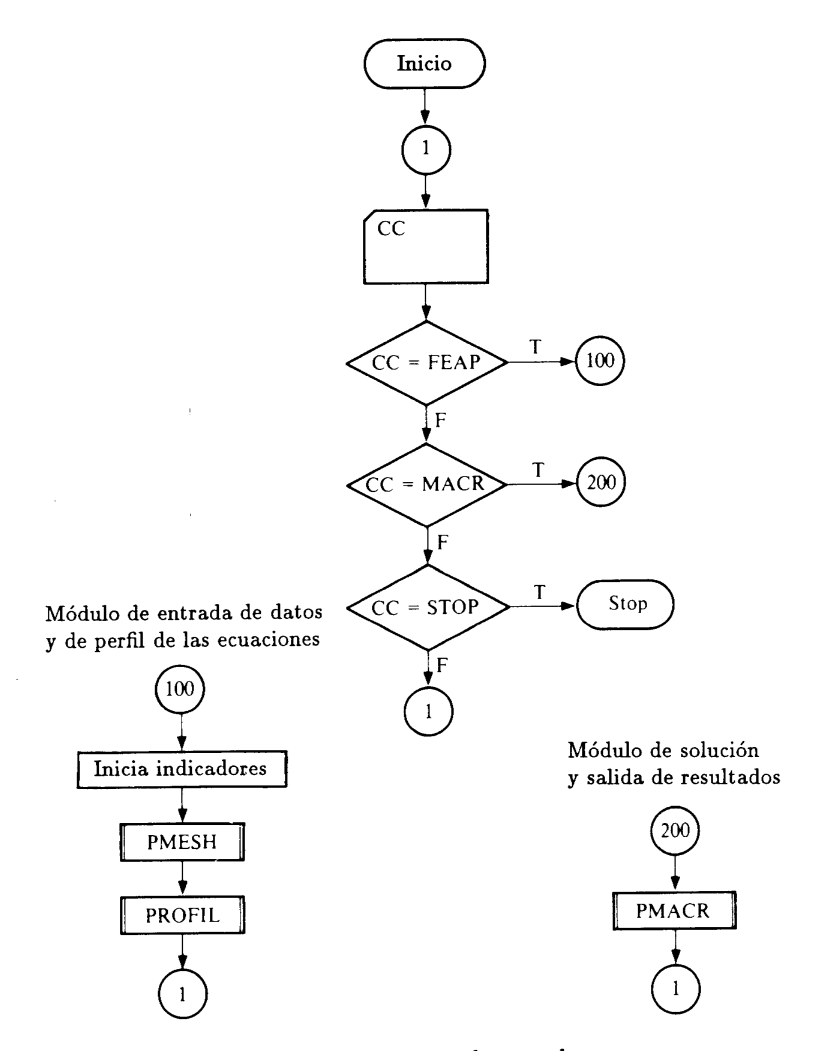


Figura 15.2 Programa de control.

El programa usa diferente precisión (enteros, reales, doble precisión) para mantener la máxima capacidad. El alineamiento de bytes se mantiene también para conseguir la máxima eficiencia en varios sistemas de ordenadores. El programa controla que existe espacio sufiente para resolver cada problema, y si no es así, imprime un mensaje de error. La capacidad total del programa se controla mediante la dimensión del vector en el "blank common" del programa principal y el correspondiente valor de MAXM.

Un segundo límite al tamaño del problema es el tamaño resultante de la matriz de coeficientes. Los términos se almacenan en el vector contenido en el "common" ADATA. En la versión que se da aquí, el solver frontal está limitado por un ancho de frente máximo de 120, y el solver en perfil a un vector con un perfil no nulo de menos de 8000 términos. Si se excede esta capacidad, se imprime un mensaje de error y el programa se para.

El ancho de banda depende del orden de numeración de los elementos. Renumerar los elementos puede reducir el frente máximo a un tamaño aceptable. En la solución por perfil el frente depende de la numeración nodal; renumerar los nodos puede reducir el tamaño. Este asunto se discutirá algo más en la Sección 15.6.

En general, para los límites actuales de dimensionamiento, el límite de malla se alcanzará primero con el sistema de solución frontal, mientras que el límite de tamaño de ecuaciones se alcanzará primero para el sistema de solución de ancho variable.

15.2.2 *Datos del elemento y coordenadas.* Una vez establecida una malla para un problema pueden prepararse los datos para el programa (ver Sección 15.3 para formatos). Como ejemplo, consideremos la definición de datos de las coordenadas nodales y conectividades del elemento para la región rectangular bidimensional (es decir, NDM=2) representada en la Figura 15.3,

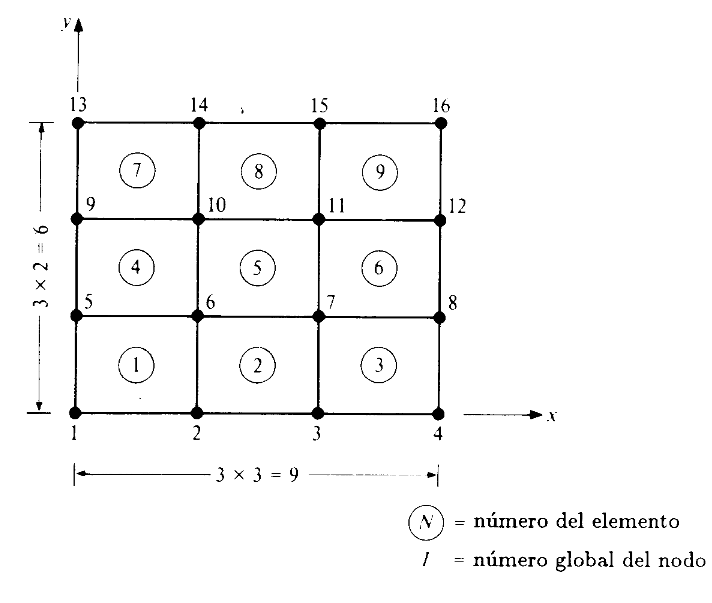
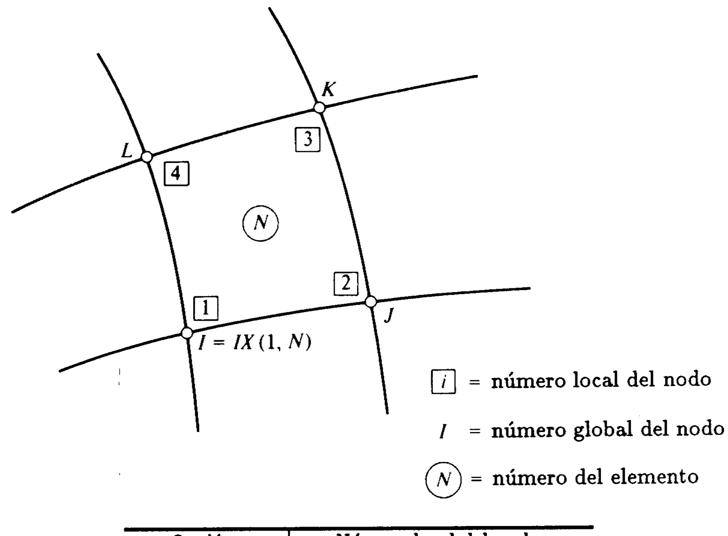


Figura 15.3 Malla sencilla.



Opción no.	Número local del nodo 1	2	3	4
a	3	4	8	7
b	4	8	7	3
c	8	7	3	4
d	7	3	4	8

Figura 15.4 Elemento típico de 4 nodos.

donde se ha establecido una malla de nueve elementos rectangulares de 4 nodos (NUMEL=9 y NEN=4) con 16 nodos (NUMNP). Para describir los datos de los nodos y del elemento, hay que asignar valores a cada X(i,j) para $i = 1, 2$ y $j = 1$ a 16, y a cada IX(k,n) para $k = 1$ a 4 y $n = 1$ a 9. En la definición de la matriz de coordenadas X, la dimensión "i" indica la dirección de la coordenada y la "j" define el número del nodo. Así, el valor de X(1,3) es la coordenada x para el nodo 3 y el valor de X(2,3) es la coordenada y para el nodo 3. De manera similar, para la matriz de conectividad del elemento IX, el índice k es el número local de un nodo de un elemento y "n" es el número del elemento. El valor de cualquier IX(k,n) es el número global de un nodo. El convenio para el número global del primer nodo es algo arbitrario. El número del nodo local 1 para el elemento 3 de la Figura 15.3 podría asociarse con el global 3, 4, 7 u 8. Una vez establecido el primer nodo local, los otros se definen de acuerdo con el convenio adoptado para cada tipo particular de elemento. Por ejemplo, el cuadrilátero de cuatro nodos puede numerarse de acuerdo con la Figura 15.4. Si se considera de nuevo el elemento 3, se tienen cuatro posibilidades para definir la matriz IX(k,3). Éstas se muestran en la Figura 15.4. El cálculo de las matrices de los elementos a partir de cualquiera

de las descripciones anteriores debe producir los mismos coeficientes para las matrices globales.

Para mallas muy grandes la preparación de datos sería muy tediosa; en consecuencia, el programa debe ser capaz de generar la mayor parte de los datos. Un esquema sencillo para la generación de nodos es introducir los puntos extremos de una línea cualquiera y generar por algún procedimiento

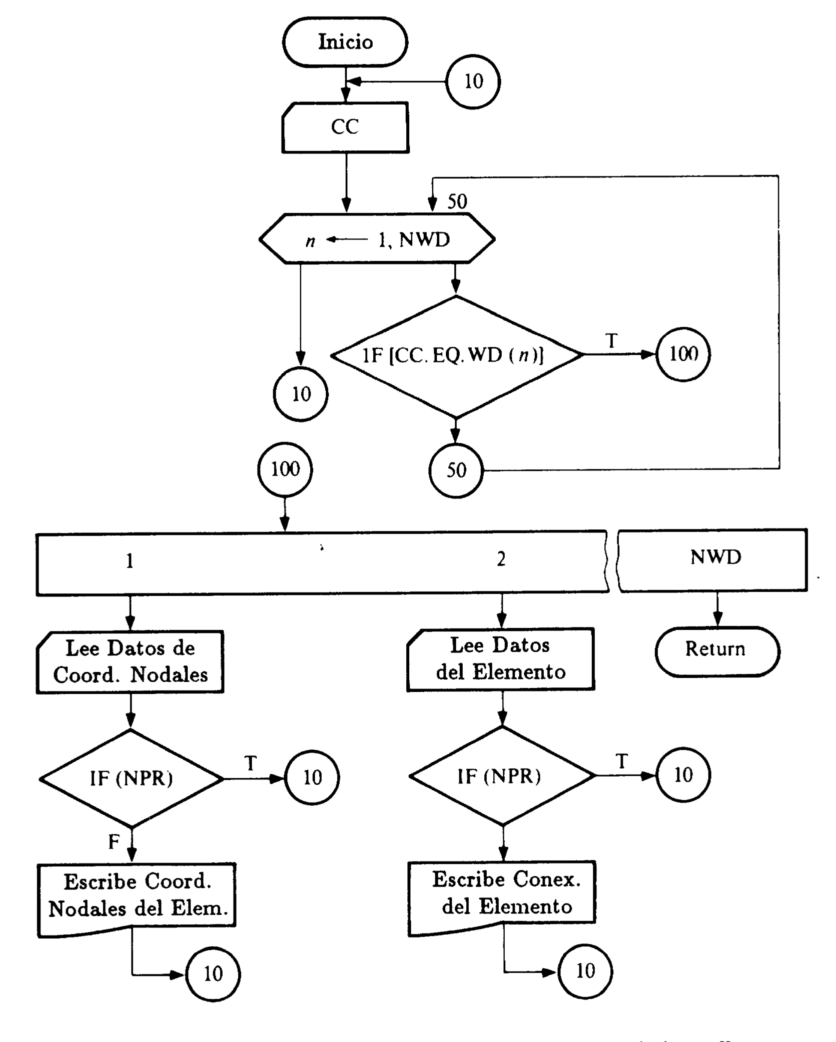


Figura 15.5 Diagrama de flujo para entrada de datos de la malla.

los puntos interiores, por ejemplo, por interpolación lineal en el caso del programa que nos ocupa. Así, para la malla de la Figura 15.3 se podrían proporcionar las coordenadas de los nodos 1 y 4 y generar las de los nodos 2 y 3. Hasta para este simple problema la preparación de datos de coordenadas se reduce a la mitad.

Para cada elemento existe generalmente una regla con la que se pueden generar elementos. Consideremos de nuevo la malla de la Figura 15.3. Los valores nodales del elemento 2 son los del elemento 1 incrementados en 1; y los nodos del elemento 3 son los del 2 incrementados en 1. Por consiguiente, se podrían dar las conexiones de los elementos 1, 4 y 7 y generar el resto usando un incremento especificado.

Se pueden desarrollar esquemas de generación más sofisticados. Por ejemplo, para regiones compuestas por bloques regulares de elementos, una alternativa consiste en describir un superelemento que luego se subdivide en elementos y nodos.[7] El procedimiento adoptado para introducir los datos de la malla debe ser coherente con la clase particular de problemas que el usuario quisiera analizar, así como con las facilidades disponibles. El esquema de entrada de datos que se incluye en el programa aquí ofrecido es sencillo y debe estar, para la mayoría de análisis, dentro de la capacidad del programa. Si un usuario desea preparar su propio esquema de entrada de datos puede combinarlo fácilmente con la subrutina PMESH, ya que cada segmento de entrada no interfiere con ninguno de los otros. En la Figura 15.5 se representa el diagrama de flujo para PMESH.

15.2.3 *Definición de las propiedades del material; diferentes rutinas de elementos.* La discusión anterior se ha centrado sólo en las matrices de datos para las coordenadas nodales y la conectividad del elemento. Es también necesario especificar las propiedades del material asociado a cada elemento, las cargas y las vinculaciones de cada nodo.

Cada elemento tiene propiedades del material asociadas al mismo; ej., para materiales elásticos lineales isótropos la constitución del material para un estado isotérmico está definida por el módulo de Young E y el coeficiente de Poisson ν. En la mayoría de los casos, varios elementos tienen las mismas propiedades materiales y no es necesario especificar las propiedades individualmente para cada uno. En este caso, un elemento puede asociarse a un grupo de propiedades del material mediante un solo número en la tarjeta del elemento y las propiedades sólo han de definirse una vez. Por ejemplo, si la región que se muestra en la Figura 15.3 es toda del mismo material, sólo se necesita un grupo de propiedades del material y cada elemento estará referido a ese grupo.

Un ejemplo más complicado es el que se vió en la Figura 1.4 del Capítulo 1, donde los elementos 1, 2, 4 y 5 podían ser elementos planos, mientras que el elemento 3 es un elemento unidimensional. (En los problemas de ingeniería reales pueden necesitarse varios elementos al mismo tiempo.)

En este caso hay que calcular al menos dos tipos de matrices de rigidez diferentes. En nuestro programa existen dispositivos para utilizar hasta cuatro tipos diferentes de rutinas en cualquier análisis. El programa se ha diseñado de manera que todos los cálculos asociados a cualquier elemento están contenidos en una subrutina de elementos llamada ELMTnn, donde nn varía entre 01 y 04 (ver Sección 15.5.3 para discusión de la organización de ELMTnn). Cada tipo de elementos que haya de emplearse se define como parte de los datos de las propiedades del material. Así, si el tipo de elemento 1, calculado utilizando por ejemplo la subrutina ELMT01, es un elemento plano de elasticidad lineal con 3 o 4 nodos y el tipo de elemento 2 es un elemento unidimensional, calculado utilizando por ejemplo la subrutina ELMT04, los datos para el ejemplo de la Figura 1.4 podrían ser:

a) *Propiedades del material:*

N.º del material	Tipo del elemento	Datos de propiedades del material
1	4	$E_1,\ A_1$
2	1	$E_2,\ \nu_2$

b) *Enlaces de los elementos:*

Elemento	Número del material	Conectividad			
1	2	1	3	4	
2	2	1	4	2	
3	1	2	5		
4	2	3	6	7	4
5	2	4	7	8	5

donde E es el módulo de Young, ν el coeficiente de Poisson, y A el área. Así, los elementos, 1, 2, 4 y 5 tienen propiedades materiales del grupo 2 que está asociado al elemento del tipo 1 —es decir, es un elemento plano de elasticidad lineal como muestra la Figura 1.4—. De manera similar, el elemento 3 tiene propiedades materiales del grupo 1 que está asociado al elemento del tipo 4 o elemento unidimensional. Más tarde se verá que el esquema anterior conduce a la organización de una rutina de elemento que lee todos los grupos de datos de los materiales y calcula todas las matrices necesarias para el análisis por elementos finitos.

Se podrían utilizar esquemas más sofisticados (ver la referencia 8); sin embargo, para el tipo y las capacidades del programa que aquí se incluye la complejidad añadida es innecesaria.

15.2.4 *Condiciones de contorno; números de las ecuaciones.* El proceso de definir las condiciones de contorno y el procedimiento de modificar los

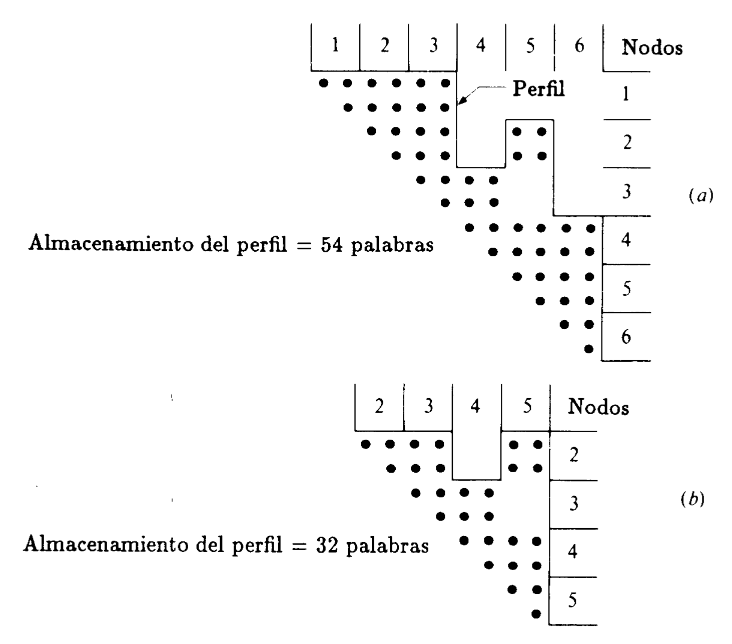


Figura 15.6 Matriz de rigidez. (*a*) Almacenamiento de la rigidez total.
(*b*) Almacenamiento prescindiendo de las condiciones de vinculación.

desplazamientos prescritos están unidos al método adoptado para almacenar las matrices globales, por ejemplo, las matrices de rigidez y de masa. En el programa sólo se almacenan los coeficientes que en las matrices globales estén dentro de un perfil no nulo.

El almacenamiento del perfil no nulo de las ecuaciones lleva a economías considerables en comparación con el almacenamiento de la más tradicional solución en banda.† Además, en general es más eficiente prescindir de las filas y columnas de las ecuaciones que correspondan a desplazamientos especificados en el contorno. Como ejemplo, consideremos la matriz de rigidez correspondiente al problema representado en la Figura 1.1; para almacenar todos los términos comprendidos en el perfil superior se necesitan 54 palabras, mientras que si se eliminan las ecuaciones correspondientes a los nodos vinculados 1 y 6 sólo se requieren 32 palabras para almacenar la rigidez compacta (ver Figura 15.6). Esto representa un ahorro de más del 40% solamente para la matriz de rigidez. El esfuerzo (medido por tiempo de computador) para resolver las ecuaciones mediante un método de perfil es aproximadamente proporcional al cuadrado de la suma de las alturas de las filas. Para el ejemplo de la Figura 15.6 el almacenamiento compactado

† En la Sección 15.6 veremos que el almacenamiento del perfil por columnas conduce a un método directo de solución de las ecuaciones muy eficiente.

conduce también a economías de más del 40 por ciento en la solución de las ecuaciones.

En el método de solución frontal tampoco se incluyen las ecuaciones asociadas a valores prescritos de las variables dependientes. De esta forma, el máximo ancho de frente se reduce al mínimo.

Para facilitar la operación de almacenamiento compacto se introduce como dato una matriz de condiciones de contorno para cada nodo. La matriz se denomina ID y se dimensiona tal como se muestra en la Tabla 15.1. Durante la entrada de datos, la componente de la matriz ID para un grado de libertad nodal que esté definido *a priori*, o bien que no tenga ninguna incógnita asociada (es decir, diferentes nodos pueden tener diferente número de incógnitas asociadas), se hace igual a un valor *no nulo*; para los otros grados de libertad ID vale *cero*. En la Tabla 15.2 se muestran los valores de ID para el ejemplo que se muestra en la Figura 1.1 del Capítulo 1, donde es evidente que los nodos 1 y 6 están completamente vinculados.

TABLA 15.2
VALORES DE LOS CÓDIGOS DE CONTORNOS VINCULADOS PARA ENTRADA DE DATOS DEL PROBLEMA DE LA FIGURA 1.1

Nodo	Grado de libertad	
	1	2
1	1	1
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	-1	1

Los números de las ecuaciones compactadas se obtienen de la Tabla 15.2 sustituyendo cada valor no nulo por un cero y cada valor nulo por el número de la ecuación apropiado. En el programa, esto se efectúa en la subrutina PROFIL comenzando con los grados de libertad asociados al nodo 1, etc. El resultado del ejemplo son los valores que se muestran en la Tabla 15.3, que contiene la información sobre el contorno vinculado pero, además, nos indica cómo ensamblar las ecuaciones compactadas.

La solución de formulaciones mixtas que tienen matrices con diagonales nulas requiere especial cuidado a la hora de resolver las ecuaciones. Por ejemplo, en la formulación q, ϕ de la Sección 12.2 es necesario eliminar todos los parámetros $\bar{q}_i$ asociados a cada $\bar{\phi}_j$ cuando se usen los métodos directos descritos en la Sección 15.6.1. Esto puede conseguirse numerando las entradas de ID de forma que los parámetros $\bar{q}_i$ tengan números de ecuación global

TABLA 15.3
NÚMEROS DE LAS ECUACIONES COMPACTADAS PARA EL PROBLEMA DE LA FIGURA 1.1

Nodo	Grado de libertad 1	Grado de libertad 2
1	0	0
2	1	2
3	3	4
4	5	6
5	7	8
6	0	0

menores que el parámetro $\bar{\phi}_j$ asociado.

El esquema de numeración de ecuaciones puede utilizarse además para tratar contornos repetidos (véase Capítulo 8, Sección 8.18), donde se impone que los nodos de dos contornos tengan el mismo desplazamiento cuyo valor se desconoce. Esto se consigue asignando el mismo valor a los números de las ecuaciones (prescindiendo del número no utilizado). El perfil de la ecuación o el frente se ajustan entonces de acuerdo con la conectividad (véase Sección 15.2.7).

15.2.5 *Cargas.* Deben definirse las fuerzas o desplazamientos nodales no nulos asociados a cada grado de libertad. En el programa, ambos se almacenan en la matriz F, y fuerzas y desplazamientos se distinguen entre sí comparando el valor correspondiente de la condición de contorno prescrita (de la tabla de los números de las ecuaciones) para cada grado de libertad. Para el ejemplo de la Figura 1.1, si a F(1,1) se le diera el valor 0,01 significaría que el desplazamiento del primer grado de libertad (es decir, u) está definido por 0,01 unidades, mientras que si F(2,3) valiera 5 indicaría que la fuerza correspondiente al segundo grado de libertad tiene un valor de 5 unidades.

En muchos problemas las cargas pueden estar repartidas y en tales casos deben convertirse en fuerzas nodales antes de nada. Esto puede facilitarse en la entrada de datos añadiendo una nueva macroinstrucción DIST, que a su vez llama a una subrutina SLDnn para efectuar el cálculo de las fuerzas nodales equivalentes. Una vez que todas las cargas repartidas se han convertido en fuerzas generalizadas, se tratan de la misma manera que las cargas leídas por FORC. Nota aclaratoria: el uso del macro DIST debe seguir a la especificación de nuevo BOUN si el nodo sobre el que actúa la carga repartida está vinculado.

El programa también permite especificar las temperaturas en los nodos. (Se utilizan para el cálculo de fuerzas debidas a la temperatura en problemas de estructuras; para otra clase de problemas, pueden interpretarse de manera

distinta por el usuario.) Las temperaturas se introducen para cada nodo de la misma manera que las fuerzas y las coordenadas.

En la Sección 15.3 se dan instrucciones específicas para la preparación de datos para cada uno de los grupos discutidos con anterioridad.

15.2.6 *Comprobación de los datos de malla.* Una vez proporcionados todos los datos de geometría, material y cargas, el programa estará listo para iniciar la ejecución del módulo de solución; no obstante, antes de ello suele ser preferible efectuar algunas comprobaciones de los datos leídos. La comprobación más sencilla sería un listado de los datos (y valores generados) tal como se da en el archivo de salida del programa. Para problemas grandes este procedimiento de comprobación dejaría grandes dudas acerca de la precisión de los datos —¡es muy fácil introducir erróneamente algún dato y no percibirse del error a simple vista!—. Como método alternativo de comprobación se recomienda utilizar un procedimiento automático para dibujar la malla a escala. Adicionalmente, en elementos isoparamétricos se puede comprobar también el valor del jacobiano, como se sugirió en el Capítulo 8. Este programa permite dicha comprobación. También se pueden preparar rutinas de dibujo de mallas para problemas tridimensionales; sin embargo, si no se pueden borrar las líneas ocultas, o bien girar o seccionar las figuras, los gráficos corrientes son ininteligibles incluso en los problemas más sencillos. El tema general del trazado gráfico automático cae fuera del ámbito de este libro y se recomienda al lector que consulte las referencias 9 y 10 para mayor información sobre aspecto tan importante en cualquier programa práctico de elementos finitos.

15.2.7 *Determinación del frente y del perfil.* Como se ha discutido antes, el vector global para la matriz de coeficientes debe almacenarse bien en un modo frontal o en perfil, dependiendo de la opción de solución que se use. En ambos, la forma de almacenamiento es según las columnas situadas encima de la diagonal principal. En el método de perfil la diagonal se almacena separadamente, mientras que en el método frontal se guarda como parte de cada columna (la diferencia se debe a la eficiencia en la implementación de los algoritmos de Gauss y Crout).

Para minimizar los requisitos de almacenamiento del método de banda variable, antes que nada es necesario conocer el perfil de las ecuaciones; éste se determina numerando primeramente las ecuaciones activas como se ha descrito anteriormente y luego, usando la matriz de enlaces del elemento, IX, junto con el número de la ecuación y la matriz de condiciones de contorno, ID, para determinar el número de filas máximo de cada ecuación. Finalmente, las ecuaciones se compactan en una matriz y los valores del número de filas máximo se usan para fijar la dirección de los elementos diagonales en la matriz almacenada. Los pasos necesarios en la programación para determinar el perfil se dan en la subrutina PROFIL. El número total de ecuaciones está

determinado por el máximo valor de la matriz ID y se denomina NEQ. Las necesidades totales de almacenamiento para la mitad superior (o inferior) de la matriz perfil vienen determinadas por la dirección de la diagonal NEQ [osea, JDIAG(NEQ)]. Así pues, las necesidades de almacenamiento por encima del prefijado originalmente deben incrementarse en esa cantidad para cada matriz de perfil requerida, ej., en NEQ y JDIAG(NEQ) para problemas lineales simétricos en régimen permanente.

En el método frontal, la presente implementación divide el almacenamiento disponible en dos partes: una parte almacena los coeficientes y el término de la derecha de las ecuaciones del frente activo, y la otra se usa para almacenar las ecuaciones que ya han sido reducidas. Cuando esta segunda parte está llena, se realiza una operación de escritura a disco. Esto minimiza las costosas operaciones de entrada/salida al disco y mejora mucho la eficiencia respecto a implementaciones anteriores (ej., aquellas de las referencias 2 ó 3). Para hacer esta división es necesario conocer de antemano cómo de grande va a ser el frente durante el proceso de solución. Este cálculo lo lleva a cabo el subprograma PREFRT y se almacena en la variable MAXF.

15.3 Instrucciones del programa

La solución de un problema de elementos finitos mediante el programa expuesto al final de este capítulo comienza con la división de la región a analizar en una malla de elementos. El usuario debe seleccionar un sistema consistente de unidades para definir los valores numéricos de los datos. Si los contornos son curvos, la malla solamente aproximará la forma de la región (ej., véase Figura 15.7). Al dibujar la malla hay que tener en cuenta el tipo y orden (lineal, cuadrático etc.) de los elementos: para elementos triangulares bidimensionales la malla se define por una red de triángulos, mientras que para elementos cuadrilaterales isoparamétricos de 4 nodos la región puede definirse mediante una red de cuadriláteros. Puede que el usuario desee utilizar triángulos y cuadriláteros al mismo tiempo; en tal caso pueden ser necesarias dos rutinas de elementos, una para triángulos y otra para cuadriláteros. La rutina de funciones de forma, SHAPE, para cuadriláteros que se ofrece en este capítulo incluye el triángulo de tres nodos fusionando las funciones de forma de dos nodos; por tanto, en este caso solamente es necesario usar una rutina de elemento.[11]

Después de dibujada la malla se numeran los elementos y los nodos siguiendo un orden consecutivo. El orden de numeración de los nodos tiene gran importancia para el método de solución en perfil, mientra que el orden de numeración de los elementos es crucial para el método frontal. Como regla general, numerar los elementos y nodos a lo largo de las mismas direcciones de la malla produce a la vez un frente mínimo y un perfil mínimo. De hecho, numerar los nodos en el orden en que una solución frontal con el mínimo

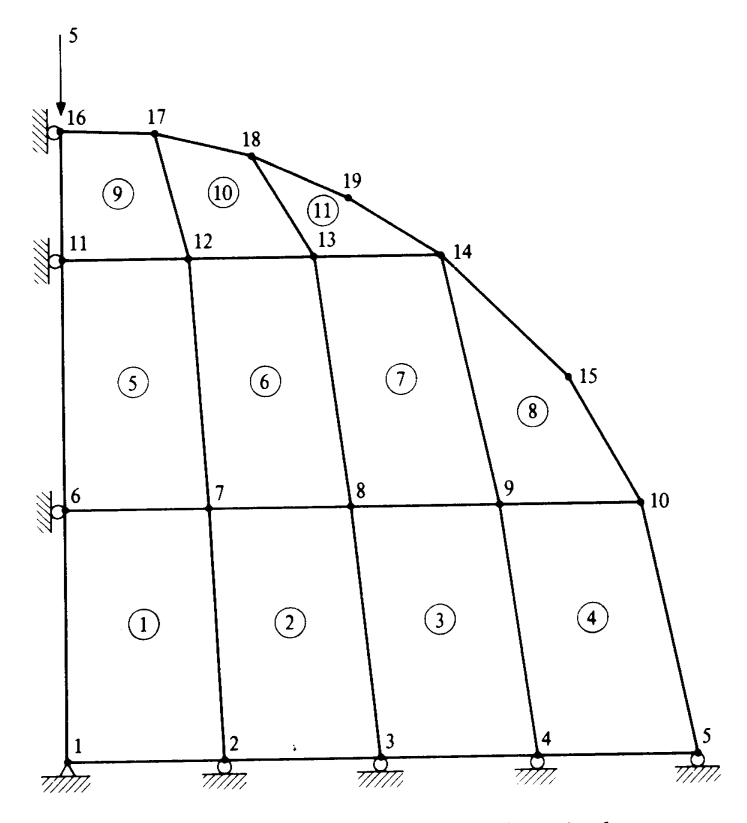


Figura 15.7 Malla para el problema del disco circular.

esfuerzo eliminaría las incógnitas produce también un esquema eficiente para la solución de perfil (ej., ver referencia 12, donde se muestra que el esfuerzo en ambos métodos de solución es idéntico). A menudo se puede mejorar la numeración usando un esquema de renumeración automático.[13–15] El método de la referencia 15 produce una numeración cuasi-óptima para el número de términos en el perfil, lo cual proporciona la máxima eficiencia al resolver. La programación para implementar este método es muy compacta y se ejecuta a gran velocidad.

Una vez completados el dibujo y la numeración de la malla, el usuario puede proceder a preparar los datos para el problema y la información de control de la Tabla 15.4, utilizada durante la entrada de datos subsiguiente y también para asignar posiciones de memoria en el programa.

TABLA 15.4

FORMATO PARA EL TÍTULO Y LA INFORMACIÓN DE CONTROL

TÍTULO-FORMAT (20A4)
El título sirve también como comienzo del problema.
Las cuatro (4) primeras columnas deben contener la palabra de comienzo FEAP.

Columnas	*Descripción*	*Variable*
1 a 4	Debe contener FEAP	TITL(1)
5 a 80	Información alfanumérica que se escribirá en la salida de los resultados encabezando la página.	TITL(I),I= 2, 20

DATOS DE CONTROL-FORMAT (7I5)

Columnas	*Descripción*	*Variable*
1 a 5	Número de nodos	NUMNP
6 a 10	Número de elementos	NUMEL
11 a 15	Número de tipos de materiales	NUMMAT
16 a 20	Dimensión espacial (≤ 3)	NDM
21 a 25	Número de incógnitas por nodo (≤ 6)	NDF
26 a 30	Número de nodos/elemento	NEN
31 a 35	Incremento del tamaño de las matrices del elemento sí éste excede NDFNEN	NAD

Además de los formatos de entrada de datos, la Tabla 15.4 muestra el nombre de las variables que se emplean en el programa. Las variables NDF, NEN y NAD se utilizan para calcular el tamaño de las matrices de los elementos, NST. Normalmente, para formulaciones por el método de los desplazamientos, NDFNEN es el tamaño de la matriz de cada elemento; no obstante, si utilizan variables anodales o métodos híbridos, puede ser necesario aumentar el tamaño de la matriz de los elementos en NAD (nótese que la variables NAD no se ensamblan como parámetros globales).

Una vez leídos todos los datos de control, el programa espera las líneas de datos de descripción de la malla; ej., coordenadas de nodos, conectividad de los elementos, etc. Cada problema o clase de problemas requiere diferentes tipos y cantidades de datos; en consecuencia, el flujo de datos en el programa está controlado por un grupo de *macroinstrucciones*. En la Tabla 15.5 se ofrecen las macroinstrucciones disponibles; se pueden añadir otras, modificando adecuadamente en la subrutina PMESH la lista de datos WD. Las macroinstrucciones PRINt† y NOPRint permiten al usuario escribir o no respectivamente los datos que se van leyendo. Así, una vez que una malla haya sido comprobada totalmente y se deseen nuevos análisis, no es necesario

† Sólo son datos las palabras en mayúsculas. En el programa, el texto se puede introducir en mayúsculas o minúsculas. PCFEAP incluye un traductor de formato libre, que permite introducir texto y campos numéricos separados mediante comas (,). Esto evita la necesidad de llevar la cuenta de las columnas.

volver a escribir todos los datos de la misma.
Un análisis necesita al menos de:

a) datos de coordenadas de acuerdo con la macroinstrucción COOR que se preparan de acuerdo con la Tabla 15.6;
b) datos de los elementos de acuerdo con la macroinstrución ELEM que se preparan como se explica en la Tabla 15.7; y
c) datos del material de acuerdo con la macroinstrucción MATE que se preparan de acuerdo con la Tabla 15.8 y con los datos necesarios para cada elemento en particular (véase Sección 15.8.3).

Además, la mayoría de los análisis requerirán especificar las condiciones de los nodos vinculados en el contorno, macro BOUN, y las correspondientes fuerzas nodales o valores de los desplazamientos, macro FORC, que se definen de acuerdo con las Tablas 15.9 y 15.10 respectivamente. El programa permite la especificación de contornos inclinados en dos dimensiones utilizando el macrocomando ANGL. Se introduce el ángulo antihorario, en grados, que el eje 1 local forma con la dirección X(1,I). A continuación, los valores de FORC y BOUN son interpretados con respecto a la dirección rotada. Ciertos análisis pueden tener cantidades nodales auxiliares para definir las cargas. Por ejemplo, en el análisis de problemas de elasticidad, la temperatura puede proporcionar cargas. El programa permite definir una temperatura (o su carga nodal correspondiente) usando el macro TEMP seguido de los datos preparados de acuerdo con la Tabla 15.11.

El final de cualquier malla se indica mediante la macroinstrucción END. El empleo de las tarjetas de macroinstrucciones permite al usuario definir sólo aquellos datos necesarios para cada análisis. La instrucción END significa fin de entrada de datos de la malla. El uso de tarjetas de macroinstrucciones reduce también la posibilidad de errores en la entrada de datos debidos a tarjetas en blanco introducidas por error. Solamente es necesario seguir un orden estricto en la secuencia de los datos dentro de cada macro segmento. Detrás de cada segmento de datos pueden aparecer varias líneas en blanco sin que afecten a la ejecución del programa.

Una vez proporcionados todos los datos, el usuario puede elegir entre resolver el problema o no. Si sólo se desea una comprobación de la malla, se inserta la macroinstrucción STOP para detener la ejecución, o comenzar un nuevo problema tal como se describe en la Tabla 15.1. Si se desea la solución del problema, es necesario introducir nuevos datos de la forma que se expone en la sección siguiente.

Como ejemplo de los datos necesarios para definir una malla, consideremos la malla que se halla representada en la Figura 15.7 para un cuadrante de un disco circular; en la Tabla 15.15 se reseñan las tarjetas de datos de entrada de este problema.

TABLA 15.5

ENTRADA DE DATOS: INSTRUCCIONES DE MACROCONTROL

DATOS DE MACRO CONTROL-FORMAT (A4)
La lectura de cada segmento de datos está controlada por el valor asignado a CC. A continuación se muestran los valores admisibles; cada línea de CC debe ir inmediatamente seguida de los datos correspondientes (descritos en las Tablas 15.6 a 15.14).

Valor de CC	*Datos a entrar*
COOR	Datos de coordenadas.
ELEM	Datos de elementos.
MATE	Datos del material.
BOUN	Datos de condiciones de contorno.
FORC	Datos de las fuerzas nodales prescritas.
TEMP	Datos de temperatura.
BLOC	Datos de nodos y elementos.
POLA	Convertir coordenadas polares a cartesianas.
ANGL	Ángulo de inclinación de contornos bidimencionales.
PRIN	Escribir los datos de la malla siguientes (modo por defecto).
NOPR	No escribir los datos de la malla siguientes.
END	Debe ser la última tarjeta en los datos de la malla; pone fin a la lectura de datos de la malla.

Excepto para END y POLA los segmentos de datos pueden estar en cualquier orden. Si los valores de ANGL, BOUN, FORC o TEMP son cero no hay que leer esos datos.

TABLA 15.6

DATOS DE COORDENADAS

DATOS DE COORDENADAS-FORMAT (2I10, 6F10.0)- van inmediatamente después del macro COOR.
Los datos de coordenadas contienen el número del nodo, N, y el valor de sus coordenadas. Solamente se utilizan los valores de (XL(I),I= 1, NDM), donde NDM es el valor leído en la línea de control.

Las coordenadas nodales pueden generarse a lo largo de una línea recta descrita por los valores leídos en dos líneas sucesivas. El valor del número del nodo se calcula usando el N y NG de la primera línea para calcular la secuencia N, N+NG, N+2NG, etc. NG puede leerse como un número negativo; en caso de tener el signo incorrecto, éste se cambiará. Los nodos no necesitan ser entrados en orden.

Columnas	*Descripción*	*Variable*
1 a 5	Número del nodo	N
6 a 10	Incremento para generación	NG
11 a 20	Coordenada X1	XL(1)→X(1,N)
21 a 31	Coordenada X2	XL(2)→X(2,N)
31 a 40	Coordenada X3	XL(3)→X(3,N)

Nota: Terminar con una(s) línea(s) en blanco.

TABLA 15.7

DATOS DEL ELEMENTO

DATOS DEL ELEMENTO-FORMAT (16I5)- deben ir inmediatamente a continuación de un comando ELEM.
Los datos de los elementos contienen el número del elemento, número del tipo de material (que también selecciona el tipo de elemento, ver la Tabla 15.8), y la secuencia de nodos conectados al elemento. Si el número de éstos es menor que NEN nodos (ver Tabla 15.1 para la lectura de NEN) dejar los espacios en blanco o escribir ceros.
Los elementos deben estar ordenados. Si se omiten las tarjetas de los elementos los datos del elemento se generan a partir de los del elemento anterior con el mismo número del material y los nodos todos incrementados por el LX del elemento anterior. Cuando el programa encuentra una línea en blanco la generación continúa hasta el último elemento.

Columnas	*Descripción*	*Variable*
1 a 5	Número del elemento	L
6 a 10	Número del tipo de material	IX(NEN1,L)
11 a 15	Número del nodo 1	IX(1,L)
16 a 20	Número del nodo 2	IX(2,L)
etc.	⋮	⋮
etc.	Número del nodo NEN	IX(NEN,L)
etc.	Incremento para generación	LX

TABLA 15.8

DATOS DE PROPIEDADES DE MATERIALES

GRUPOS DE DATOS DEL MATERIAL-deben ir inmediatamente a continuación del macro MATE.
Cada grupo de propiedades de materiales selecciona también el tipo de elemento que se usará para los datos de las propiedades de los materiales.
RECORD 1). FORMAT (8I10)

Columnas	*Descripción*	*Variable*
1 a 10	Número de grupo de propiedades	MA
11 a 20	Tipo de elemento (1 a 4)	IEL
21 a 30	GDL global para GDL 1 local	IDL(1)
31 a 40	GDL global para GDL 2 local	IDL(2)
...	etc. hasta NDL	

El IDL(I) puede usarse para reasignar números de grados de libertad de variables locales de elemento a números de grados de libertad global. Los valores por defecto son IDL(I)=I. Si los valores introducidos son IDL(1)=2 y IDL(2)=1 entonces el GDL 1 del elemento será asignado al GDL global 2 y el GDL 2 del elemento al GDL 1 (intercambiados). Si cualquier IDL es no nulo un valor cero de otro GDL no será ensamblado. Así, es fácilmente posible restringir problemas bidimensionales para que respondan con una solución unidimensional. Cada Record 1) material debe ser seguido inmediatamente por los datos de propiedades de materiales precisadas por el tipo de elemento IEL que se está usando, ej., ver Sección 15.8.3.

TABLA 15.9

DATOS DE CONDICIONES DE CONTORNO

CONDICIONES DE CONTORNO-FORMAT (16I5)- deben ir inmediatamente a continuación de un macro BOUN
Para cada nodo que tenga al menos un grado de libertad con un desplazamiento restringido debe leerse un conjunto de condiciones de contorno. El código para movimientos restringidos en el contorno es

= 0 no vinculado, fuerza especificada
$\neq$ 0 restringido, desplazamiento especificado

Valores de la fuerza o del desplazamiento que se leen en FORC (Tabla 15.10):

Columnas	*Descripción*	*Variable*
1 a 5	Número del nodo	N
6 a 10	Incremento para generación	NX
11 a 15	Código para el GDL 1	IDL(1) → ID(1,N)
16 a 20	Código para el GDL 2	IDL(2) → ID(2,N)
etc.	⋮	⋮
etc.	Código para el GDL NDF	IDL(NDF) → ID(NDF,N)

Nota: Al generar los códigos de condiciones de contorno para los nodos IDL se hace igual a cero si se lee ≥ 0, e igual a -1 si se lee negativo. Todos los grados de libertad con códigos no nulos se suponen fijos. Acabar con una(s) líneas(s) en blanco.

TABLA 15.10

DATOS DE VALORES DE LAS FUERZAS NODALES O DESPLAZAMIENTOS PRESCRITOS

DATOS DE FUERZAS-FORMAT (2I10, 7F10.0)- debe ir inmediatamente a continuación de un macro FORC.
Para cada nodo que tenga una fuerza o desplazamiento nulo debe leerse o generarse una tarjeta de fuerza. La generación es idéntica a la de los datos de coordenadas (ver Tabla 15.6). El valor que se especifica es una fuerza si el código de restricción correspondiente es cero y un desplazamiento si el código de restricción correspondiente no es cero.

Columnas	*Descripción*	*Variable*
1 a 10	Número del nodo	N
11 a 20	Incremento para generación	NG
21 a 30	Fuerza (Desplaz.) del GDL 1	XL(1) → F(1,N)
31 a 40	Fuerza (Desplaz.) del GDL 2	XL(2) → F(2,N)
etc.	⋮	
etc.	Fuerza (Desplaz.) del GDL NDF	XL(NDF) → F(NDF,N)

Nota: Terminar con una(s) tarjeta(s) en blanco.

TABLA 15.11

DATOS DE TEMPERATURAS NODALES

DATOS DE TEMPERATURA-FORMAT (2I10, F10.0)- debe ir inmediatamente a continuación de un macro TEMP.
Para cada nodo que tenga una temperatura no nula debe leerse su valor. Los valores pueden generarse de igual manera que para las coordenadas (ver Tabla 15.6).

Columnas	*Descripción*	*Variable*
1 a 10	Número del nodo	N
11 a 20	Incremento para generación	NG
21 a 30	Temperatura nodal	XL(1) → T(N)

Nota: Terminar con una(s) tarjeta(s) en blanco.

TABLA 15.12

DATOS DE MALLA POR BLOQUES

DATOS DE BLOQUE - deben ir inmediatamente a continuación de un macro BLOC. Genera un "bloque" de nodos y elementos. Se describe un superelemento mediante un cuadrilátero de cuatro o nueve supernodos que se numeran como se muestra en la Figura 15.25. Los datos del bloque se especifican como sigue:

RECORD 1) FORMAT 8I10

Columnas	*Descripción*	*Variable*
1 a 10	Número de supernodos	NN
11 a 20	Número de espacios a lo largo del lado 1–2 del superelemento	NR
21 a 30	Número de espacios a lo largo del lado 1–4 del superelemento	NS
31 a 40	Número del primer elemento del bloque en el supernodo 1	NI
41 a 50	Número del primer elemento del bloque adyacente en el supernodo 1	NE
51 a 60	Número del conjunto de propiedades para el bloque	MA
61 a 70	Incremento de nodos entre líneas	NODINC
71 a 80	Tipo de bloque	NTYP
	0 = cuadriláteros de 4 nodos	
	8 = cuadriláteros de 8 nodos	
	9 = cuadriláteros de 9 nodos	

Notas: (1) Los nodos se incrementan a lo largo del lado 1–2 del superelemeto, luego saltan NODINC nodos antes de comenzar la siguiente línea.
(2) Si NE es cero no se genera ningún elemento.
(3) NR y NS deben ser impares para NTYP 8 ó 9.
(4) Los elementos cuadriláteros de ocho nodos generan un nodo central, pero éste no se conecta al elemento (debe anularse con restricciones a través de BOUN)

RECORD 2 al NN+1. FORMAT I10,3F10.0

Columnas	*Descripción*	*Variable*
1 a 10	Número del supernodo	L
11 a 20	Coordenada X1 del supernodo	R
21 a 30	Coordenada X2 del supernodo	S
31 a 40	Coordenada X3 del supernodo	T

Nota: sólo se usan NDM coordenadas del supernodo.

TABLA 15.13

DATOS DE COORDENADAS POLARES

DATOS POLARES - FORMAT 3I10.0, 2F10.0 - Deben ir imnediatamente a continuación de un macro comando POLA.
Cada nodo que ha sido previamente introducido en forma polar r, θ (o r, θ, z), donde θ es en grados medidos anteriormente desde el eje X1, es tranformado a componentes cartesianas X1, X2 (o X,1, X2, X3).

Columnas	*Descripción*	*Variable*
1 a 10	Número del primer nodo	NI
11 a 20	Número del último nodo	NE
21 a 30	Incremento entre nodos	INC
31 a 40	Coordenada X1 del centro de coordenadas polares	XO
41 a 50	Coordenada X2 del centro	YO

Nota: las coordenadas se calculan:

$$X(1, I) = XO + r\cos\theta$$
$$X(2, I) = YO + r \text{ sen } \theta$$
$$X(3, I) = X(3.I)$$

donde: r es X(1,I) y θ es X(2,I) introducidos a través de COOR o BLOC.

TABLA 15.14

DATOS DE ÁNGULOS

DATOS ANGULARES - FORMAT 2I10,F10.0 - deben ir inmediatamente después de un macro comando ANGL.
Los datos de ángulos contienen el número de nodo N y el valor del ángulo en grados, medido antihorariamente desde el eje X1. Los ángulos nodales pueden generarse usando NG de la misma forma que los datos de coordenadas,

Columnas	*Descripción*	*Variable*
1 a 10	Número de nodo	N
11 a 20	Incremento de generación	NG
21 a 30	Ángulo en grados	ANG

TABLA 15.15

EJEMPLO DE LAS TARJETAS DE DATOS PARA EL PROBLEMA DEL DISCO

```
FEAP * * QUADRANT OF A CIRCULAR DISK  (EXAMPLE PROBLEM)
  19   11    1    2    2    4
COORD

    1    1  0.                  0.
    5    0  5.                  0.
    6    1  0.                  2.
   10    0  4.5828              2.
   11    1  0.                  4.
   14    0  3.0                 4.
   15    0  4.0                 3.
   16    0  0.                  5.
   17    0  0.75                4.9434
   18    0  1.5                 4.7697
   19    0  2.25                4.4651

ELEM
    1    1    1    2    7    6    1
    5    1    6    7   12   11    1
    9    1   11   12   17   16    1

BOUN
    1    1    1   -1
    5    0    0    1
    6    5   -1    0
   16    0    1    0

FORC
   16    0    0.            -5.

MATE
    1    1
   100.         0.3       0.0        2    1    1

END
```

o bien, en formato libre y usando el preprocesador de texto en minúsculas:

```
feap** Quadrant of a circular disk (example problem)
19,11,1,2,2,4
coord
1,1,0.,0.
5.,5.
6,1.,2.
10.,4.5828,2.
etc., hasta
end
interactive

stop
```

15.4 La solución de problemas de elementos finitos y el lenguaje de macroprogramación

Finalizada la entrada de datos y la comprobación de la malla, se estará en condiciones de iniciar la solución del problema. Es en ese momento que en el programa debe estar disponible para el usuario el tipo particular de solución. En muchos programas existentes el usuario sólo dispone de un pequeño número fijo de algoritmos de solución. Por ejemplo, el programa puede ser capaz sólo de resolver problemas lineales estacionarios; o, adicionalmente, puede estar preparado para resolver problemas lineales en régimen transitorio. En la práctica, los programas de ingeniería de algoritmos fijos son demasiado restrictivos y el usuario debe modificar continuamente el programa para resolver su problema —¡frecuentemente a expensas de otro usuario!—. Por tal motivo es conveniente tener un programa que contenga módulos para varias posibilidades de algoritmos y que, en caso necesario, pueda modificarse sin interrumpir las posibilidades de empleo por otros usuarios. El programa del que aquí tratamos es elemental y el lector puede sin duda encontrar muchas maneras de mejorarlo y ampliarlo a otra clase de problemas. Una modificación importante sería incluir un lenguaje de interpretación matricial de manera que términos individuales o ecuaciones puedan modificarse para necesidades específicas.

El concepto de macroprogramación descrito en esta sección ha sido usado por los autores durante más de 10 años, y hasta la fecha no ha inhibido nuestras actividades de investigación por quedar anticuado. El mismo programa se usa de forma rutinaria para resolver problemas en ordenadores personales, miniordenadores y ordenadores de gran tamaño. Sólo los subprogramas de solución de ecuaciones se cambian según los diferentes entornos.

15.4.1 *Problemas lineales en régimen permanente.* El aspecto básico del programa de algoritmos variables es un lenguaje de macroinstrucciones que puede utilizarse para elaborar módulos para algoritmos específicos de acuerdo con las necesidades. El usuario solamente necesita aprender las reglas nemotécnicas del lenguaje para su utilización. Por ejemplo, si se desea formar la matriz de rigidez global se emplea la instrucción TANG (TANG es la regla nemotécnica para una matriz de rigidez tangente, y para elementos no lineales, forma y ensambla en la matriz de rigidez global las matrices de rigidez tangentes calculadas de acuerdo con el estado de desplazamientos real; para elementos lineales es simplemente la matriz de rigidez lineal). Si se desea formar el 2.° miembro de las ecuaciones modificadas para los desplazamientos prescritos se utiliza la instrucción FORM. Las ecuaciones resultantes se resuelven mediante la instrucción SOLV. La salida de resultados puede obtenerse empleando las instrucciones DISP para los desplazamientos, y STRE para las variables de los elementos, como tensiones y deformaciones.

TABLA 15.16

LISTADO DE LOS COMANDOS DEL LENGUAJE DE MACROPROGRAMACIÓN

La tabla siguiente contiene una lista de los comandos de macroinstrucciones que pueden usarse para construir algoritmos de solución. en modo "de cola", el comando MACR debe colocarse después de los datos de la malla. Las demás macroinstrucciones deben seguir a continuación, y terminar con un macro END. En modo interactivo, el comando INTE sigue a los datos de malla, y a continuación, los usuarios son interrogados para especificar el algoritmo de solución, terminando con un comando QUIT o EXIT (EXIT genera un archivo de datos para recomenzar).
FORMAT – A4,11X,A4,11X,3F15.0

Columnas					
1–4	16–19	31–45	46–60	61–75	Descripción
BETA		V1	V2		Especifican parámetros para análisis transitorio por defecto V1= 0.25, V2= 0.50
CHEC					Comprobar la malla (ISW=2)†
DATA	T				Leer datos para el macrocomando T (T puede ser sólo DT o TOL)
DISP	ALL	N1	N2	N3	Imprimir desplazamientos de los nodos N1 a N2 con incrementos de N3; ALL para imprimirlos todos
DT		V1			Hacer el incremento en el tiempo a V1
FORM					Formar el segundo miembro de las ecuaciones (ISW=6)
LOOP		N			Repetir n veces todas las instrucciones hasta el macro NEXT correspondiente
MASS					Formar la masa diagonal (ISW=5)
MESH					Introducir cambios en la malla (no puede cambiar condiciones de contorno o conectividades elementales)
NEWF					Fijar una fuerza de referencia $\mathbf{F}_0$ en el estado de carga actual (inicialmente, $\mathbf{F} = \mathbf{0}$)
NEXT					Finalizar una instrucción LOOP
PLOT	MESH	V1	V2		Dibujar la malla, V1 es el factor de escala de deformación, V2 es el conjunto de propiedades (0= todos)
PLOT	OUTL	V1	V2		Dibujar el contorno de la malla, V1, V2 como para MESH
PROP		N1			Introducir N1 tablas de cargas proporcionales
REAC	ALL	N1	N2	N3	Imprimir reacciones en los nodos N1 a N2 con incrementos de N3; ALL imprime todos los valores (ISW=6)
REST					Recomenzar el problema previo a partir de los archivos especificados al comienzo del análisis
SOLV					Resolver para hallar nuevos desplazamientos (después de FROM)
STRE	ALL	N1	N2	N3	Imprimir variables para elementos N1 a N2 con incrementos N3 (ISW=4)

†Las operaciones son comprobadas en cada elemento para epecificar el valor de ISW

Columnas					
1–4	16–19	31–45	46–60	61–75	Descripción
STRE	NODE	N1	N2	N3	Imprimir variables (tensión, etc.) para los nodos N1 a N2 con incrementos de N3 (ISW=8)
STRE	ERRO				Imprimir estimadores de error y de refinamiento para los elementos (ISW=7)
TANG		V1	V2		Calcular y factorizar también el residuo y resolver las ecuaciones; perturbar la matriz tangente con V2 veces la matriz de masa
TIME					Avanzar en el tiempo en un valor DT
TOL		V1			Fijar el valor de la tolerancia a V1

Un ALL añadido a DISP o STRE indica que se deben imprimir resultados para todos los nodos/elementos. Es posible imprimir deteminadas secuencias de resultados, como se muestra en la Tabla 15.16. Las instrucciones anteriores son suficientes para resolver problemas lineales en régimen permanente, es decir, las macroinstrucciones

```
TANG
FORM
SOLV
DISP,ALL
STRE,ALL
```

son exactamente las necesarias para resolver cualquier problema lineal en régimen permanente. Sin duda el lector observará en este punto que el orden de dichas instrucciones puede cambiarse a veces sin afectar al algoritmo. Por ejemplo, si se emplean las macroinstrucciones

```
FORM
TANG
SOLV
STRE,ALL
DISP,ALL
```

se tiene el mismo algoritmo, excepto que los resultados de las cantidades relativas a los elementos se obtienen antes que los desplazamientos nodales.

El programa de algoritmos variables descrito mediante el macrolenguaje puede ampliarse en caso necesario. Por ejemplo, cuando se analizan problemas con varios estados de carga, la matriz de rigidez global es siempre la misma y sólo necesita formarse una vez. El segundo miembro varía y es preciso calcular los nuevos desplazamientos. El procedimiento para

resolver dos estados de cargas requiere cambiar las fuerzas nodales y/o los desplazamientos prescritos. La macroinstrucción MESH hace que vuelva a utilizarse el módulo de entrada de datos, y en ese momento pueden cambiarse las fuerzas. Los datos se colocan *después* de las macroinstrucciones del programa que terminan con la sentencia END. Así pues, el macro programa y los datos para dos estados de carga podría ser:

```
TANG
 MESH     }
 FORM     }
 SOLV     }  instrucciones para el problema 1
 DISP,ALL }
 STRE,ALL }
 MESH     }
 FORM     }
 SOLV     }  instrucciones para el problema 2
 DISP,ALL }
 STRE,ALL }
END  fin del macroprograma
FORC
       cargas para el problema 1
END  fin de entrada de datos de la malla
FORC
      cargas para el problema 2
END  fin de entrada de datos de la malla
```

Advertirá el lector que se repite dos veces el mismo bloque de instrucciones y que si hubiera diez estados de carga se perdería un esfuerzo considerable en preparar las tarjetas de datos del macrograma. Para corregir esto se introducen bucles tal como el par de instrucciones

```
LOOP,,n
  ⋮
NEXT
```

que indica que el bucle sobre todas las instrucciones entre LOOP y NEXT se repetirá n veces; por consiguiente, el macroprograma para dos estados de carga será ahora

```
TANG
LOOP,,2
MESH
SOLV
DISP, ALL
STRE, ALL
NEXT
END        final del nuevo programa
FORC
   cargas para el problema 1
END
FORC
   cargas par el problema 2
END
```

Debe notarse que en el modo INTEractivo la ejecución no comienza hasta que un LOOP no se cierra con una instrucción NEXT.

En este programa se tiene la misma sencillez con diez estados de carga que con dos (excepto para los datos de FORC).

Se dará cuenta el lector que la instrucción TANG se ejecuta sólo una vez mientras que la instrucción SOLV se ejecuta dos. El programa reconocerá automáticamente que la segunda ejecución utiliza una matriz de rigidez para la cual ya se ha llevado a cabo la descomposición triangular, y seleccionará un modo operativo de *resolución* (ver la Sección 15.6).

Pueden resolverse otros muchos problemas usando la sencilla lista de macroinstrucciones expuesta en la Tabla 15.16. En los apartados siguientes se resumen algunos algoritmos.

15.4.2 *Método de carga incremental.* Se da a continuación el programa de macro- instrucciones para resolver un problema en el que las cargas cambian con el tiempo. Se supone que el problema tiene un conjunto de cargas que varían con el tiempo de forma proporcional. El programa PCFEAP puede cambiar las cargas en cada paso como se ha descrito anteriormente; sin embargo, en las situaciones en que se dé proporcionalidad es posible variar las cargas mediante la especificación de un conjunto de funciones de carga. Se supone que la forma general de las cargas dependientes del tiempo es

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0 + P(t)\mathbf{F} \tag{15.1}$$

TABLA 15.17

CARGAS PROPORCIONALES — FORMAT (2I10,6F10.0)

Columna	*Descripción*	*Variable*
1 a 10	No se usa (tipo de carga = 1)	
11 a 20	Exponente de la función seno	L
21 a 30	Tiempo mínimo de carga	TMIN
31 a 40	Tiempo máximo de carga	TMAX
41 a 50	Parámetro 1	A1
51 a 60	Parámetro 2	A2
61 a 70	Parámetro 3	A3
71 a 80	Parámetro 4	A4

Nota: se pueden introducir un número de 10 funciones de carga proporcional a la vez

donde $\mathbf{F}(t)$ es el vector de cargas actuales, $\mathbf{F}_0$ es un vector fijo de fuerzas, $\mathbf{F}$ es el conjunto de fuerzas nodales definidas por el comando FORC, y $P(t)$ es una función temporal de carga proporcional. En PCFEAP la carga proporcional se puede especificar como:

$$P(t) = A_1 + A_2 t + A_3[\text{sen}(A_4 t + t_{min})]^L \quad t_{min} \leq t \leq t_{max} \tag{15.2}$$

Se pueden introducir un máximo de 10 funciones de carga proporcional en cada momento; la función se puede hacer cero tan a menudo como se desee durante la ejecución (ver la Tabla 15.17).

Se puede usar el macro comando NEWF para igualar el valor de $\mathbf{F}_0$ al valor actual y la distribución de $\mathbf{F}(t)$. En consecuencia, la distribución de fuerzas se puede entonces redefinir para describir un nuevo estado de carga proporcional. Al principio de la ejecución $\mathbf{F}_0$ se hace cero.

Un nuevo programa que usa el concepto de carga proporcional es

DT,,0.1	$\Delta t = 0.1$
PROP,,1	$\mathbf{F} = P(t)\mathbf{F}$
TANG	calcula la matrix de coeficientes (constante)
LOOP,,10	bucle de incrementación
TIME	$t = t + \Delta t$
FORM	calcular $\mathbf{F}(t) - \mathbf{P}(\mathrm{a})$
SOLV	calcular $\Delta\mathbf{a}$, hacer $\mathbf{a} = \mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}$
DISP,,1,12	imprimir a para los nodos 1 a 12
STRE,ALL	imprimir las tensiones en todos los elementos
NEXT	fin del bucle
END	

15.4.3 *Integración de las ecuaciones del movimiento.* La integración de las ecuaciones diferenciales del movimiento para sistemas estructurales puede hacerse utilizando PCFEAP. Este tema se tratará con mucho más detalle en el próximo volumen, donde se desarrollarán y analizarán métodos generales basados en los elementos finitos y otros métodos tradicionales. La versión actual del programa incluye la versión más sencilla de los métodos beta-m.[16] El método coincide con el clásico de Newmark.[17]

Las ecuaciones del movimiento para un ecuación diferencial lineal son:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

donde $\mathbf{M}$ es la matriz de masa. Los elementos incluidos en PCFEAP formulan $\mathbf{M}$ como una matriz diagonal (aglutinada; ver Apéndice 7). Se pueden incluir masas consistentes (no diagonales), pero entonces deben combinarse con el cálculo de la matriz de coeficientes del elemento, o debe modificarse el programa para que incluya esta opción.[1] Puesto que el tratamiento general y la solución de las ecuaciones de movimiento quedan fuera de los objetivos de este volumen, se incluyen los macro comandos que llevan a cabo la solución para indicar que el programa puede usarse para un rango más amplio de problemas que los definidos originalmente. El orden apropiado es

BETA	Definir los parámetros de integración
PROP,,1	usar carga proporcional en el tiempo
MASS	formar la matriz de masa aglutinada
DT,,0.024	definir el paso de tiempo como 0.024
TANG	calcular la matriz tangente $(\mathbf{K} + C1\mathbf{M})$
LOOP,time,50	llevar a cabo 50 pasos de tiempo de la solución
FORM	calcular el residuo $(\mathbf{F} - \mathbf{P}(\mathbf{a}) - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}})$
SOLV	obtener una nueva solución
DISP,,2,24,2	imprimir desplazamientos nodales 2,4,6, $\cdots$, 24
STRE,NODE,2,4	imprimir las tensiones en los nodos 2,3 y 4
NEXT,time	final del bucle sobre el tiempo
STRE,ALL	imprimir el estado final de tensiones en todos los elementos
END	

En el anterior macro programa la notación "time" en las instrucciones LOOP/NEXT no es usada por el programa (ver Tabla 15.15), pero ayuda a que el algoritmo de solución sea más comprensible.

15.4.4. *Soluciones no lineales; método de Newton.* El lenguaje de macro programación también puede usarse para resolver problemas no lineales. Por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{P}(\mathbf{a}) = \mathbf{F}$$

puede resolvese iterativamente mediante el método de Newton haciendo

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{a} = \mathbf{F} - \mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{R}(\mathbf{a})$$

donde $\mathbf{K}_T$ es una cierta matriz de iteración (normalmente calculada por linearización de $\mathbf{P}$), y se realizan un número de iteraciones especificado, o hasta que se alcanza una tolerancia de error aceptable. En PCFEAP se usa una tolerancia en "energía" para terminar las iteraciones si se alcanza convergencia. La "energía" se calcula de la forma

$$E = \mathbf{R}^T \cdot \Delta \mathbf{a}$$

para las ecuaciones desconocidas solamente. Existen varias posibilidades de efectuar las iteraciones. Una es:

LOOP,iteration,10	hacer 10 iteraciones como máximo
TANG,,1	calcular la matriz $\mathbf{K}_T$, el residuo y resolver las ecuaciones
NEXT,iteation	fin del bucle de iteración

Una estrategia alternativa de iteración es:

TANG	calcular la matriz $\mathbf{K}_T$
LOOP,iteration,10	hacer 10 iteraciones con $\mathbf{K}_T$ fija
FORM	formar un nuevo residuo $\mathbf{R}$
SOLV	resolver las ecuaciones
NEXT,iteration	fin del bucle de iteración

El lector puede observar que se pueden combinar las estrategias; hacer unas cuantas iteraciones con la matriz de coeficientes fija a un cierto valor, cambiar la matriz de coeficientes y las iteraciones.

15.4.5. *Programación de las macro instrucciones.* El módulo de macro-instrucciones del programa PCFEAP está contenido en las subrutinas PMACR, PMACIO, PMACR1 y PMACR2. La rutina PMACR llama a las otras rutinas; PMACIO lee las entradas y controla los bucles; PMACR1 lleva a cabo todas las operaciones concernientes a cálculos elementales, y PMACR2 realiza todas las restantes macro operaciones. Los macro comandos disponibles se almacenan en el vector de caracteres WD. Por tanto, para añadir una macro instrucción al programa se debe redimensionar el vector WD, modificar la lista de palabras almacenadas como datos en WD, y hacer los cambios apropiados en PMACR1 y PMACR2. Los parámetros NW1 y NW2 en PMACR definen el número de comandos contenidos en PMACR1 y PMARC2, respectivamente. El parámetro adecuado debe cambiarse cuando se añade un comando. Si se necesitan nuevos vectores de solución se pueden definir nuevos apuntadores en los vectores contenidos en el "common" usando el subprograma PSETM (nótese en el subprograma PSETM como se

determina la precisión de cada variable). El parámetro lógico en la llamada a PSETM puede usarse para asegurar que la memoria se reserva sólo en la primera llamada a PSETM. Antes de añadir un nuevo macro comando se recomienda al programador que estudie cuidadosamente el programa listado en este capítulo. En particular, las indicaciones de opciones de solución almacenados en el common FDATA se usan para indicar al programa que vectores existen realmente y no deben ser cambiados por ningún nuevo macro comando, ya que esto afectaría a la forma de operar del programa.

15.5 Cálculo de los módulos de solución de elementos finitos

Cuando se establecen las macroinstrucciones para los cálculos de los elementos (ej., TANG o FORM), muchas de las operaciones son las mismas. En esta sección se discuten los aspectos que intervienen en el cálculo de las matrices de los elementos para un análisis por elementos finitos. El primer paso es localizar todos los datos geométricos, de material y de desplazamientos para el cálculo de la matriz de cada elemento. En particular, las cantidades de cada elemento a calcular incluyen la rigidez, masa, fuerzas interiores, tensiones, deformaciones, etc. En la Sección 15.5.2 se discuten los aspectos para el cálculo de éstas para los casos de elasticidad lineal y transmisión del calor. La organización de las rutinas del elemento en el programa se da en la Sección 15.5.3.

15.5.1 *Localización de los datos del elemento.* Cuando se quiera calcular alguna matriz de un elemento, por ejemplo, la de rigidez, **S**, o el vector de cargas o de fuerzas interiores, **P**, sólo se necesitarán las cantidades asociadas al elemento en cuestión y todos los demás valores serán superfluos. Las cantidades nodales y las de los materiales que sean necesarias pueden determinarse a partir de los números de los nodos y de los materiales almacenados en la matriz IX de cada elemento. En el programa, los valores necesarios se transfieren desde las matrices globales a un sistema de matrices locales antes de llamar a la rutina de elemento adecuada, o sea, a la subrutina ELMTnn. Este proceso se denomina llamará *localización*. Las cantidades que se localizan son:

a) las coordenadas nodales que son almacenadas en la matriz XL,
b) los desplazamientos nodales y sus incrementos que son almacenados en la matriz UL,
c) las temperaturas nodales que son almacenadas en la matriz TL, y
d) los números de las ecuaciones que se almacenan en el vector de destino LD.

El vector LD, descrito en el paso (*d)*, se usa para efectuar el ensamblaje de la matriz de rigidez (o de masa) del elemento y del vector de cargas o de fuerzas interiores del elemento, en la matriz de rigidez (o de masa) global

y el vector de cargas global respectivamente. De acuerdo con esto, para las siguientes matrices del elemento

$$\begin{bmatrix} \mathrm{LD(1)} & \mathrm{LD(2)} & \mathrm{LD(3)} & \ldots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{S(1,1)} & \mathrm{S(1,2)} & \mathrm{S(1,3)} & \\ \mathrm{S(2,1)} & \mathrm{S(2,2)} & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(1) \\ P(2) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

el término S(i,j) se ensamblaría en la matriz de rigidez (o de masa) global en la posición correspondiente a la fila LD(i) y a la columna LD(j), es decir el vector LD contiene los números de las ecuaciones de las matrices globales. Similarmente, P(i) se ensamblaría en la posición correspondiente al valor de LD(i). Al establecer LD(i) se reordenan los grados de libertad de acuerdo con la Tabla 15.8.

El proceso de localización es el mismo para todos los tipos de elementos finitos y está por tanto centralizado en la subrutina PFORM, que organiza todos los cálculos asociados a los elementos, incluidos los bucles sobre los distintos tipos de elementos descritos por la matriz IX. Las propiedades del elemento se almacenan en la matriz cuadrada S y en la matriz columna P. El vector LD es un vector de destino de elemento para los números de las ecuaciones globales y se usa para transformar S y P en las matrices globales.

Durante la localización, el número de nodos realmente conectados a cada elemento (es decir, NEL que puede ser menor que NEN) está determinado por el mayor valor no nulo de la matriz IX correspondiente al elemento con ese número. Los valores intermedios nulos se interpretan como que el nodo no está conectado. De esta manera el programa permite conectar elementos con un número de nodos diferente, ej., triángulos de tres nodos pueden combinarse con cuadriláteros de cuatro nodos.

Puesto que el valor actual de los desplazamientos nodales está localizado durante todos los cálculos del elemento, el programa puede usarse para resolver problemas no lineales. Ésta es, de hecho, la única información adicional necesaria, en comparación con los problemas lineales, para construir las matrices de rigidez tangentes, etc., para resolver problemas no lineales como se discute en los capítulos 18 y 19 de la referencia 1 y se considerará en detalle en el próximo volumen.

Antes de proceder a calcular las matrices de un elemento hay que advertir que la localización (excepto para el valor actual de los desplazamientos) podría hacerse de una vez por todas, pudiéndose prescindir después de las matrices globales de datos, o guardarlas en disco. Esto implicaría más pasos de programación y también un empleo eficiente del almacenamiento y lectura de la memoria periférica para mantener espacio adecuado en el núcleo para la determinación posterior de los vectores globales.

15.5.2 *Cálculo de las matrices de los elementos.* El cálculo eficiente de las matrices de los elementos (en tiempo de programación y de cálculo) es un aspecto crucial de cualquier análisis por elementos finitos. El desarrollo de rutinas para evaluar la rigidez del elemento (o la rigidez tangente) y las matrices de carga puede llevarse a cabo mediante una combinación de los métodos numéricos apropiados. Con objeto de explicar el desarrollo, se ofrece aquí, en primer lugar, el planteamiento de los pasos esenciales, mostrándose después algunos detalles para el caso de tensión y deformación plana.

Los pasos esenciales para calcular la matriz de rigidez de un elemento, S, se resumen en la Figura 15.8. Los ingredientes clave son la integración numérica, el uso de rutinas para las funciones de forma (que son idénticas para todos los problemas que requieran el mismo orden de continuidad) y una formulación eficiente de los productos matriciales.

Generalmente se utilizan las fórmulas de la cuadratura de Gauss para calcular las integrales, puesto que son las que ofrecen mayor precisión en relación al esfuerzo empleado (véase el Capítulo 8). En algunos casos es preferible usar otras fórmulas. Por ejemplo, si se emplea una fórmula de cuadratura cuyos puntos de integración son sólo los nodos, el cálculo de los términos de masa lleva entonces a una matriz de masa diagonal, que en problemas de dinámica generalmente es más ventajosa. Esta idea puede usarse también para calcular tensiones "nodales" (véase el Capítulo 12 y el Apéndice 7).

Los subprogramas de funciones de forma permiten al programador desarrollar elementos para muchos problemas de manera rápida y segura. El subprograma de funciones de forma no sólo evalúa la función de forma, sino también sus derivadas respecto del sistema de coordenadas global. Consideremos, como ejemplo, el problema bidimensional de clase C_0, donde solamente se necesitan las primeras derivadas de cada función de forma N_i. Para el cuadrilátero isoparamétrico de 4 nodos se tiene

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) \tag{15.3}$$

donde ξ_i, η_i son las coordenadas ξ, η de los nodos.

Según el concepto de elemento isoparamétrico se tiene

$$\begin{aligned} x &= N_i x_i \\ y &= N_i y_i \end{aligned} \tag{15.4}$$

cuyas derivadas vienen dadas por

$$\begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} \tag{15.5}$$

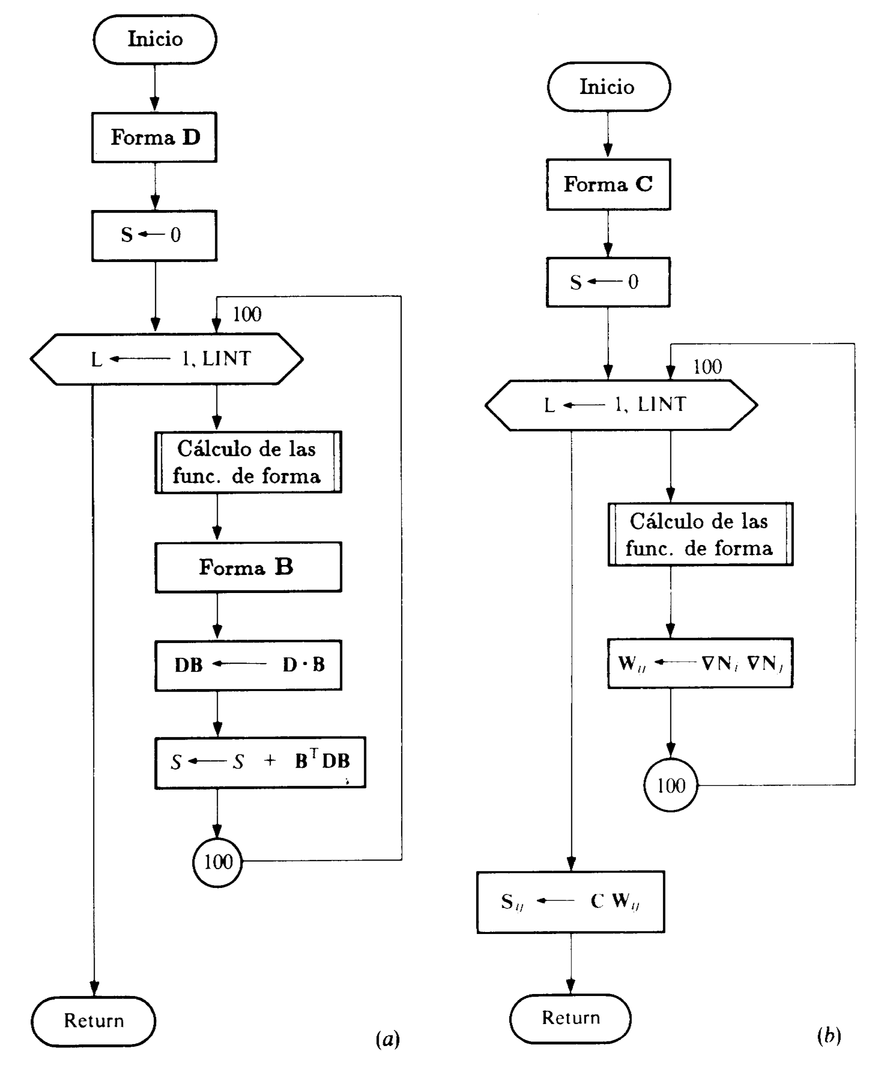


Figura 15.8 Método para calcular la matriz de rigidez del elemento. (*a*) Usando la rutina de funciones de forma del elemento e integración numérica. (*b*) Para elementos con propiedades del material constantes.

$$\begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} \tag{15.6}$$

donde J es el determinante del jacobiano y $(\;)_{,x}$ representa la derivada parcial

$\partial(\ )/\partial x$, etc. Las relaciones anteriores definen los pasos que debe efectuar el subprograma de funciones de forma que se muestra en la Figura 15.9, donde se supone que las coordenadas locales se han almacenado en la matriz de coordenadas locales XL.

Esta rutina de funciones de forma puede utilizarse para todos los problemas bidimensionales de clase C_0 que emplean el elemento de 4 nodos (ej., problemas de elasticidad bidimensional y de revolución, conducción del calor, flujo en un medio poroso, dinámica de fluidos, etc.). El subprograma de funciones de forma puede también utilizarse para la generación de los datos relativos a la malla[7]. La rutina de funciones de forma se extiende fácilmente a elementos de mayor orden. Como ejemplo, las rutinas SHAPE y SHAP2 (véase la Sección 15.8.3) dan funciones de forma que comprenden triángulos de tres nodos hasta cuadriláteros serendípitos y lagrangianos de 8 y 9 nodos respectivamente. Los elementos pueden tener algunos lados lineales y otros de segundo grado, omitiendo simplemente el número del nodo lateral en el caso de que se desee un lado lineal. Además, se pueden construir interpolaciones jerárquicas, evitando simplemente las correcciones al final del subprograma SHAP2.

La generación del triple producto matricial merece también especial atención puesto que en las matrices **B** y **D** hay a menudo muchos ceros. Se pueden usar varios métodos para reducir el número de operaciones. El primero es formar la matriz triple producto directamente. A pesar de que esto parece, a simple vista, necesitar demasiados cálculos manuales, es de hecho elemental si se lleva a cabo nodo por nodo. Por ejemplo, consideremos el problema de elasticidad bidimensional lineal, donde

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \tag{15.7}$$

y por razones de isotropía

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \tag{15.8}$$

donde D_{33} es igual a $(D_{11} - D_{12})/2$. Así pues, para un par de nodos típicos i y j, el término de rigidez del elemento $\mathbf{k}_{ij}$ viene dado por

$$\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{B}_i^T \mathbf{Q}_j \tag{15.9}$$

donde

$$\mathbf{Q}_j = \mathbf{D}\mathbf{B}_j \tag{15.10}$$


```
      SUBROUTINE SHAPEF(SS,TT,XL,XSJ,SHP)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C....Shape function routine for 4-node isoparametric quadrilateral
C
C              SS,TT      = Natural coordinates for shape functions
C              SHP(1,I)   = X-derivative of I-node shape function
C              SHP(2,I)   = Y-derivative of I-node shape function
C              SHP(3,I)   = Shape function for I-node
C              XS         = Jacobian array
C              XSJ        = Jacobian determinant
C              XL(1,I)    = X-coordinate of I-node
C              XL(2,I)    = Y-coordinate of I-node
C
      REAL   XL(2,4),SI(4),TI(4)
      REAL*8 SHP(3,4),XS(2,2)
      DATA SI/-.5,.5,.5,-.5/, TI/-.5,-.5,.5,.5/
C
C....Compute shape functions and their natural coord.derivatives
C
      DO 100 I = 1,4
        SHP(1,I) = SI(I)*(0.5+TI(I)*TT)
        SHP(2,I) = TI(I)*(0.5+SI(I)*SS)
        SHP(3,I) = (0.5+SI(I)*SS)*(0.5+TI(I)*TT)
100   CONTINUE
C
C....   Compute jacobian transformation from X,Y to SS,TT
C
      DO 120 I = 1,2
      DO 120 J = 1,2
        XS(I,J) = 0.0
        DO 110 K = 1,4
          XS(I,J) = XS(I,J) + XL(I,K)*SHP(J,K)
110     CONTINUE
120   CONTINUE
C
C....   Compute jacobian determinant
C
      XSJ = XS(1,1)*XS(2,2) - XS(1,2)*XS(2,1)
C
C....   Transform to X,Y derivatives
C
      DO 130 I = 1,4
        TEMP     = ( XS(2,2)*SHP(1,I) - XS(2,1)*SHP(2,I)/XSJ
        SHP(2,I) = (-XS(1,2)*SHP(1,I) + XS(1,1)*SHP(2,I)/XSJ
        SHP(1,I) = TEMP
130   CONTINUE
      RETURN
      END
```

Figura 15.9 Subprograma de funciones de forma para un elemento de 4 nodos.

Por tanto,

$$\mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} D_{11}N_{j,x} & D_{12}N_{j,y} \\ D_{12}N_{j,x} & D_{11}N_{j,y} \\ D_{33}N_{j,y} & D_{33}N_{j,x} \end{bmatrix}$$

y (15.11)

$$\mathbf{k}_{ij} = \begin{bmatrix} (N_{i,x}Q_{11} + N_{i,y}Q_{31}) & (N_{i,x}Q_{12} + N_{i,y}Q_{32}) \\ (N_{i,y}Q_{21} + N_{i,x}Q_{31}) & (N_{i,y}Q_{22} + N_{i,x}Q_{32}) \end{bmatrix}$$

Así pues, para cada par de nodos hay que efectuar 14 multiplicaciones para formar $\mathbf{k}_{ij}$, mientras que si calculásemos directamente $\mathbf{B}^T\mathbf{DB}$ necesitaríamos 30 multiplicaciones. También, cuando la matriz del elemento es simétrica sólo hay que formar la mitad durante la integración numérica (la otra mitad se obtiene por simetría). En la Figura 15.10 se muestra una rutina típica para el cálculo de la matriz de rigidez, donde se supone que los puntos de la cuadratura de Gauss y sus coeficientes se almacenan en las matrices SG, TG y WG.

El procedimiento puede también extenderse a problemas anisótropos sustituyendo la matriz isótropa $\mathbf{D}$ por la anisótropa correspondiente y luego recalculando la matriz $\mathbf{Q}_j$.

El cálculo de las matrices de rigidez de los elementos para problemas en los que las propiedades del material son constantes dentro de cada elemento, puede efectuarse de manera más eficiente advirtiendo (Capítulo 6) que la energía interna puede ahora escribirse, usando subíndices, como

$$\frac{1}{2}\bar{u}_a^i D_{abcd} \int_{V^e} N_{,b}^i N_{,d}^j \, dV \bar{u}_c^j \tag{15.12}$$

donde a, b, d, c son subídices de las ecuaciones elásticas y varían sobre la dimensión espacial del problema, e i, j son los índices nodales que en un elemento varían de 1 a NEL. Así pues, la matriz de rigidez del elemento para el par de nodos i, j, viene dada por

$$K_{ac}^{ij} = W_{bd}^{ij} D_{abcd} \tag{15.13}$$

donde

$$W_{bd}^{ij} = \int_{V^e} N_{,b}^i N_{,d}^j \, dV \tag{15.14}$$

Para materiales isótropos las constantes elásticas se expresan por

$$D_{abcd} = \delta_{ab}\delta_{cd}\lambda + \mu(\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) \tag{15.15}$$


```
C....Isoparametric element stiffness computation for linear
C     elasticity * * plane stress/strain differ only in values
C     of elastic parameters * *
C
C         D(1), D(2), D(3) = Material moduli
C            plane stress:  D(1) = E/(1.  -NU*NU)
C                            D(2) = NU*D(1)
C            plane strain:  D(1) = D*(1.-NU)/((1.+NU)*(1.-2*NU))
C                            D(2) = NU*D(1)/(1.-NU)
C                           D(3) = (D(1) - D(2))/2.
C         DV    = Area differential volume * gauss weight
C         LINT  = Number of quadrature points
C         NDF   = Number of degrees-of-freedom at a node
C         NEL   = Number of nodes on element
C         NST   = Size of S-array
C         S     = Element stiffness array
C         SG,TG = Natural  coordinates of Gaus$   points.
C         SHP   = Shape functions and their x,y derivatives
C         XL    = Nodal coordinates - localized
C         XSJ   = Jacobian determinant
C         WG    = Gauss quadrature weights
C
C....Compute contribution at each quadrature point.
       DO 120 L = 1,LINT
         CALL SHAPEF(SG(L),GT(L),WL,XSJ,SHP)
         DV = XSJ*WG(L)
         D11 = D(1)*DV
         D12 = D(2)*DV
         D33 = D(3)*DV
C....For each J-node compute:  DB = D*B
         J1  = 1
         DO 110 J = 1,NEL
           DB11 = D11*SHP(1,J)
           DB12 = D12*SHP(2,J)
           DB21 = D12*SHP(1,J)
           DB22 = D11*SHP(2,J)
           DB31 = D33*SHP(2,J)
           DB32 = D33*SHP(1,J)
C....For each I-node compute S = Bt*DB
           I1   = 1
           DO 100 I = 1,J
             S(I1  ,J1  )=S(I1  ,J1  )+SHP(1,I)*DB11+SHP(2,I)*DB31
             S(I1  ,J1+1)=S(I1  ,J1+1)+SHP(1,I)*DB12+SHP(2,I)*DB32
             S(I1+1,J1  )=S(I1+1,J1  )+SHP(1,I)*DB31+SHP(2,I)*DB21
             S(I1+1,J1+1)=S(I1+1,J1+1)+SHP(1,I)*DB32+SHP(2,I)*DB22
             I1 = I1 + NDF
100        CONTINUE
           J1 = J1 + NDF
110      CONTINUE
120    CONTINUE
C....Compute lower part by symmetry
       DO 130 I = 2,NST
       DO 130 J = 1,I
         S(I,J) = S(J,I)
130    CONTINUE
       RETURN
       END
```

Figura 15.10. Cálculo de la rigidez de un elemento de elasticidad plana.

donde λ y μ son los parámetros de Lamé que están relacionados con las constantes elásticas usuales E y ν por $\lambda = \nu E/(1+\nu)(1-2\nu)$, $\mu = E/2(1+\nu)$. Por consiguiente, la matriz de rigidez se calcula a partir de

$$K_{ac}^{ij} = \lambda W_{ac}^{ij} + \mu(W_{cd}^{ij} + \delta_{ac} W_{bb}^{ij}) \tag{15.16}$$

En la Figura 15.8(*b*) se dan los pasos para calcular la matriz de rigidez de los elementos en los casos de elasticidad plana usando este procedimiento. Esta manera de calcular matrices de rigidez se propuso en la referencia 18 y proporciona una reducción de aproximadamente un 25 por ciento en comparación con el procedimiento de la Figura 15.8(*a*). En tres dimensiones el ahorro es todavía mayor.

El cálculo de otras matrices de elemento puede también efectuarse usando una rutina de funciones de forma. Por ejemplo, se puede calcular la matriz de masa de elemento para problemas en régimen transitorio o de valores propios. La matriz de masa para el problema bidimensional se obtiene mediante

$$\mathbf{M}_{jj}^{e} = \mathbf{I} \int_{V^e} \rho N_j \, dV \tag{15.17}$$

donde $\mathbf{I}$ es una matriz unidad 2×2 y ρ es la densidad (ver Apéndice 7). En la Figura 15.11 se muestran las sentencias para calcular la matriz de masa de un problema plano, donde la matriz de masa concentradas (diagonal) del elemento se almacena en el vector P.

```
C....Isoparametric element mass matrix for plane problems
C
C              P  = Diagonal (lumped) mass array (in vector)
C
C....Compute matrix at each integration point
      DO 500 L = 1,LINT
C....Compute shape functions
        CALL SHAPEF(SG(L),TG(L),XL,XSJ,SHP)
C....For each node I compute contribution
        DMASS = D(4)*XSJ*WG(L)
        DO 510 I = 1,NEL
          P(2*I-1) = P(2*I-1) + DMASS*SHP(3,I)
          P(2*I  ) = P(2*I-1)
510     CONTINUE
500   CONTINUE
      RETURN
      END
```

Figura 15.11 Matriz de masa consistente para el cuadrilátero de 4 nodos.

La rutina de funciones de forma puede también utilizarse para calcular las deformaciones, tensiones y fuerzas interiores del elemento. Para el problema bidimensional plano las deformaciones se calculan por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_i \mathbf{a}_i \tag{15.18}$$

y las tensiones por

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Q}_i \mathbf{a}_i \tag{15.19}$$

La matriz $\mathbf{B}_i$ se ha dado antes para el problema bidimensional y sólo depende de las derivadas de las funciones de forma. Previamente se ha calculado en los puntos de Gauss cuando se evaluó la matriz de masa del elemento. Si se quiere conocer también el valor de las tensiones en los puntos de Gauss, la matriz $\mathbf{B}$ podría almacenarse en una cinta, o disco, y leerse cuando se desee calcular las deformaciones o las tensiones. (De hecho $\mathbf{Q}$ se podría haber almacenado también). El programa PCFEAP permite almacenar $\mathbf{Q}$ para cada elemento. Este procedimiento fue adoptado en el programa que se da en la referencia 19. Frecuentemente, sin embargo, los puntos donde hay que determinar las tensiones y deformaciones no coinciden con los puntos de Gauss. En estos casos hay que volver a calcular la matriz $\mathbf{B}$. En problemas no lineales el cálculo de deformaciones y tensiones debe efectuarse directamente; por consiguiente, parece conveniente que un programa sea capaz de calcular las deformaciones y tensiones cuando sea preciso. Adicionalmente, en la macroinstrucción FORM se calculan las fuerzas interiores que vienen expresadas por

$$\mathbf{P}_i = -\int_V \mathbf{B}_i^T \boldsymbol{\sigma} \, dV \tag{15.20}$$

utilizando los desplazamientos calculados. Los pasos del programa para el cálculo de deformaciones, tensiones y fuerzas interiores del problema bidimensional se dan en la Figura 15.12. Las coordenadas locales ξ, η, donde se evalúan las tensiones y deformaciones se denominan SG, TG. El usuario puede definirlas como datos o prefijarlas para que los resultados se evalúen en un punto particular; por otra parte pueden especificarse como puntos de Gauss.

Si las tensiones se calculan en los puntos de Gauss, éstas pueden extrapolarse a los nodos y alisarse tal como se sugirió en el Capítulo 12. Para ello pueden usarse también subprogramas para las funciones de forma.

La generalidad de una función de forma isoparamétrica C_0, puede aprovecharse para programar rutinas de elemento para otros problemas. Por ejemplo, en la Figura 15.13 se dan las instrucciones necesarias para calcular la matriz de "rigidez" para los problemas de la ecuación de Laplace discutidos en el Capítulo 12.

15.5.3 *Organización de las rutinas de elemento.* La discusión previa se ha concentrado en los procedimientos para determinar las matrices de elementos. Advertirá el lector que todas las matrices cuadradas de elementos se han

```
C....Isoparametric Element Stress, Strain, and Internal Forces
C
C              P  =  Internal force vector
C              UL =  Nodal displacement vector
C
C....Compute element stresses, strains and forces
C
      DO 440 L = 1,LINT
C....Compute element shape functions
        CALL SHAPEF(SG(L),TG(L),XL,XSJ,SHP)
C....Compute strains and coordinates
        DO 410 I = 1,3
          EPS(I) = 0.0
410     CONTINUE
        XX = 0.0
        YY = 0.0
        DO 420 I = 1,NEL
          XX     = XX + XL(1,I)*SHP(3,I)
          YY     = YY + XL(2,I)*SHP(3,I)
          EPS(1) = EPS(1) + UL(1,I)*SHP(1,I)
          EPS(2) = EPS(2) + UL(2,I)*SHP(2,I)
          EPS(3) = EPS(3) + UL(1,I)*SHP(2,I) + UL(2,I)*SHP(1,I)
420     CONTINUE
C....Compute stresses
        SIG(1) = D(1)*EPS(1) + D(2)*EPS(2)
        SIG(2) = D(2)*EPS(1) + D(1)*EPS(2)
        SIG(3) = D(3)*EPS(3)
C....Output stresses and strains to unit ISW
        IF(MCT.GT.0) THEN
          CALL PRTHED(IOW)
          WRITE(IOW,2000)
          MCT = 25
        ENDIF
        WRITE(IOW,2001) N,MA,XX,YY,SIG,EPS
C....Compute the internal force vector (stress divergence term)
        DO 430 I = 1,NEL
          P(2*I-1) = P(2*I-1) - (SHP(1,I)*SIG(1)+SHP(2,I)*SIG(3))*DV
          P(2*I  ) = P(2*I  ) - (SHP(2,I)*SIG(2)+SHP(1,I)*SIG(3))*DV
430     CONTINUE
440   CONTINUE
      RETURN
2000  FORMAT(//'     E L E M E N T   S T R E S S / S T R A I N'//
     1 ' Elmt  Matl    X-coord     Y-coord',5X,'11-Stress',5X,
     2 '22-Stress',5X,'12-Stress'/39X,'11-Strain',5X,'22-Strain',
     3 '12-Strain')
2001  FORMAT(2I6,2F11.4,3E14.5/34X,3E14.5)
      END
```

Figura 15.12 Cálculo de funciones, deformaciones y fuerzas internas.


```
C....Isoparametric element computation for Laplace operator
C
C              D(1)   =  K (isotropic material parameter)
C              DV     =  Area weighting
C              LINT   =  Number of integration points
C              NEL    =  Number of nodes connected to element
C              S      =  Element coefficient matrix
C              SG,TG  =  Integration points in natural coords.
C              SHP    =  Shape function array
C              XL     =  Nodal coordinate array (localized)
C              XSJ    =  Jacobian determinant
C              WG     =  Integration weights
C
C....Compute contribution at each integration point
C
      DO 120 L = 1,LINT
        CALL SHAPEF(SG(L),TG(L),XL,XSJ,SHP)
        DV  = XSJ*WG(L)
        D1  = D(1)*DV
C
C....For each J-node compute:  DB = D*B
C
        DO 110 J = 1,NEL
          DB11 = D1*SHP(1,J)
          DB12 = D1*SHP(2,J)
C
C....For each I-node compute:  S = Bt*DB
C
          DO 100 I = 1,J
            S(I,J) = S(I,J) + SHP(1,I)*DB11 + SHP(2,I)*DB12
100       CONTINUE
110     CONTINUE
120   CONTINUE
C
C....Compute symmetric part of S
C
      DO 130 I = 2,NEL
      DO 130 J = 1,I
        S(I,J) = S(J,I)
130   CONTINUE
C
      RETURN
      END
```

Figura 15.13 Matriz de rigidez para el operador de Laplace.

almacenado en la matriz **S**, mientras que los vectores de elementos se almacenan en el vector **P**. Esto se ha hecho intencionadamente, ya que todos los aspectos del cálculo de las matrices de los elementos para el programa se van a agrupar en un único subprograma llamado "rutina del elemento". El subprograma ELMLIB llama a una rutina de elemento, que es la rutina de generación de la biblioteca de elementos. Tal como la hemos dado aquí, la biblioteca de elementos proporciona espacio para cuatro subprogramas de

```
      SUBROUTINE ELMTNN(D,UL,XL,IX,TL,S,P,NDF,NDM,NST,ISW)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C
C....MOCK ELEMENT ROUTINE
C
      INTEGER*2 IX(NEN,1)
      REAL  XL(NDM,1),TL(1),DM
      REAL*8 D(18),UL(NDF,1),S(NST,NST),P(NST)
C
      COMMON /ADATA/ AA(16000)
      COMMON /CDATA/ NUMNP,NUMEL,NUMMAT,NEN,NEQ
      COMMON /ELDATA/ DM,N,MA,MCT,IEL,NEL
      COMMON /HDATA/ NH1,NH2
      COMMON  H(1)
C....READ AND OUTPUT MATERIAL PROPERTY DATA
      IF(ISW.EQ.1) THEN
c              The array D(18) is used to store up to 18 words of
c              information for each material set
     NH1 = number of words each element needs in data  base.
C....CHECK ELEMENT FOR ERRORS
      ELSEIF(ISW.EQ.2) THEN
C     Check element for any negative jacobians, etc.
C....COMPUTE ELEMENT COEFFICIENT MATRIX - AND RESIDUAL
      ELSEIF(ISW.EQ.3) THEN
c              The S(NST,NST) array is used to store matrix, and
c              the P(NST) array is used to store the element residual
         H(NH1) = first word in history data base for this element.h
C....OUTPUT ELEMENT QUANTITIES (E.G., STRESSES)
      ELSEIF(ISW.EQ.4) THEN
c              N is the current element number, MCT is a line counter
C....COMPUTE DIAGONAL ELEMENT MASS MATRIX
      ELSEIF(ISW.EQ.5) THEN
c              The P(NST) array is used to store the diagonal matrix
C....COMPUTE A RESIDUAL ONLY
      ELSEIF(ISW.EQ.6) THEN
c              Compute an element residual in P(NST)
C....COMPUTE ERROR ESTIMATES
      ELSEIF(ISW.EQ.7) THEN
c              Compute error quantities for each element accumulate
C....COMPUTE STRESS PROJECTIONS TO NODES
      ELSEIF(ISW.EQ.8) THEN
c              Compute the stress projections in array AA
      ENDIF
      RETURN
      END
```

Figura 15.14 Organización de la rutina de un elemento tipo.

elementos al mismo tiempo, donde los nombres de las rutinas del elemento son ELMT01, ELMT02, ELMT03 y ELMT04. Esto se puede ampliar fácilmente añadiendo más nombres de rutinas de elementos en ELMLIB. La subrutina ELMLIB se llama a su vez desde la subrutina PFORM que, como se ha dicho antes, es la subrutina que efectúa el lazo sobre todos los elementos, establece matrices locales para las coordenadas (XL), desplazamientos (UL) y destinos en las matrices globales (LD). La subrutina PFORM también ensambla los

vectores elementales en los vectores globales (cargas, residuos, reacciones y masa) y usa el subprograma MODIFY para llevar a cabo las modificaciones adecuadas para los desplazamientos prescritos no nulos. Cuando se llama una rutina de elemento, el valor del parámetro ISW se especifica entre 1 y 8. El parámetro indica qué tipo de operación se va a llevar a cabo en la rutina de elemento. Cada rutina de elemento debe proporcionar las transferencias correspondientes para cada valor de ISW. En la Figura 15.14 se muestran los pasos esquemáticos que realiza una rutina de elemento tipo.

15.6 Solución de ecuaciones algebraicas simultáneas lineales

Al resolver problemas por el método de los elementos finitos nos enfrentaremos finalmente con la resolución de un gran sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas lineales. Por ejemplo, en el análisis de problemas lineales en régimen permanente, el ensamblaje directo de las matrices de rigidez de los elementos conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales. En esta sección se consideran métodos para resolver las ecuaciones siguiendo un procedimiento directo, que permite calcular *a priori* el número de operaciones numéricas a realizar, o bien según un método iterativo o indirecto que no permite dicha estimación *a priori*.

15.6.1 *Método directo.* Consideremos en primer lugar el problema general de la solución directa del sistema de ecuaciones algebraicas dado por

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{r} \tag{15.21}$$

donde $\mathbf{K}$ es una matriz cuadrada de coeficientes, $\mathbf{a}$ es un vector de incógnitas y $\mathbf{r}$ es un vector de cantidades prefijadas. El lector puede asociar éstas a las cantidades descritas previamente, es decir: la matriz de rigidez, las incógnitas nodales y las fuerzas especificadas prescritas o las residuales.

En la discusión que sigue se supone que la matriz de coeficientes ya está preparada de forma que para resolver las ecuaciones nunca sea necesario intercambiar filas y/o columnas. Esto es cierto cuando $\mathbf{K}$ es simétrica, definida positiva (o negativa).† Podrá ser cierto o no cuando las ecuaciones sean asimétricas o indefinidas, condiciones que pueden presentarse cuando la formulación por elementos finitos se base en algunos métodos de residuos ponderados. En tales casos se necesitarán ciertas comprobaciones o análisis adicionales para asegurarse de que las ecuaciones pueden resolverse.[20,21,22]

Por el momento consideremos que la matriz de coeficientes puede escribirse como producto de una matriz triangular inferior con coeficientes unidad en la diagonal, y una matriz superior triangular, es decir

† En los métodos mixtos que llevan a la Ec. (12.43) la solución viene dada en función de una parte definida positiva para $\bar{\mathbf{q}}$ seguida de una parte definida negativa para $\bar{\boldsymbol{\phi}}$. Por tanto, se necesitan intercambios si el orden de las ecuaciones se define como se describió en la Sección 15.2.4.

$$\mathbf{K} = \mathbf{LU} \tag{15.22}$$

donde

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{15.23}$$

y

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ 0 & U_{22} & \dots & U_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & U_{nn} \end{bmatrix} \tag{15.24}$$

Este paso se llama descomposición triangular de **K**. La solución de las ecuaciones puede obtenerse ahora resolviendo la pareja de ecuaciones

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{r}$$

y

$$\mathbf{Ua} = \mathbf{y} \tag{15.25}$$

donde **y** se introduce para facilitar la separación; ver referencias 20 ó 21.

El lector puede observar fácilmente que la solución de estas ecuaciones es trivial. En función de los elementos de las ecuaciones la solución es

$$\begin{aligned} y_1 &= r_1 \\ y_i &= r_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} y_j \qquad i = 2,\ 3,\ \dots,\ n \end{aligned} \tag{15.26}$$

y

$$\begin{aligned} a_n &= y_n / U_{nn} \\ a_i &= \frac{y_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} U_{ij} a_j}{U_{ii}} \qquad i = n-1,\ n-2,\ \dots,\ 1 \end{aligned} \tag{15.27}$$

La expresión (15.26) constituye la llamada "eliminación hacia adelante" mientras que las (15.27) son las correspondientes a la "sustitución hacia atrás".

El problema se reduce a construir la descomposición triangular de la matriz de coeficientes. Este paso se lleva a cabo usando variantes de la eliminación gaussiana. En la práctica, las operaciones necesarias para

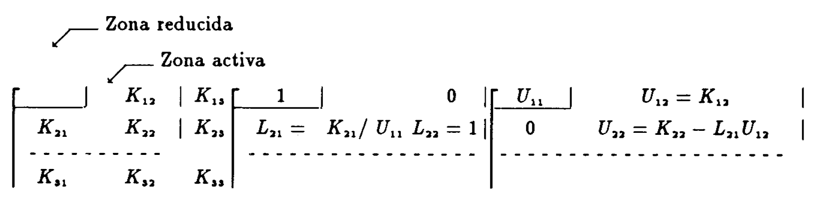
TABLA 15.18

DESCOMPOSICIÓN TRIANGULAR DE **K**

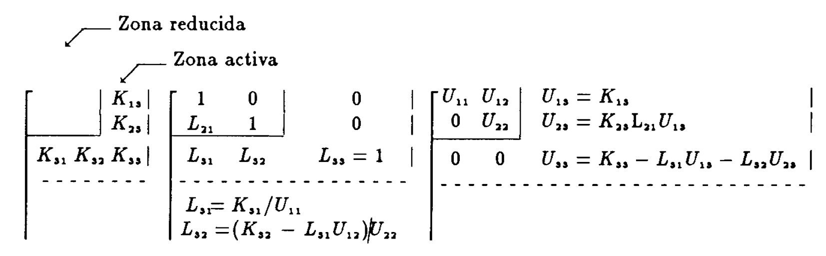
Zona activa

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} L_{11} = 1 & \\ & \\ & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} U_{11} = K_{11} & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

Paso 1. Zona activa: Primera fila y columna hasta la diagonal principal.



Paso 2. Zona activa: Segunda fila y columna hasta la diagonal principal. Se usa la primera fila de **K** para elimnar L_2, U_{11}. La zona activa usa sólo valores de **K** de la zona activa, y valores de **L** y **U** que ya se han se han calculado en los pasos 1 y 2.



Paso 3. Zona activa: Tercera fila y columna hasta la diagonal pricipal. Se usa la primera fila para eliminar $L_{31}U_{11}$; se usa la segunda fila de términos reducidos para eliminar $L_{32}U_{22}$ (coeficiente reducido K_{32}). Se reduce la tercera columna para reflejar las eliminaciones por debajo de la diagonal.

la descomposición triangular se llevan a cabo directamente en la matriz de coeficientes; no obstante, para mayor claridad, los pasos básicos se muestran en la Tabla 15.18 usando diferentes matrices por separado. La descomposición se efectúa de la misma manera que opera el subprograma DATR1; así, el lector podrá comprender fácilmente los detalles de esta rutina una vez que haya asimilado los pasos de la Tabla 15.18 Las referencias 4 y 23 dan detalles adicionales.

En DATR1 la variante de Crout de la eliminación gaussiana se usa sucesivamente para reducir la matriz de coeficientes original a una forma triangular superior. La porción triangular inferior no se hace cero pero se utiliza para construir **L**, como se muestra en la Tabla 15.18. Como hemos mencionado antes, las matrices triangulares superior e inferior sustituyen a

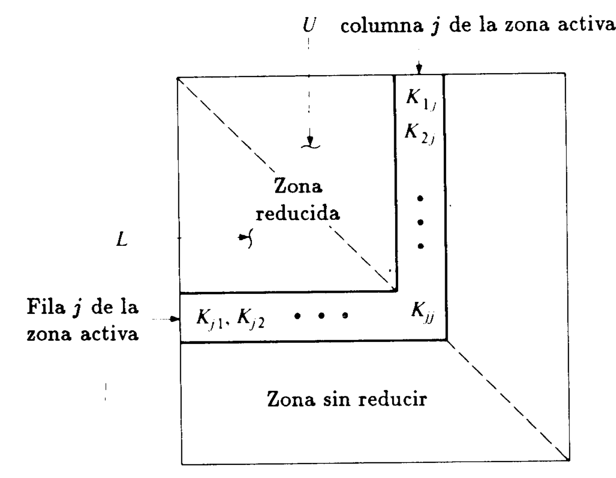


Figura 15.15

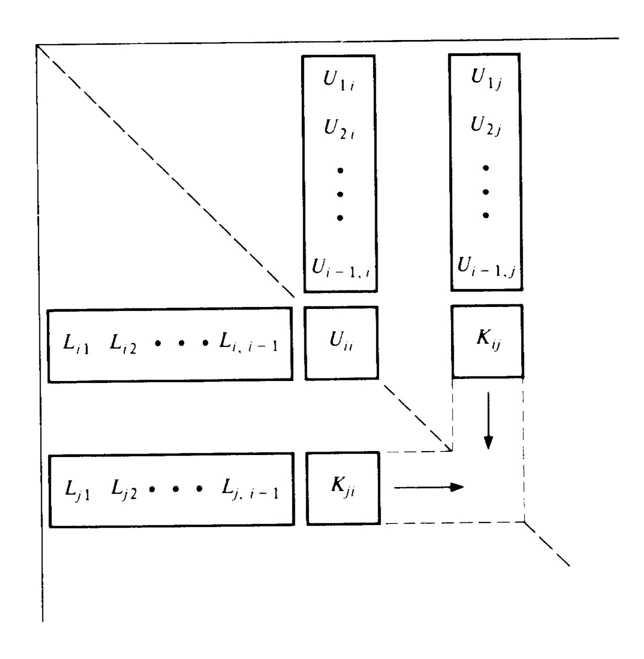


Figura 15.16

la matriz de coeficientes original; en consecuencia, no es posible retener los elementos de la diagonal principal de ambas **L** y **U**. Los de **L** son triviales puesto que por definición se sabe que valen todos la unidad.

Con base en la organización de la Tabla 15.18, es conveniente considerar la matriz de coeficientes dividida en tres partes: la primera es la región que se ha reducido totalmente, la segunda la región que se está reduciendo (llamada zona activa) y la tercera la región que contiene los coeficientes originales sin reducir. Estas regiones se muestran en la Figura 15.15, donde la columna j sobre la diagonal y la fila j por debajo de la diagonal constituyen la zona activa. El algoritmo para la descomposición de una matriz cuadrada $n \times n$ puede deducirse de la Tabla 15.18 y de la Figura 15.16 como sigue:

$$\begin{aligned} U_{11} &= K_{11} \\ L_{11} &= 1 \end{aligned} \tag{15.28a}$$

Para cada zona activa j desde 2 a n

$$\begin{aligned} L_{j1} &= K_{j1}/U_{11} \\ U_{1j} &= K_{1j} \end{aligned} \tag{15.28b}$$

Entonces

$$\begin{aligned} L_{ji} &= \left(K_{ji} - \sum_{m=1}^{i-1} L_{jm}U_{mi} \right) / U_{ii} \\ U_{ij} &= K_{ij} - \sum_{m=1}^{i-1} L_{im}U_{mj} \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \ldots, j-1 \tag{15.28c}$$

y finalmente

$$\begin{aligned} L_{jj} &= 1 \\ U_{jj} &= K_{jj} - \sum_{m-1}^{j-1} L_{jm}U_{mj} \end{aligned} \tag{15.28d}$$

La ordenación del proceso de reducción y los términos utilizados se muestran en la Figura 15.16. Los resultados de la Tabla 15.18 y de las ecuaciones (15.28) pueden ser comprobados por el lector mediante la matriz del ejemplo representado en la Tabla 15.19.

Una vez efectuada la descomposición triangular de una matriz, pueden calcularse las soluciones para los distintos **r** utilizando las expresiones (15.26) y (15.27). Este proceso se suele llamar resolución, ya que no es necesario volver a calcular **L** y **U**. Para matrices de coeficientes muy grandes el proceso de descomposición es muy caro mientras que la resolución es relativamente

TABLA 15.19

EJEMPLO: DESCOMPOSICIÓN TRIANGULAR DE UNA MATRIZ 3 × 3

K	L	U
$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

Paso 1. $L_{11} = 1, U_{11} = 4$

$\begin{array}{ccc} & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 1 & \\ 0.5 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{cc} 4 & 2 \\ & 3 \end{array}$

Paso 2. $L_{21} = \frac{2}{4} = 0.5, U_{11} = 2, L_{22} = 1, U_{12} = 4 - 0.5 \times 2 = 3$

$\begin{array}{ccc} & & 1 \\ & & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 1 & & \\ 0.5 & 1 & \\ 0.25 & 0.5 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 1 \\ & 3 & 1.5 \\ 1 & & 3 \end{array}$

Paso 3. $L_{31} = \frac{1}{4} = 0.25, U_{13} = 1, L_{32} = \frac{2-0.25\times 2}{3} = \frac{1.5}{3} = 0.5$

$U_{23} = 2 - 0.5 \times 1 = 1.5, L_{33} = 1, U_{33} = 4 - 0.25 \times 1 - 0.5 \times 1.5 = 3$

$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 0.5 & 1 & \\ 0.25 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ & 3 & 1.5 \\ & & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Paso 4. Comprobación

barata; en consecuencia, es necesario disponer de capacidad de resolución en todo sistema de solución por elementos finitos.

En la discusión anterior se ha considerado el caso general de solución de ecuaciones (sin intercambiar filas y/o columnas). Generalmente, las matrices de coeficientes que aparecen en todo problema de elementos finitos presentan ciertas propiedades particulares. Frecuentemente la matriz de rigidez es simétrica ($K_{ij} = K_{ji}$) y es fácil comprobar en este caso que

$$U_{ij} = L_{ji} U_{ii} \tag{15.29}$$

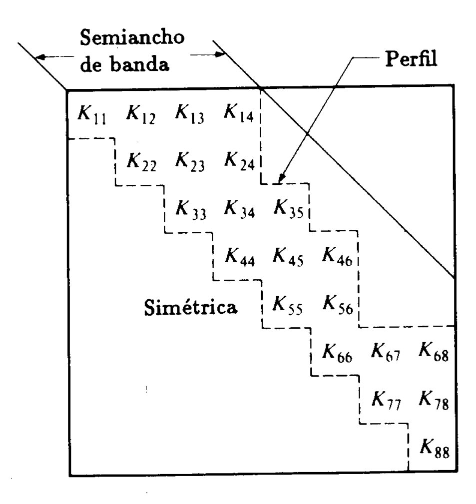
Para esta clase de problemas no es necesario almacenar la matriz de coeficientes completa. Basta con almacenar sólo aquellos coeficientes situados encima (o debajo) de la diagonal principal y utilizar la ecuación (15.29) para construir la parte que falta. Esto reduce a casi la mitad el espacio necesario para la matriz de coeficientes. Puede economizarse aún más en el almacenamiento si se almacenan solamente los términos incluidos dentro de una *banda* no nula. En las formulaciones de elementos finitos el máximo "ancho de banda" de los coeficientes no nulos puede generalmente reducirse en comparación con el número de incógnitas —con frecuencia en un 10-20 por ciento—, lo que reduce el almacenamiento desde $n(n+1)/2$ a $(0,1$ a $0,2)n^2$ para problemas simétricos. Un método típico de almacenamiento para ecuaciones en banda simétricas se muestra en la Figura 15.17. Meyer[24,25] ofrece una discusión acerca de los sistemas en banda junto con una extensa bibliografía.

Aún puede reducirse más el almacenamiento y el esfuerzo de cálculo necesarios, almacenando las partes necesarias de la parte triangular superior de la matriz de rigidez por columnas y la parte triangular inferior por filas, tal como se muestra en la Figura 15.18. Esto ya ha sido sugerido en las referencias 26 a 30 para matrices simétricas. Entonces es necesario almacenar y calcular solamente por el interior del *perfil* no nulo de las ecuaciones. Este método de almacenamiento tiene ventajas concretas sobre un almacenamiento en banda. Primeramente requiere siempre menos capacidad de almacenamiento; en segundo lugar, las necesidades de almacenamiento no resultan severamente afectadas por unas pocas columnas muy largas, como se muestra en la Figura 15.18, y por último, es fácil utilizar rutinas de productos escalares para efectuar la descomposición triangular y la reducción hacia adelante[20]. Este último punto es de suma importancia en los computadores modernos orientados hacia el cálculo vectorial.

Se ha incluido un subprograma de solución de ecuaciones en perfil para su uso en el paquete de solución por el método de los elementos finitos. Su nombre es DATRI y DASOL para ecuaciones simétricas y no simétricas. El perfil de ambos casos debe ser simétrico. Las columnas por encima de la diagonal principal, o las filas por debajo de ella, se almacenan en un único vector, que se muestra en la Figura 15.18. Para localizar los elementos de la diagonal se utiliza un vector de apuntadores. En la Tabla 15.20 se definen las variables usadas en los subprogramas de solución DASOL y DATRI.

El subprogarama DASBLY se usa para ensamblar la matriz de coeficientes y el vector de fuerzas/residuales. Se usa el vector LD para localizar las ecuaciones activas y la posición en cada columna o fila.

Se puede usar el método frontal de solución para aumentar el número de ecuaciones más alla de aquél que puede ser resuelto en memoria central usando el sistema de solución en perfil. El método frontal fue descrito por primera vez por Irons[2] y adoptado después para el programa descrito por Hinton y Owen.[3] En el método frontal las ecuaciones activas vienen determinadas por la secuencia en que se procesan los elementos. En un momento dado sólo un pequeño conjunto de ecuaciones están activas. Por ejemplo, la Figura 15.19 muestra una malla en la que se han procesado los elementos hasta el "E". Las ecuaciones activas en el momento en que se introduce el elemento E se indican en la figura. Una vez que se han introducido los coeficientes de E, los términos asociados al nodo" x" y sus



Semiancho de banda

K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}
K_{22}	K_{23}	K_{24}	
K_{33}	K_{34}	K_{35}	
K_{44}	K_{45}	K_{46}	
K_{55}	K_{56}		
K_{66}	K	K_{68}	
K_{77}	K_{78}		
K_{88}			

Almacenamiento en banda de la matriz

Figura 15.17

I	AD_I
1	K_{11}
2	K_{22}
3	K_{33}
4	K_{44}
5	K_{55}
6	K_{66}
7	K_{77}
8	K_{88}

Diagonales

I	AU_i	AL_i
1	K_{12}	K_{21}
2	K_{13}	K_{31}
3	K_{23}	K_{32}
4	K_{14}	K_{41}
5	K_{24}	K_{42}
6	K_{34}	K_{43}
7	K_{35}	K_{53}
8	K_{45}	K_{54}
9	K_{46}	K_{64}
10	K_{56}	K_{65}
11	K_{67}	K_{76}
12	K_{18}	K_{81}
	•	•
	•	•
	•	•
18	K_{78}	K_{87}

J	JD_I
1	0
2	1
3	3
4	6
5	8
6	10
7	11
8	18

Almacenamiento de la matriz

Perfil

K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}				K_{18}
	K_{22}	K_{23}	K_{24}				K_{28}
		K_{33}	K_{34}	K_{35}			K_{38}
			K_{44}	K_{45}	K_{46}		K_{48}
Simétrica				K_{55}	K_{56}		K_{58}
					K_{66}	K_{67}	K_{68}
						K_{77}	K_{78}
							K_{88}

TABLA 15.20

VARIABLES USADAS EN LOS SUBPROGRAMAS DATRI Y DASOL DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES

AD(I)	Diagonales de la matriz de coeficientes, reemplazados por los recíprocos de U al regresar de DATRI
AU(I)	Coeficientes sobre la diagonal, reemplazando por el factor AD.U al regresar de DATRI
AL(I)	Coeficientes bajo la diagonal, reemplazadas por el factor L al regresar de DATRI (AU=AL en el caso simétrico)
B(I)	Término independiente del sistema al llamar a DASOL,reemplazado por la solución de las ecuaciones a la salida.
JP(I)	Apuntador al último elemento de cada fila/columna de AL/UL, respectivamente
NEQ	Número de ecuaciones
ENERGY	Energía de las ecuaciones activas.
FLG	Indicador, si es verdadero se trata el sistema como no simétrico, y debe proporcionarse almacenamiento separado para AU y AL

vecinos inmediatos están completos (esto es, ningún otro elemento afectará a los términos en las ecuaciones asociadas a x). En consecuencia, las ecuaciones asociadas a x se pueden eliminar mediante un proceso gaussiano estándar.[2,3] La matriz de coeficientes frontal del momento se muestra también en las Figura 15.19, junto con la ecuación asociada a x. El paso de la solución gaussiana debe realizarse para la ecuación x y afecta a todos los demás términos en el frente activo de la matriz de coeficientes. Si existe simetría, ésta se conserva en el paso de solución. El paso de eliminación gaussiana para la ecuación x se puede escribir de la forma

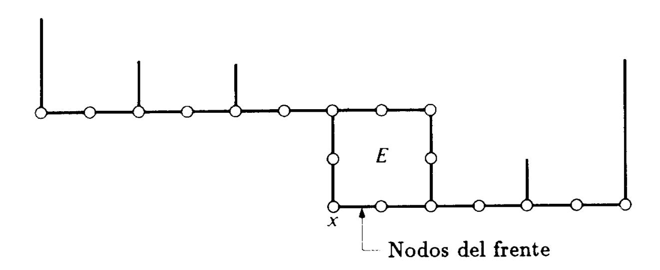
$$\mathbf{A}_{x+1} = \mathbf{D}_x \mathbf{L}_x \mathbf{A}_x \tag{15.30}$$

donde:

$$\mathbf{L}_x = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & -L_{1x} & & \\ & & 1 & -L_{2x} & & \\ & & & \ddots\ -L_{3x} & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & 1 & & \\ & & & \vdots & \ddots & \\ & & & -L_{nx} & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{fila } x \\ \\ \\ \end{matrix} \tag{15.31a}$$

columna x

es una matriz casi vacía del tamaño de la matriz frontal de coeficientes activa, donde



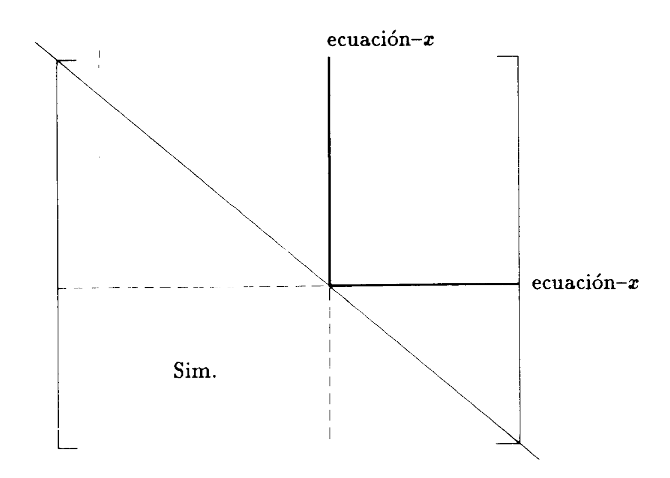


Figura 15.19 Matriz de rigidez frontal

$$L_{ix} = \frac{A_{ix}}{A_{xx}}$$

y

$$\mathbf{D}_x = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{fila } x \qquad (15.31b)$$

columna x

es una matriz diagonal unidad excepto en la fila x en la que la diagonal es cero. Al operar con $\mathbf{D}_x$ y $\mathbf{L}_x$ se obtiene una matriz $\mathbf{A}_{x+1}$ que tiene ceros en

la fila y columna x. Las columnas x de $\mathbf{L}_x$ y la diagonal $\mathbf{A}_{xx}$ se guardan para la fase de solución. La descomposición triangular frontal es llevada a cabo por el subprograma PFRTD, la eliminación hacia adelate por PFRTFW, y la sustitución hacia atrás por PFRTBK. Las columnas de $\mathbf{L}$ se guardan en un espacio de memoria que se controla, y cuando este espacio está lleno se escribe a disco a través de la rutina PBUFF. Sólo se consideran matrices $\mathbf{A}$ simétricas y las columnas de la parte triangular superior de la matriz se almacenan en un único vector.

Una vez que se ha realizado un paso de la solución frontal la ecuación x ya no es necesaria, y puede ser eliminada del conjunto de ecuaciones activas. Esto crea una columna y fila de ceros en la posición x. Ahora se pueden colocar nuevas ecuaciones en ese lugar; sin embargo, al final existirán muchas filas y columnas nulas, ya que el número de ecuaciones activas varía durante el proceso. El vector frontal sería entonces mayor, y esto resultaría en el procesamiento de ecuaciones "nulas" adicionales al tratar las ecuaciones x. Para evitar esto, el sistema de solución de PCFEAP recoloca primero la ecuación x dentro del área de memoria. Durante el paso de eliminación los elementos dentro del bloque rectangular de términos a la derecha de la columna x son movidos una columna a la izquierda, y los términos en el triángulo por debajo de la fila x son movidos una fila hacia arriba y una columna hacia la izquierda. Esto se consigue simplemente mediante un apuntador adicional que indica la posición para almacenar los términos reducidos. Con este procedimiento las ecuaciones activas permanecen compactas y el número de ecuaciones puede variar durante el proceso de solución (y llegar a ser cero al final de éste). Mientras que los movimientos descritos arriba son deseables durante la fase de la descomposición triangular, en una resolución es necesario hacer a la inversa para obtener la solución de cada ecuación. Esto requiere más operaciones con enteros que las requeridas por el método de solución en perfil.

En la referencia 12 se muestra que las soluciones usando un método de perfil operando sobre las ecuaciones almacenadas en el orden en que un programa frontal lleva a cabo las eliminaciones, requiere exactamente el mismo número de operaciones que el método frontal. Sin embargo, existen diferencias en el detalle de programación (ej., los movimientos descritos anteriormente), y por lo tanto, los dos sistemas de solución consumen distintos tiempos de cálculo. La mayor ventaja del sistema frontal es la facilidad para ensamblar términos de la matriz de coeficientes de las ecuaciones activas. En una solución de banda variable que utilice memoria periférica una matriz elemental puede tener términos que pertenezcan a diferentes bloques de almacenaje. En consecuencia, sería necesario recalcular el vector elemental para cada bloque o guardarlo en un espacio de reserva – cualquiera de los dos métodos aumentan el coste de la solución. Por lo tanto, el sistema frontal es una buena elección cuando no es posible mantener la

matriz de coeficientes enteros en la memoria del ordenador a la vez. El tamaño del problema está limitado por el máximo tamaño de la matriz de coeficientes del frente activo que puede guardarse en la memoria del ordenador (en PCFEAP esto es alrededor de 120 para las 8000 palabras del "common" ADATA). Una vez que se excede este límite un solucionador de banda variable con memoria periférica será siempre más eficiente que el método frontal.

15.6.2 *Solución iterativa.* Para problemas muy grandes el número de términos no nulos dentro del perfil de la matriz de coeficientes es pequeño comparado con el número de elementos nulos. Esto es especialmente cierto en problemas tridimensionales donde la altura de las columnas puede ser de varios miles de términos entre las cuales menos de cien sean no nulos antes de construir los factores triangulares (que rellenarán los elementos nulos). En consecuencia, para este tipo de problemas los métodos de solución iterativos serán, en general, más eficientes que la solución directa. Éste es un área de investigación que recibe en la actualidad considerable atención (ver las referencias 31 y 32). Para dar una idea de las ventajas potenciales de los métodos iterativos incluimos a continuación una discusión breve del método de Gauss-Seidel. Para llevar a cabo las iteraciones de Gauss-Seidel se escribe primeramente una descomposición aditiva de la matriz de coeficientes[21]

$$\mathbf{K} = \mathbf{L} + \mathbf{U} \qquad (15.32)$$

donde los coeficientes de $\mathbf{L}$ están en la mitad triangular inferior, es decir

$$L_{ij} = K_{ij} \quad i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n; \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ i \qquad (15.33)$$

Los coeficientes de $\mathbf{U}$ están en la mitad triangular superior

$$U_{ij} = K_{ij} \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1; \quad j = i+1,\ i+2,\ \ldots,\ n \qquad (15.34)$$

y todos los demás coeficientes de $\mathbf{L}$ y $\mathbf{U}$ son nulos.

El esquema iterativo de Gauss-Seidel básico viene dado por el algoritmo

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^0 &= \mathbf{v} \\ \mathbf{L}\mathbf{a}^{n+1} &= \mathbf{r} - \mathbf{U}\mathbf{a}^n \end{aligned} \qquad (15.35)$$

donde $\mathbf{v}$ es un vector inicial y el índice indica el número de la iteración. Si la matriz de coeficientes es simétrica y definida positiva, el método de Gauss-Seidel se sabe que es convergente (ver referencia 21); no obstante, la velocidad de convergencia puede ser inaceptablemente pequeña. En tales casos el esfuerzo de cálculo puede en general reducirse significativamente usando un factor de sobrerrelajación. Para facilitar el uso de la sobrerrelajación se sustrae el término $\mathbf{L}\mathbf{a}^n$ de ambos lados de la ecuación (15.35), para dar

$$\mathbf{L}\ \Delta\mathbf{a} = \mathbf{r} - \mathbf{K}\mathbf{a}^n \qquad (15.36)$$

y la solución prosigue usando

$$\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}^n + \omega\Delta\mathbf{a} \qquad (15.37)$$

donde ω es un factor de sobrerrelajación entre 0 y 2, que depende del problema. El proceso anterior se llama "sobrerrelajación sucesiva" o SOR. Las principales ventajas de la iteración son la reducción del almacenamiento en la memoria central y la eliminación de la descomposición triangular que es la parte más costosa de la solución directa. Sólo se necesita realizar multiplicaciones con los términos no nulos de $\mathbf{K}$; en consecuencia, el coste por iteración es muy pequeño en comparación con la descomposición triangular de la solución directa. Sus inconvenientes son: el desconocimiento de cuántas iteraciones son necesarias para obtener una solución aceptable; el valor óptimo de ω que debe usarse; y que el método a veces falla cuando se aplica a ecuaciones no simétricas o no definidas.

Existen muchos métodos iterativos que se pueden usar para resolver las ecuaciones. Investigaciones actuales que utilizan la estructura de elementos finitos parecen prometedoras; sin embargo, no existen todavía en la actualidad ningún procedimiento que pueda usarse para resolver la generalidad de los problemas de elementos finitos. En consecuencia, la mayoría de los programas de solución por elementos finitos de hoy usan todavía métodos de solución directa para resolver las ecuaciones algebraicas.

15.6.3 *Cálculo de la energía.* Cuando se resuelven problemas de elementos finitos a partir del valor mínimo (o máximo) de un funcional, generalmente se desea calcular el valor mínimo (o máximo) del mismo. En el problema discreto esto equivale a calcular la energía dada por

$$-2\Pi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^T\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{a}^T\mathbf{r} \qquad (15.38)$$

donde $\mathbf{K}$ es simétrica, puesto que ahora sólo consideraremos principios de valor mínimo (o máximo). Frecuentemente no conviene tener el segundo miembro de la ecuación y la solución al mismo tiempo en la memoria central. En tal caso puede calcularse el valor del funcional durante la resolución de las ecuaciones. Usando la descomposición triangular y las condiciones de simetría para K_{ij}, la ecuación (15.38) puede escribirse como

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i U_{mi} U_{mm}^{-1} U_{mj} a_j = \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \qquad (15.39)$$

lo que se convierte en

$$\sum_{m=1}^{n} y_m^2 U_{mm}^{-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \tag{15.40}$$

si se usa la ecuación (15.35). Así pues, puede calcularse el valor de la energía durante la reducción hacia adelante del primer miembro, sin tener que almacenar la solución y el primer miembro al mismo tiempo.[33]

El valor de la energía discreta calculada puede utilizarse para estimar la velocidad de convergencia de la energía, ya que la energía del error es igual al error de la energía, por ejemplo, consultar la referencia 34, donde se demuestra que

$$\Pi(a - a^h) = \Pi(a) - \Pi(a^h) \tag{15.41}$$

siendo Π la energía. Así la velocidad de convergencia de la energía puede estimarse entonces dibujando la curva de $\log[\Pi(a) - \Pi(a^h)]$ en función del log h donde h es una medida del tamaño de la malla, y a, a^h son las soluciones exacta y aproximada. Además de la energía, el programa PCFEAP tanbién calcula los estimadores de error descritos en el Capítulo 13. La versión que se incluye calcula errores basados en los estimadores de energía y también aquéllos basados en los errores al cuadrado de las tensiones (esto es, sin usar la matriz de propiedades de los materiales). Finalmente, se dan los estimadores de refinamiento necesario para producir un 5 por ciento de error. Se dan los estimadores de refinamiento tanto para la formulación en energía como en tensiones. Basándose en una solución del problema ambos métodos indican donde se necesita introducir un refinamiento adicional de la malla; sin embargo, la ventaja del método de tensiones es que también puede extenderse a aplicaciones no lineales.

15.7 Ampliación y modificación del programa

Las secciones anteriores describen el programa que se lista en la sección siguiente. Las posibilidades del programa, pese a ser bastante importantes, pueden aún mejorarse. Las mejoras pueden incluir: aumento de la capacidad para tratar problemas mayores, potenciar el lenguaje del macroprograma y, finalmente, añadir postprocesadores que preparen gráficos de resultados característicos.

Para muchos problemas de ingeniería analizados mediante elementos finitos, la capacidad del programa aquí discutido será inadecuada. La inadecuación se manifiesta primeramente en el número de incógnitas que pueden manejarse, ya que la capacidad está limitada primordialmente por el tamaño de la matriz de rigidez. Dicha capacidad puede incrementarse dividiendo la matriz de rigidez en bloques como se muestra en la Figura 15.20.[28] Así sólo sería necesario almacenar dos de estos bloques en la memoria en un instante dado, en vez del sistema total de ecuaciones. Cuando se usan grandes computadores este solo cambio aumentaría la capacidad del programa para poder tratar varios miles de incógnitas. La eficiencia del uso de bloques de ecuaciones aumenta si los datos de la malla se escriben en la memoria periférica durante el proceso de solución, de manera que las matrices globales tengan disponible la máxima área de memoria. Adicionalmente, el ensamblaje de las ecuaciones globales tendría que modificarse, puesto que no se dispone de todo el sistema de ecuaciones al mismo tiempo. Las matrices de los elementos tendrán ahora que almacenarse en la memoria periférica, y las ecuaciones ensambladas bloque por bloque (ej., consultar referencia 19).

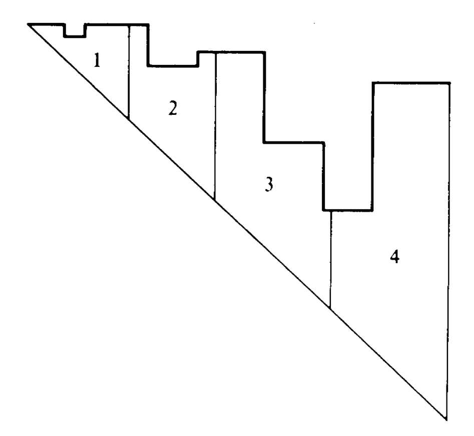


Figura 15.20 Esquema de almacenamiento en bloque para la solución del perfil.

Si se quiere aumentar la capacidad aún más, debe llevarse a cabo una modificación radical en el almacenamiento de las matrices de datos. Dichas matrices deben disponerse en bloques, almacenarse en la memoria periférica y utilizarse cuando se necesiten. En este caso será necesario escribir programas especiales para manejar con eficiencia la gran cantidad de entradas de datos y salidas de resultados y, por tanto, será más ventajoso efectuar el proceso de localización sólo una vez.

Además de incrementar la capacidad del programa para tratar un mayor número de incógnitas, será necesario añadir macroinstrucciones que permitan tratar un mayor número de tipos de problemas. En la Sección 15.4 sólo se incluyen algunas de las sentencias posibles y el programa que ofrecemos no puede, por ejemplo, resolver problemas generales no lineales. Si bien es posible formular una estrategia general iterativa usando los comandos que se incluyen, la solución eficiente de muchos problemas no lineales requiere el uso de algoritmos de "búsqueda en línea" ("line-search") o de los métodos

de "longitud de arco" ("arc-lenght"). Éste es un tema general que se tratará con detalle en el próximo volumen. Además, la inclusión de procedimeintos para calcular los valores y vectores propios de problemas generales permitiría estimar el tamaño de los pasos de tiempo en las soluciones transitorias, calcular las cargas de pandeo de estructuras, o para soluciones generales por el método de superposición modal en problemas lineales. De hecho, las aplicaciones generales precisan a menudo macro comandos especiales y en versiones mayores del programa se tiene una utilidad de "librería" para permitir que los usuarios añadan comandos sin modificar los subprogramas PMACR.

Finalmente, hemos aludido al problema de comprobar mallas y afirmado que todo esquema de solución viable precisa de un paquete de gráficos. Si esto es cierto para comprobación de datos, lo es también para interpretación de resultados. Para análisis de gran tamaño, especialmente si dependen del tiempo, no es posible interpretar una gran cantidad de resultados numéricos impresos. En estos casos la facilidad de la representación gráfica es ciertamente una necesidad. El tipo de representación gráfica utilizada debe ser capaz de dibujar la deformación de mallas (ampliando los desplazamientos si es necesario), dibujar gráficos de tensiones y deformaciones, y producir gráficos en función del tiempo.[9]

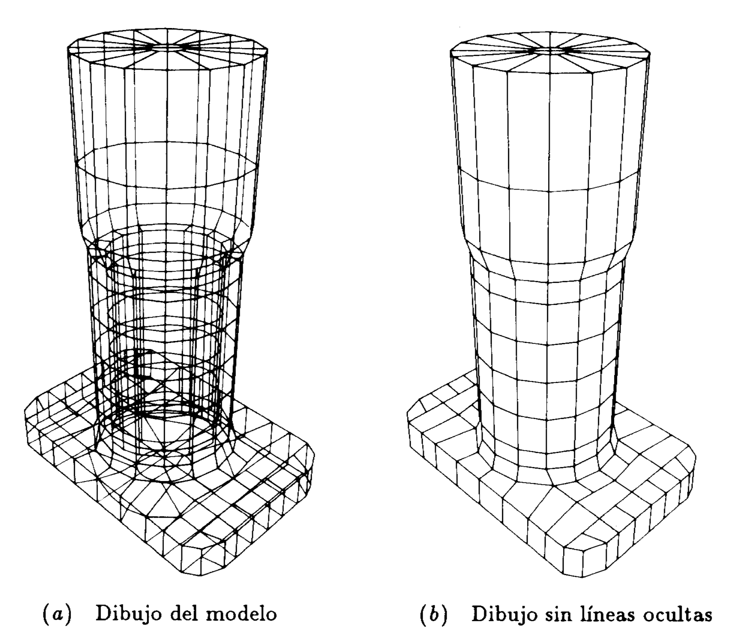
En las Figuras 15.21 a 15.24 se muestran unos cuantos ejemplos de gráficos y se sugieren algunos de los dispositivos para trazado de gráficos de los que debe disponerse.

Los programas generales para dibujo de gráficos pueden también incorporarse al programa utilizando el macrolenguaje para controlar la creación de los ficheros gráficos.

15.8 Listado del programa de elementos finitos

Se incluye aquí el listado completo en Fortran del programa de ordenador que se ha discutido en este capítulo. La sección está dividida en cinco partes: la primera parte contiene las rutinas de los módulos de control y entrada de datos, la segunda la rutinas de los módulos de solución y de salida de los macro comandos, la tercera los sistemas de solución de ecuaciones, la cuarta la rutinas gráficas y la quinta las rutinas elementales para elasticidad lineal basadas tanto en la formulación por desplazamientos como en la mixta, y un sencillo elemento estructural tipo barra. Las rutinas en cada parte están separadas en grupos que deben colocarse en un único archivo de programa. Se usa esta organización para facilitar la creación del programa usando un sistema de macro o mini ordenador. Los archivos se listan y describen brevemente en la Tabla 15.21.

15.8.1 *Instalación del programa de ejecución.* El programa ha sido verificado exhaustivamente usando dos entornos informáticos. El primero es un IBM o



(*a*) Dibujo del modelo (*b*) Dibujo sin líneas ocultas

Figura 15.21 Dibujos de mallas tridimensionales con la posibilidad de eliminar líneas ocultas (cortesía del Prof. N.N. Christiansen, Universidad de Brigham Young, Provo, Utah).

sistema de ordenador personal equivalente, usando un compilador de Fortran 77[35] y el Graphics Development Toolkit.[5] Se recomienda instalar el programa usando el sistema de solución frontal. Al compilar el programa todas las rutinas excepto PCMAC2.FOR y los archivos de los elementos y los de dibujo deben estar a nivel de sistema ("root level"). El programa necesita al menos 384 Kbytes de la memoria pricipal y dos unidades de disco flexible. Un disco duro mejoraría significativamente los resultados.

Si el programa ejecutable se llama PCFEAP.EXE (o PCFEAP) entonces el programa se ejecuta mandando el comando "pcfeap" desde la terminal. Cuando se termine el primer análisis el programa preguntará dónde deben almacenarse los archivos de salida de resultados. Cuando se usa el programa con sólo dos unidades de disco flexible, el disco del programa debe estar cargado en una de ellas (a:), y los archivos de salida deben escribirse en un disco de trabajo en la segunda (b:). Cuando se dispone de disco duro el programa y los archivos de salida pueden guardarse en la misma unidad (c:).

Como segundo entorno se ha usado un miniordenador con memoria virtual y se recomienda usar el sistema de solución de banda variable. En el miniordenador el *software* gráfico se sustituyó por otras rutinas. También

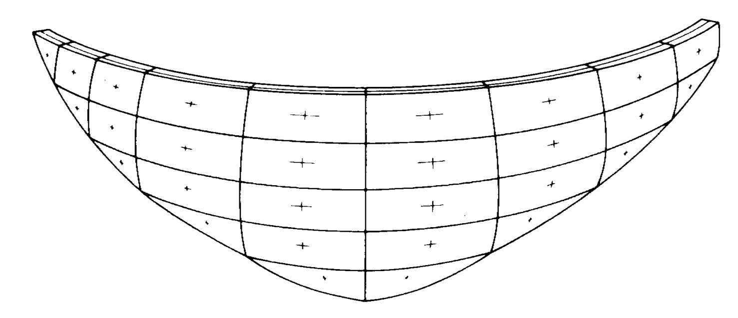


Figura 15.22 Medida de la intensidad de la tensión mediante vectores (se indican magnitud y dirección).

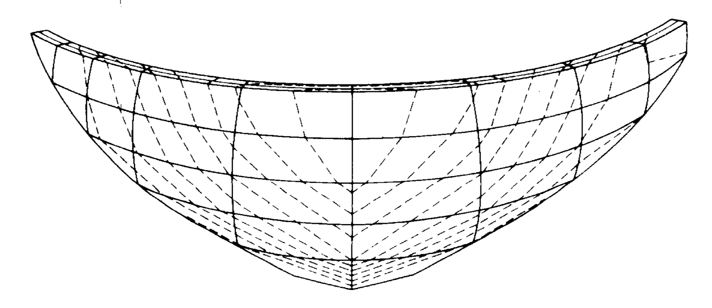


Figura 15.23 Líneas de igual tensión.

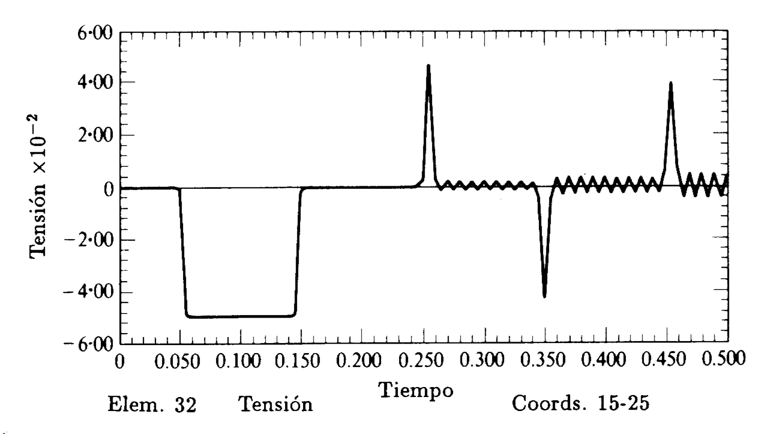


Figura 15.24 Gráfico de la historia de tensiones con el tiempo – muestra enseguida anomalías tales como oscilaciones crecientes.

TABLA 15.21

ARCHIVOS PARA EL PROGRAMA FUENTE DE PCFEAP

Nombre del archivo	*Descripción*
PCFEAP.FOR	Programa principal, asignación de archivos, instalación
PCDEPT.FOR	Rutinas dependientes de la instalación o del compilador
PCMESH.FOR	Rutinas de definición de la malla
PCMAC1.FOR	Rutinas de macro programa — parte 1
PCMAC2.FOR	Rutinas de macro programa — parte 2
PCMAC3.FOR	Rutinas de macro programa — parte 3
PASOLV.FOR	Rutinas de solución de banda variable
PASOLV.FOR	Rutinas de solución frontal
PCPLOT.FOR	Rutinas de dibujo para la malla y el contorno
PCELM1.FOR	Rutina del elemento con formulación en desplazamientos elasticidad lineal plana y axial-simétrica
PCELM2.FOR	Rutina del elemento con formulación mixta, **B**-barra; elasticidad lineal plana y axial-simétrica
PCELM3.FOR	Rutina del elemento para elasticidad plana; formulación de Pian-Sumihara
PCELM4.tex	Rutina del elemento para barra elástica

El programa PCFEAP y su documentación interactiva está disponible en diskette y cinta magnetica. Se puede obtener más información escribiendo a: Professor R.L. Taylor. Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, CA 94720, USA.

se aumentaron significativamente los vectores en el "common" no etiquetado y en el "common" ADATA. Ambas versiones usaron diferentes precisiones para definir variables enteras, reales y en doble precisión. La instalación y ejecución del programa se llevan a cabo de la misma manera que en la versión micro; sin embargo, los parámetros del disco se usan simplemente como parte del nombre del archivo en el directorio del ordenador.

Después de la instalación se escribe un pequeño archivo de disco llamado FEAP.NAM en que se guardan los parámetros de instalación y los nombres de los archivos usados en el último análisis.

Los archivos de análisis son:

1. Archivo de entrada. Este archivo guarda los datos de entrada que describen la malla y el algoritmo de solución (ej., MACR y el macro o INTE).
2. Archivo de salida. Este archivo guarda los resultados creados durante la generación de malla (si se usa NOPR se guarda muy poca información), y además, cualquier resultado solicitado durante la ejecución de macros.
3. Archivo de lectura para re-ejecución. Este archivo se puede usar para recomenzar una ejecución previa si se ha guadado el archivo de re-ejecución adecuado.
4. Archivo de escritura para re-ejecución. Este archivo se puede usar para

guardar un archivo de re-ejecución con el estado actual de la solución en cuanto a parámetros de control, desplazamientos y variables históricas.

El archivo de salida guarda la información que aparece en la pantalla durante la ejecución en modo iterativo.

Cuando se usa PCFEAP se le pide al usuario que especifique cada uno de los cuatro archivos. Después de la primera ejecución de un problema los nombres de los archivos usados se guardan como nombres por defecto para el siguiente análisis. Cuando se ejecuta un nuevo problema el usuario tiene la opción de rebautizar los archivos. Se sugiere que el archivo de entrada comience con una "I" (ej., IEXAMPL1); entonces el programa cambia los nombres por defecto para que empiecen con "O", "R", "S" para los archivos de salida, lectura para re-ejecución y escritura para re-ejecución, respectivamente (ej., OEXAMPL1, REXAMPL1, SEXAMPL1). Si se deben redireccionar los archivos a otra unidad de disco se debe especificar la dirección completa (ej., C:IEXAMPL1,C:EXAMPL, etc.). Los resultados de los archivos están limitados a 12 caracteres, incluyendo los redireccionamientos de disco.

15.8.2. *Módulos de control y entrada de datos.* Los subprogramas de control y entrada de datos están contenidos en los archivos PCFEAP.FOR, PCDEPT.FOR y PCMESH.FOR

(*a*) El archivo PCFEAP.FOR contiene los siguientes subprogramas:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*
PCFEAP	PROGRAMA	Programa Principal
PDEFIL	SUBRUTINA	Borra los archivos de trabajo
FILNAM	SUBRUTINA	Prepara los archivos de entrada, salida y re-ejecución
PCONTR	SUBRUTINA	Controla la solución global del problema
PLTSTR	SUBRUTINA	Calcula las proyecciones nodales de tensiones
PRTHED	SUBRUTINA	Imprime el título de cabecera en el archivo de salida

```
c-----------------------------------------------------------------+
c                                                                 |
c......    F E A P    - -  A Finite Element Analysis Program for  |
c                              Mini and Mainframe Computers       |
c                                                                 |
c......p c F E A P  - -  A Finite Element Analysis Program for    |
c                              Personal Computers                 |
c                                                                 |
c....A (PC)  Finite Element Analysis Program for solution of general |
c....problem classes using the finite element method.  Problem size |
c....is controlled by the dimension of blank common and value of max |
c....set below.                                                   |
```



```
c                                                                 |
c....Programmed by:                                               |
c              R. L. Taylor                                       |
c              Department of Civil Engineering                    |
c              University of California                           |
c              Berkeley, California 94720                         |
c                                                                 |
c....Mini Version 1.22 of FEAP - January 1987                     |
c             Use Skyline Solution system in file:  pasolv.for    |
c                                                                 |
c        Uses:  Fortran 77 Compiler System                        |
c                                                                 |
c....PC Version 1.22 of pcFEAP - January 1987                     |
c             Use Frontal Solution system in file: pfsolv.for     |
c                                                                 |
c        Uses:  Micro Soft Fortran Version 3.3x                   |
c             IBM Graphics Toolkit - need forvdi.lib              |
c                                                                 |
c....(C) Copyright - University of California - 1985,1986,1987    |
c                                                                 |
c-----------------------------------------------------------------+
$ NOFLOATCALLS
      program pcfeap
      character versn*12,tfile*12
      integer*2 m
      common m(32000)
      common /cdata/  numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /iofild/ iodr,iodw,ipd,ipr,ipi
      common /psize/  maxm,ne
      common /temfl1/ tfile(6)
      common /vdata/ versn(3)
c....set version data
      versn(1) = 'IBM PC / AT '
      versn(2) = ' -- 1.22 -- '
      versn(3) = '  05/11/87  '
c....reserve memory size; set default input/output units
      maxm = 32000
      ne   = 1
      iodr = 1
      iodw = 2
c....set precision values:  ipd = double; ipr = real; ipi = integer
      ipd  = 4
      ipr  = 2
      ipi  = 1
c....clear the screen to start
      call pclear
c....open files; erase scratch files if they exist; start execution
      call filnam
      call pdefil(tfile,1,4)
      call pcontr
c....close input and output files; destroy temporary disk files
      close(iodr)
      close(iodw)
      call pdefil(tfile,1,4)
      stop
      end
```

```
c
      subroutine pdefil(tfile,n1,n2)
c....destroy temporary files
      logical lfil
      character*12 tfile(n2)
      do 100 n = n1,n2
        inquire(file=tfile(n),exist=lfil)
        if(lfil) then
          open (4,file=tfile(n))
          close(4,status='delete')
        endif
100   continue
      return
      end
c
      subroutine filnam
c....set filenames for execution
      logical lfil,linp,lout,lres,lsav
      character*1  y,disknm,wd(2)*6,tfile*12
      character*12 finp,fout,fres,fsav,pinp,pout,pres,psav,versn
      common /iofild/ iodr,iodw,ipd,ipr,ipi
      common /temfl1/ tfile(6)
      common /vdata/ versn(3)
      data wd/'new   ','exists'/
c....output version data to screen
      write(*,2000) versn
c....look to see if any problem has been run
      inquire(file='FEAP.NAM',exist=lfil)
      if(lfil) then
         open(3,file='FEAP.NAM',status='old')
         read(3,1000) pinp,pout,pres,psav,disknm
         finp = pinp
         fout = pout
         fres = pres
         fsav = psav
         go to 200
      else
c....default installation parameters
         pinp = 'NONE'
         disknm = 'c'
c....set scratch disk name
         write(*,2007) disknm
         read(*,1001) pdisknm
         if(pdisknm.ne.' ')  disknm = pdisknm
      endif
c....name file for input data
100   write(*,2000) versn
      assign 1 to ix
1     write(*,2001) pinp
      read (*,1000,err=900) finp
      if(finp.eq.'  ')  finp = pinp
c....check if the input files exists
      inquire(file=finp,exist=linp)
      if(.not.linp) then
         write(*,3000)
         go to 1
      else
         pout = finp
         pres = finp
         psav = finp
         call pdisk('o',pout)
         call pdisk('r',pres)
         call pdisk('s',psav)
      endif
      pinp = finp
c....name file for output data
      assign 2 to ix
2     write(*,2002) pout
      read (*,1000,err=900) fout
      if(fout.eq.'  ')  fout = pout
      pout = fout
c....name file for restart read data
      assign 3 to ix
3     write(*,2003) pres
      read (*,1000,err=900) fres
      if(fres.eq.' ') fres = pres
      pres = fres
c....name file for restart save data
      assign 4 to ix
4     write(*,2004) psav
      read (*,1000,err=900) fsav
      if(fsav.eq.'  ')  fsav = psav
      psav = fsav
c....check file status and input if necessary
200   inquire(file=finp,exist=linp)
      if(.not.linp) go to 100
      inquire(file=fout,exist=lout)
      iop = 1
      if(lout) iop = 2
      inquire(file=fres,exist=lres)
      irs = 1
      if(lres) irs = 2
      inquire(file=fsav,exist=lsav)
      isv = 1
      if(lsav) isv = 2
      write(*,2005) finp,wd(2),fout,wd(iop),fres,wd(irs),fsav,wd(isv)
      read(*,1001) y
      if(y.ne.'Y' .and.  y.ne.'y') go to 100
c....save a copy of the current filenames
      if(.not.lfil) open(3,file='FEAP.NAM',status='new')
      rewind 3
      write(3,1000) finp,fout,fres,fsav,disknm
      close(3)
c....erase the output file if it exists
      if(lout) then
        open(3,file=fout)
        close(3,status='delete')
      endif
      write(*,2006)
c....open the files for input and output
      open(unit=iodr,file=finp,status='old')
      open(unit=iodw,file=fout,status='new')
```

```
c....set the scratch disk names and locations
      tfile(1) = ' :FRNT.TEM'
      tfile(2) = ' :HIST.TEM'
      tfile(3) = ' :MESH.TEM'
      tfile(4) = ' :STRE.TEM'
      tfile(5) = fres
      tfile(6) = fsav
      do 300 i = 1,4
        call pdisk(disknm,tfile(i))
300   continue
      return
c....error trap
900   write(*,3001)
      go to ix
c....format statements
1000  format(4a12,a1)
1001  format(a1)
2000  format(/////6x,
     1'F I N I T E   E L E M E N T   A N A L Y S I S   P R O G R A M'//
     2 13x,'VERSION: ',3a12)
2001  format(/13x,'I n p u t     F i l e n a m e s'//
     1       15x,'Input data   (default:  ',a12,') :',$)
2002  format(15x,'Output data  (default:  ',a12,') :',$)
2003  format(15x,'Restart read (default:  ',a12,') :',$)
2004  format(15x,'Restart save (default:  ',a12,') :',$)
2005  format( /13x,'Files are set as follows :'//
     1 32x,'Filename',9x,'Status'/
     2 15x,'Input    (read ) :  ',a12,5x,a6/
     3 15x,'Output   (write) :  ',a12,5x,a6/
     4 15x,'Restart  (read ) :  ',a12,5x,a6/
     5 15x,'Restart  (write) :  ',a12,5x,a6//
     6 13x,'Caution, existing write files will be overwritten.'//
     7 13x,'Are filenames correct?  ( y or n) :  ',$)
2006  format(/12x,'R U N N I N G   P C F E A P   P R O B L E M   N O W')
2007  format(/13x,'I N S T A L L A T I O N   P A R A M E T E R S'//
     1       15x,'Disk Name For Scratch Files:'/
     2       17x,'             (default = ',a1,9x,') :',$)
3000  format(' *** ERROR - - Specified input file does not exist')
3001  format(' *** ERROR on read *** reinput')
      end
c
      subroutine pcontr
c....control program for feap
      logical prt,tfl,pcomp
      integer*2 ia,m
      real*8 d
      character*4 head,titl(20),versn*12,yyy*80
      common /bdata/ head(20)
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /iofile/ ior,iow
      common /iofild/ iodr,iodw,ipd,ipr,ipi
      common /mdata/ nn,n0,n1,n2,n3,n4,n5,n6,n7,n8,n9,n10,n11,n12,n13
      common /mdat2/ n11a,n11b,n11c,ia(2,11)
      common /sdata/ ndf,ndm,nen1,nst
      common /vdata/ versn(3)
      common d(1),r(1),m(1)
```



```
c....set parameters for rotation dof
      do 4 i = 1,4
        ia(1,i) = 1
        ia(2,i) = 2
4     continue
c....set files back to default values
1     ior = iodr
      iow = iodw
c....read a card and compare first 4 columns with macro list
      read(ior,1000,err=600,end=700) (titl(i),i=1,20)
      if(pcomp(titl(1),'feap')) go to 100
      if(pcomp(titl(1),'inte')) go to 200
      if(pcomp(titl(1),'macr')) go to 300
      if(pcomp(titl(1),'stop')) return
      go to 1
c....read and print control information
100   do 101 i = 1,20
101   head(i) = titl(i)
      call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1001,err=600) numnp,numel,nummat,ndm,ndf,nen,nad
      write(iow,2000) head,versn,numnp,numel,nummat,ndm,ndf,nen,nad
c....set pointers for allocation of data arrays
      nen1 = nen + 4
      nst  = nen*ndf + nad
      call psetm(nn, numnp*max(ndm,ndf,2),ipd,tfl)
      call psetm(nn, 4*nen*ndf,        ipd,tfl)
      call psetm(n0, nen*ndm,          ipr,tfl)
      call psetm(n1, nen,              ipr,tfl)
      call psetm(n2, nst,              ipi,tfl)
      call psetm(n3, nst,              ipd,tfl)
      call psetm(n4, nst*nst,          ipd,tfl)
      call psetm(n5, nummat*9,         ipi,tfl)
      call psetm(n6, nummat*18,        ipd,tfl)
      call psetm(n7, ndf*numnp,        ipi,tfl)
      call psetm(n8, ndm*numnp,        ipr,tfl)
      call psetm(n9, nen1*numel,       ipi,tfl)
      call psetm(n10,numnp*ndf,        ipr,tfl)
      call psetm(n11,numnp,            ipr,tfl)
      call psetm(n11a,nen,             ipr,tfl)
      call psetm(n11b,numnp,           ipr,tfl)
      call psetm(n11c,numel,           ipi,tfl)
      call psetm(n12,ndf*numnp,        ipi,tfl)
c....call mesh input subroutine to read and print all mesh data
      iii = 0
      prt = .true.
      call pmesh(m(n2),m(n5),d(n6),m(n7),r(n8),m(n9),r(n10),r(n11),ndf,
     1  ndm,nen1,iii,prt)
      go to 1
c....set files for interactive macro execution
200   ior = -iodr
c....compute profile
300   call profil(m(n12),m(n11c),m(n7),m(n9),ndf,nen1)
      call psetm(n13,numnp*ndf,   ipr,tfl)
      call psetm(n14,3*numnp*ndf, ipd,tfl)
c....set up stress history addresses
      call sethis(m(n5),m(n9),m(n11c),4,nen,nen1,numel)
```

```
c....zero the initial force and solution vectors
      call pconsr(r(n13), ndf*numnp,0.0)
      call pconsd(d(n14),3*ndf*numnp,0.0d0)
c....macro module for establishing solution algorithm
      call pmacr(d(nn),r(n0),r(n1),m(n2),d(n3),d(n4),m(n5),d(n6),m(n7),
     1           r(n8),m(n9),r(n10),r(n11),m(n12),r(n13),d(n14),d(1),
     2           ndf,ndm,nen1,nst,prt)
      go to 1
600   call perror('PCONTR',yyy)
      return
700   call pend('pcontr')
      return
c....input/output formats
1000  format(20a4)
1001  format(8i10)
2000  format(1x,20a4//5x,'VERSION :',3a12//
     x 5x,'Number of nodal points      =',i6/
     1 5x,'Number of elements          =',i6/
     2 5x,'Number of material sets     =',i6/
     3 5x,'Dimension of coordinate space=',i6/
     4 5x,'Degree of freedoms/node     =',i6/
     5 5x,'Nodes per element (maximum) =',i6/
     6 5x,'Extra d.o.f. to element      =',i6)
      end
c
      subroutine pltstr(dt,st,numnp)
c....stress projections computed by dividing by 'lumped' weightings
      real dt(numnp),st(numnp,1)
      real*8 sig(6),eerror,elproj,ecproj,efem,enerr,ebar
      common /errind/eerror,elproj,ecproj,efem,enerr,ebar
      elproj = 0.0
      do 100 ii = 1,numnp
        if(dt(ii).ne.0.0) then
          styld   = st(ii,5)
          do 200 j = 1,4
            sig(j)   = st(ii,j)/dt(ii)
            elproj   = elproj + sig(j)*st(ii,j)
            st(ii,j) = sig(j)
200       continue
c....compute the principal stress values
          call pstres(sig,sig(4),sig(5),sig(6))
          if(st(ii,5).ne.0.0) then
            dt(ii) = st(ii,5)/dt(ii)
          else
            dt(ii) = sig(6)
          endif
          st(ii,5) = sig(4)
          st(ii,6) = sig(5)
          st(ii,7) = (sig(4)-sig(5))/2.0
        endif
100   continue
      return
      end
c
      subroutine prthed(iow)
c....output a header to printed outputs
```



```
      character*4 head
      common/bdata/ head(20)
      write(iow,2000) head
      return
2000  format(1x,20a4//1x)
      end
```

(*b*) El archivo PCDEPT.FOR contiene el siguiente conjunto de subprogramas (nótese que puede ser necesario cambiar las rutinas de este archivo en función del sistema de ordenador utilizado):

Nombre	*Tipo*	*Descripción*
PCTIME	SUBRUTINA	Calcula el tiempo invertido y lo imprime
PCOMP	FUNCION	Compara datos en caracteres ASCII
PINTIO	SUBRUTINA	Lee los datos de entrada desde pantalla o archivo
PCLEAR	SUBRUTINA	Rutina para borrar la pantalla en DOS

```
$NOFLOATCALLS
      INTERFACE TO SUBROUTINE TIME
c....interface to dos time function
      CHARACTER*10 STR [NEAR,REFERENCE]
      INTEGER*2 N [VALUE]
      END
c
      subroutine pctime(etime)
      character*10 tarry [near,reference]
      character*10 etime
c....DOS time call routine: replace by appropriate system call
      call time (10,tarry)
      etime = tarry
      return
      end
c
      logical function pcomp(a,b)
c....determine match between alphanumeric data:  inc = ascii parameter
      character*1 a(4),b(4)
      data inc/32/
      pcomp = .false.
      do 100 i = 1,4
         ia = ichar(a(i))
         ib = ichar(b(i))
         if(ia.ne.ib .and. ia+inc.ne.ib .and. ia.ne.ib+inc ) return
100   continue
      pcomp = .true.
      return
      end
c
      subroutine pintio(y,n0)
c....input control from current active unit - into a character array
c....for free format processing by 'acheck' into field widths of 'n0'
      character*80 x,y
      common /iofile/ ior,iow
      if(ior.gt.0) read(ior,'(a)',err=100,end=100) x
```

```
      if(ior.lt.0) read(*,'(a)',err=100,end=100) x
      call acheck(x,y,n0,80)
      return
100   call perror('PINTIO',x)
      stop
      end
c
      subroutine pclear
c....clear PC screen and home cursor on monitor
      write(*,2000) char(27)
      return
2000  format(1x,a1,'[2J')
      end
```

(*c*) El archivo PCMESH.FOR contiene el siguiente conjunto de subprogramas:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*
PMESH	SUBRUTINA	Programa de control de la entrada de datos de malla
PMATIN	SUBRUTINA	Entrada de los conjuntos de propiedades materiales
BLKGEN	SUBRUTINA	Entrada de bloques de nodos y elementos
GENVEC	SUBRUTINA	Genera vectores/matrices reales nodales
PBCIN	SUBRUTINA	Entrada de los códigos de vinculación del contorno
PELIN	SUBRUTINA	Entrada de las listas de conectividades elementales
POLAR	SUBRUTINA	Convierte las coordenadas polares en cartesianas
SBLK	SUBRUTINA	Genera nodos y elementos para BLKGEN
SETHIS	SUBRUTINA	Escribe los datos iniciales de historia en disco

```
$NOFLOATCALLS
      subroutine pmesh(idl,ie,d,id,x,ix,f,t,ndf,ndm,nen1,iii,prt)
c....data input routine for mesh description
      logical prt,error,pcomp
      integer*2 ie(9,1),id(ndf,1),ix(nen1,1),idl(6),ia
      real   x(ndm,1),f(ndf,1),t(1)
      real*8 d(18,1),dm
      character*4 head,wd(12),cc,sc,y*1,yyy*80
      character*12 cds,tmp,fds,an
      common /bdata/ head(20)
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /eldata/ dq,n,ma,mct,iel,nel
      common /iofile/ ior,iow
      common /mdat2/ n11a,n11b,n11c,ia(2,11)
      common dm(1),rm(1)
      data wd/'coor','elem','mate','boun','forc','temp','prin','nopr',
     1       'bloc','pola','angl','end '/
      data an/' angles    '/, cds/' coordinates'/, tmp/' temperature'/
      data fds/' force/displ'/, list/12/
```



```
c....initialize arrays
      error = .false.
      if(iii.ge.0) then
        prt = .true.
        call pconsr(rm(n11b),numnp,0.0)
        call pconsr( f,numnp*ndf,0.0)
        call pconsi(id,numnp*ndf,0)
        if(iii.eq.0) call pconsr( t,numnp,0.0)
        if(iii.eq.0) call pconsr( x,numnp*ndm,-999.0)
      endif
102   if(ior.lt.0) write(*,2000)
      call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1000,err=901,end=900) cc,sc
      if((ior.lt.0).and.pcomp(cc,'help')) then
         call phelp(wd,list,'MESH ',0)
         go to 102
      endif
20    do 30 i = 1,list
30    if(pcomp(cc,wd(i))) go to 40
      go to 102
c....nodal coordinate data input
40    if(i.eq.1) call genvec(ndm,x,cds,prt,error,.true.)
c....element data input
      if(i.eq.2) call pelin(idl,ix,nen1,nen,numnp,numel,error,prt)
c....material data input
      if(i.eq.3) call pmatin(d,x,ix,idl,ie,numnp,numel,nummat,ndm,ndf,
     1                       prt)
c....read in the restraint conditions for each node
      if(i.eq.4) call pbcin(iii,idl,id,numnp,ndf,prt)
c....force/displ data input
      if(i.eq.5) call genvec(ndf,f,fds,prt,error,.false.)
c....temperature data input
      if(i.eq.6) call genvec(1,t,tmp,prt,error,.false.)
c....set print flag
      if(i.eq.7.or.i.eq.8) prt = i.eq.7
c....generate block of nodes and 4-node elements
      if(i.eq.9) then
        if(iii.lt.0) write(iow,3000)
        call blkgen(ndm,ndf,nen,nen1,x,ix,prt)
      endif
c....convert polar/cylindrical to cartesian coordinates
      if(i.eq.10) call polar(x,ndm,prt)
c....set boundary angles
     if(i.eq.11) call genvec(1,rm(n11b),an,prt,error,.false.)
c....mesh complete, return
      if(i.eq.12) then
        if(error) stop
        return
      endif
      go to 102
c....end of file encountered
900   call pend('pmesh ')
      stop
901   call perror('PMESH ',yyy)
      go to 102
1000  format(a4,6x,a4)
```

```
2000  format('     Mesh 1 > ',$)
3000  format(' **WARNING** element connections necessary to use '
     1       ,'block in macro program')
4000  format(' ** Current Problem Values **'/i6,' nodes,',i5,' elmts,',
     1 i3,' matls,',i2,' dims,',i2,' dof/node,',i3,' nodes/elmt')
      end
c
      subroutine pmatin(d,x,ix,idl,ie,numnp,numel,nummat,ndm,ndf,prt)
      logical prt
      character yyy*80
      integer*2 ix(1),idl(1),ie(9,1)
      real    x(ndm,1)
      real*8 d(18,1)
      common /adata/  ad(16000)
      common /eldata/ dq,n,ma,mct,iel,nel
      common /hdata/  nh1,nh2
      common /iofile/ ior,iow
c....material data input
      if(prt) then
        call prthed(iow)
        write(iow,2004)
        if(ior.lt.0) write(*,2004)
      endif
      do 306 n = 1,nummat
301     if(ior.lt.0) write(*,3000)
        call pintio(yyy,10)
        read(yyy,1002,err=311) ma,iel,(idl(i),i=1,ndf)
        if(ma.le.0) return
c....set all zero inputs
        do 302 i = 1,ndf
302     ie(i,ma) = idl(i)
        do 303 i = 1,ndf
        if(idl(i).ne.0) go to 305
303     continue
        do 304 i = 1,ndf
304     ie(i,ma) = i
305     ie(7,ma) = iel
        mct = 0
        nh1 = 0
        if(prt) then
          write(iow,2003) ma,iel,(i,ie(i,ma),i=1,ndf)
          if(ior.lt.0) write(*,2003) ma,iel,(i,ie(i,ma),i=1,ndf)
        endif
        call elmlib(d(1,ma),ad,x,ix,ad,ad,ad,ndf,ndm,ndf,iel,1)
        if(nh1.eq.0 .and.  mct.ne.0) nh1 = mct
        ie(8,ma) = nh1
        go to 306
311     call perror('PMESH ',yyy)
        go to 301
306   continue
      return
c....formats
1002  format(8i10)
2003  format(/5x,'Material Set',i3,' for Element Type',i2,5x,//
     1  10x,'degree of freedom assignments    local    global' /
     2  42x, 'number',4x,'number'/(36x,2i10))
```



```
2004  format('  M a t e r i a l    P r o p e r t i e s')
3000  format(' Input:  matl. no., elmt type'/3x,'>',$)
      end
c
      subroutine blkgen(ndm,ndf,nel,nel1,x,ix,prt)
c....generate a block of nodes/elements
      logical prt
      character yyy*80
      integer*2 ix(nel1,1),ixl(9)
      real    x(ndm,1),xl(3,9)
      real*8 shp(3,9),dr,ds
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /iofile/ ior,iow
100   if(ior.lt.0) write(*,5000)
      call pintio(yyy,5)
      read(yyy,1000,err=101) nn,nr,ns,ni,ne,ma,nodinc,ntyp
      go to 102
101   call perror('BLKGEN',yyy)
      go to 100
102   nodinc = max(nodinc,0)
      nr = max(nr,1)
      ns = max(ns,1)
      ni = max(ni,1)
      ma = max(ma,1)
      if(prt) then
        call prthed(iow)
        write(iow,2000) nr,ns,ni,ne,ma,nodinc,ntyp
        if(ne.eq.0) write(iow,2005)
        write(iow,2002) (i,i=1,ndm)
        if(ior.lt.0) then
          write(*,2000) nr,ns,ni,ne,ma,nodinc,ntyp
          if(ne.eq.0) write(*,2005)
          write(*,2002) (i,i=1,ndm)
        endif
      endif
      do 10 n = 1,9
      do 10 j = 1,ndm
      xl(j,n) = 0.0
10    ixl(n) = 0
      nm = 0
      do 20 n = 1,nn
200   if(ior.lt.0) write(*,5001)
      call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1001,err=201) l,r,s,t
      go to 202
201   call perror('BLKGEN',yyy)
      go to 200
202   if(l.eq.0) l = n
      nm = max(nm,l)
      ixl(l) = l
      xl(1,l) = r
      xl(2,l) = s
      xl(3,l) = t
20    if(prt) write(iow,2001) l,(xl(i,l),i=1,ndm)
      if(prt.and.ior.lt.0) write(*,2001) l,(xl(i,l),i=1,ndm)
      dr = 2.d0/nr
```

```
      ds = 2.d0/ns
      if (ntyp.eq.0) then
         nf = ne + nr*ns - 1
      elseif (ntyp.gt.7) then
         nf = ne + (nr*ns)/4 - 1
      else
         nf = ne + 2*nr*ns - 1
      endif
      if(nf.gt.numel.and.ne.gt.0) go to 401
      nr = nr + 1
      ns = ns + 1
      if(ndm.eq.1) ns = 1
      ng = nr*ns + ni -1
      if(ng.gt.numnp) go to 400
c....form block
      call sblk(nr,ns,xl,ixl,shp,x,ix,dr,ds,ni,ne,ndm,
     1     nel1,nodinc,ntyp,nm,ma,prt)
c....print lists if wanted
      if(.not.prt) return
c....print element lists
      if(ne.le.0) return
      do 502 n = ne,nf,50
        call prthed(iow)
        write(iow,2003) (i,i=1,nel)
        if(ior.lt.0) write(*,2003) (i,i=1,nel)
        j = min(nf,n+49)
        do 501 i = n,j
          write(iow,2004) i,ma,(ix(k,i),k=1,nel)
          if(ior.lt.0) write(*,2004) i,ma,(ix(k,i),k=1,nel)
501     continue
502   continue
      return
400   write(iow,2006) ng,numnp
      if(ior.lt.0) write(*,2006) ng,numnp
      return
401   write(iow,2007) nf,numel
      if(ior.lt.0) write(*,2007) nf,numel
      return
1000  format(8i5)
1001  format(i10,3f10.0)
2000  format('   N o d e    G e n e r a t i o n s'//
     19x,'number of r-increments:',i5/9x,'number of s-increments:',i5/
     29x,'first node number      :',i5/9x,'first element number   :',i5/
     39x,'element material type  :',i5/9x,'node line increment    :',i5/
     4  9x,'block type (0-9)       :',i5/1x)
2001  format(i9,1p3e12.3)
2002  format(5x,'node',3(i6,' coord'))
2003  format('   E l e m e n t   C o n n e c t i o n s'//
     1  '   element',7x,'matl',9(i5,' node'))
2004  format(11i10)
2005  format('  **WARNING** No elements are generated ')
2006  format(' **ERROR** insufficient storage for nodes'/
     1  10x,'final node =',i5,5x,'numnp =',i5)
2007  format(' **ERROR** insufficient storage for elements'/
     1  10x,'final element =',i5,5x,'numel =',i5)
5000  format(' Input:  nn,nr,ns,ni,ne,ma,nodinc,ntyp'/3x,'>',$)
```



```
5001  format(' Input:  node, x-1, x-2, x-3'/3x,'>',$)
      end
c
      subroutine genvec(ndm,x,cd,prt,err,prtz)
c....generate real data arrays by linear interpolation
      logical prt,err,prtz
      character cd*12,yyy*80
      real x(ndm,1),xl(6)
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /iofile/ ior,iow
      mct = 0
      n = 0
      ng = 0
102   l = n
      lg = ng
100   if(ior.lt.0) write(*,5000) cd
      call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1000,err=11) n,ng,(xl(i),i=1,ndm)
      go to 12
11    call perror('GENVEC',yyy)
      go to 100
12    if(n.gt.numnp) write(iow,3001) n,cd
      if(ior.lt.0.and.n.gt.numnp) write(*,3001) n,cd
      if(n.le.0.or.n.gt.numnp) go to 109
      do 103 i = 1,ndm
103   x(i,n) = xl(i)
      if(lg) 104,102,104
104   lg = sign(lg,n-l)
      li =(abs(n-l+lg)-1)/abs(lg)
      do 105 i = 1,ndm
105   xl(i) = (x(i,n)-x(i,l))/li
106   l = l + lg
      if((n-l)*lg.le.0) go to 102
      if(l.le.0.or.l.gt.numnp) go to 108
      do 107 i = 1,ndm
107   x(i,l) = x(i,l-lg) + xl(i)
      go to 106
108   write(iow,3000) l,cd
      if(ior.lt.0) write(*,3000) l,cd
      err = .true.
      go to 102
109   if(.not.prt) return
      do 113 j = 1,numnp
      if(prtz) go to 111
      do 110 l = 1,ndm
      if(x(l,j).ne.0.0) go to 111
110   continue
      go to 113
111   mct = mct - 1
      if(mct.gt.0) go to 112
      mct = 50
      write(iow,2000) cd,(l,cd,l=1,ndm)
      if(ior.lt.0) write(*,2000) cd,(l,cd,l=1,ndm)
112   if(x(1,j).eq.-999.0) write(iow,2001) j
      if(x(1,j).ne.-999.0) write(iow,2002) j,(x(l,j),l=1,ndm)
      if(ior.lt.0) then
```

```
        if(x(1,j).eq.-999.0) write(*,2001) j
        if(x(1,j).ne.-999.0) write(*,2002) j,(x(l,j),l=1,ndm)
      endif
113   continue
      return
1000  format(2i10,6f10.0)
2000  format('      N o d a l:  ',a12//6x,'node',9(i7,a6))
2001  format(i10,' has not been input or generated')
2002  format(i10,9f13.4)
3000  format(' **ERROR** attempt to generate node',i5,' in ',a12)
3001  format(' **ERROR** attempt to input node',i5,', terminate'
     1 ,' input of nodes in ',a12)
5000  format(' Input ',a12,' values:  node, inc, value(i),i=1,nval'/
     1       3x,'>',$)
      end
c
      subroutine pbcin(iii,idl,id,numnp,ndf,prt)
      logical prt
      character yyy*80
      integer*2 idl(1),id(ndf,1)
      common /iofile/ ior,iow
c....read in the restraint conditions for each node
      iii = 1
      n = 0
      ng = 0
400   l = n
      lg = ng
401   if(ior.lt.0) write(*,5000)
      call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1000,err=412) n,ng,(idl(i),i=1,ndf)
      if(n.gt.0.and.n.le.numnp) then
        do 402 i = 1,ndf
          id(i,n) = idl(i)
          if(l.ne.0.and.idl(i).eq.0.and.id(i,l).lt.0) id(i,n) = -1
402     continue
        lg = sign(lg,n-l)
403     l = l + lg
        if((n-l)*lg.le.0) go to 400
        do 404 i = 1,ndf
          if(id(i,l-lg).lt.0) id(i,l) = -1
404     continue
        go to 403
      endif
c....output nodes with nonzero codes
      if(prt) then
        call prthed(iow)
        write(iow,2000) (i,i=1,ndf)
        do 407 n = 1,numnp
          do 406 l = 1,ndf
            if(id(l,n).ne.0) then
              write(iow,2001) n,(id(i,n),i=1,ndf)
              go to 407
            endif
406       continue
407     continue
      endif
```



```
      return
412   call perror('PBCIN ',yyy)
      go to 401
c....formats
1000  format(8i10)
2000  format('      N o d a l    B. C.'//6x,'node',8(i3,' b.c.')/1x)
2001  format(i10,8i8)
5000  format(' Input:  node, inc, b.c.  codes(i),i=1,ndf'/3x,'>',$)
      end
c
      subroutine pelin(idl,ix,nen1,nen,numnp,numel,error,prt)
      logical error,prt
      character yyy*80
      integer*2 idl(1),ix(nen1,1)
      common /iofile/ ior,iow
c....element data input
      l = 0
      do 210 i = 1,numel,50
      if(prt) call prthed(iow)
      if(prt) write(iow,2001) (k,k=1,nen)
      if(ior.lt.0.and.prt) write( *,2001) (k,k=1,nen)
      j = min(numel,i+49)
      do 209 n = i,j
      if(l-n) 200,202,204
100   call perror('PELIN ',yyy)
200   if(ior.lt.0) write(*,5000)
      call pintio(yyy,5)
      read(yyy,1001,err=100) l,lk,(idl(k),k=1,nen),lx
      if(l.eq.0) l = numel+1
      if(lx.eq.0) lx=1
      if(l-n) 201,202,204
201   write(iow,3001) l,n
      if(ior.lt.0) write(*,3001) l,n
      error = .true.
      go to 209
202   nx = lx
      do 203 k = 1,nen
      if(idl(k).gt.numnp.or.idl(k).lt.0) go to 208
      ix(k,l) = idl(k)
203   continue
      ix(nen1,l) = lk
      go to 206
204   ix(nen1,n) = ix(nen1,n-1)
      do 205 k = 1,nen
      ix(k,n) = ix(k,n-1) + nx
      if(ix(k,n-1).eq.0) ix(k,n) = 0
      if(ix(k,n).gt.numnp.or.ix(k,n).lt.0) go to 208
205   continue
206   if(prt .and.  ior.lt.0) then
        write( *,2002) n,ix(nen1,n),(ix(k,n),k=1,nen)
      endif
      if(prt) write(iow,2002) n,ix(nen1,n),(ix(k,n),k=1,nen)
      go to 209
208   write(iow,3002) n
      error = .true.
209   continue
```

```
210   continue
      return
c....formats
1001  format(16i5)
2001  format('     E l e m e n t s'//3x,'elmt  matl',8(i3,' node')/
     1       (13x,8(i3,' node')))
2002  format(2i6,8i8/(13x,8i8))
3001  format(' **ERROR** element',i5,' appears after element',i5)
3002  format(' **ERROR** element',i5,' has illegal nodes')
5000  format(' Input:  elm, mat, ix(i),i=1,nen, inc'/3x,'>',$)
      end
c
      subroutine polar(x,ndm,prt)
c....convert polar to cartesian coordinates
      logical prt
      real*8 th
      real   x(ndm,1)
      character yyy*80
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /iofile/ ior,iow
      if(ndm.eq.1) return
      mct = 0
      th = atan(1.0d0)/45.0
100   if(ior.lt.0) write(*,5000)
      call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1000,err=101) ni,ne,inc,x0,y0
      go to 102
101   call perror('POLAR ',yyy)
      go to 100
102   if(ni.le.0) return
      if(ni.gt.numnp.or.ne.gt.numnp) go to 300
      inc = sign(max(abs(inc),1),ne-ni)
      if(ne.eq.0) ne = ni
      n = ni
200   r = x(1,n)
      x(1,n) = x0 + r*cos(x(2,n)*th)
      x(2,n) = y0 + r*sin(x(2,n)*th)
      if(mct.gt.0) go to 250
      if(prt) call prthed(iow)
      if(prt) write(iow,2000) x0,y0,(i,i=1,ndm)
      if(ior.lt.0.and.prt) write(*,2000) x0,y0,(i,i=1,ndm)
      mct = 50
250   if(prt) write(iow,2001) n,(x(i,n),i=1,ndm)
      if(ior.lt.0.and.prt) write(*,2001) n,(x(i,n),i=1,ndm)
      mct = mct - 1
      n = n + inc
      if((ne-n)*inc.ge.0) go to 200
      if(mod(ne-ni,inc).eq.0) go to 100
      ni = ne
      n = ne
      go to 200
c....error
300   write(iow,3000) ni,ne
      if(ior.lt.0) write(*,3000) ni,ne
      stop
c....formats
```



```
1000  format(3i10,2f10.0)
2000  format('    P o l a r   t o   C a r t e s i a n   C o o r d s.'/
     1 8x,'Center:x0 = ',e12.4,' y0 = ',e12.4/6x,'node',6(i7,'-coord'))
2001  format(i10,6f13.4)
3000  format(' **ERROR** attempt to convert nodes ni= ',i6,' - ne= ',i6)
5000  format(' Input:=1-node, 2-node, inc, x1(cent), x2(cent)'/3x,'>',$)
      end
c
      subroutine sblk(nr,ns,xl,ixl,shp,x,ix,dr,ds,ni,ne,ndm,nel1,
     1  nodinc,ntyp,nm,ma,prt)
      logical prt,ityp
      real   xl(3,1),x(ndm,1)
      real*8 shp(3,1),r,s,dr,ds,xsj
      integer*2 ixl(1),ix(nel1,1)
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /iofile/ ior,iow
      n = ni
      mct = 0
      s = -1.0
      do 200 j = 1,ns
      r = -1.0
      do 100 i = 1,nr
      call shape(r,s,xl,shp,xsj,3,nm,ixl,.true.)
      do 55 l = 1,ndm
        x(l,n) = 0.0
        do 50 k = 1,9
          m = ixl(k)
          if(m.gt.0) x(l,n) = x(l,n) + shp(3,m)*xl(l,m)
50      continue
55    continue
      if(prt) then
        mct = mct + 1
        if(mod(mct,50).eq.1) then
          call prthed(iow)
          write(iow,2000) (k,k=1,ndm)
          if(ior.lt.0) write(*,2000) (k,k=1,ndm)
        endif
        write(iow,2001) n,(x(k,n),k=1,ndm)
        if(ior.lt.0) write(*,2001) n,(x(k,n),k=1,ndm)
      endif
      n = n + 1
100   r = r + dr
      n = n + nodinc
200   s = s + ds
      if(ne.le.0) return
      me = ne - 1
      n = ni
      inc = 1
      if(ntyp.ge.8) inc = 2
      do 400 j = 1,ns-1,inc
      do 300 i = 1,nr-1,inc
      n = n + 1
      me = me + 1
      ix(nel1,me) = ma
      if(ntyp.eq.0) then
        ix(1,me)    = n - 1
```

```
          ix(2,me)    = n
          if(ndm.ne.1) then
             ix(3,me)    = n + nr + nodinc
             ix(4,me)    = n + nr - 1 + nodinc
          endif
       elseif(ntyp.ge.8) then
          ix(1,me) = n-1
          ix(5,me) = n
          ix(2,me) = n+1
          ix(8,me) = nr+nodinc + n-1
          if(ntyp.gt.8) ix(9,me) = nr+nodinc + n
          ix(6,me) = nr+nodinc + n+1
          ix(4,me) = 2*(nr+nodinc) + n-1
          ix(7,me) = 2*(nr+nodinc) + n
          ix(3,me) = 2*(nr+nodinc) + n+1
          n = n+1
       endif
300    continue
400    n = n + (inc-1) * nr + nodinc + 1
       return
2000   format(' N o d a l   C o o r d i n a t e s'//6x,'node',
     1     3(i7,' coord'))
2001   format(i10,3f13.4)
       end
c
       subroutine sethis(ie,ix,idl,ipd,nen,nen1,numel)
c....set up history addresses in ix array
       logical hfl,hout
       character*12 tfile
       integer*2 ie(9,1),ix(nen1,1),idl(1)
       double precision dm
       common /hdatb/ nhi,nhf,ihbuff,irec,jrec,nrec,hfl,hout
       common /psize/ maxm,ne
       common /temfl1/ tfile(6)
       common /temfl2/ itrec(4),nw1,nw2
       common dm(1)
       nh0 = (ne+ipd-1)/ipd
       nhi = nh0
       ihbuff = 8001 - nh0
       hfl    = .true.
       hout   = .false.
       irec   = 0
       nrec   = 1
c....determine buffer size needed for history terms
       ihmin  = 0
       ihdm   = 0
       do 50  nu = 1,numel
         n      = idl(nu)
         ihmin = ihmin + ie(8,ix(nen1,n))
         ihdm  = max(ihdm,ie(8,ix(nen1,n)))
50     continue
c....set the buffer length and record length to minimum possible
       ihbuff = min(ihbuff,ihmin)
       nhf    = nhi + ihbuff - 1
       ihbuff = ihbuff*8
c....set history area
```



```
       do 100 nu = 1,numel
       n      = idl(nu)
       nhinc = ie(8,ix(nen1,n))
       if(hfl .and.  nhinc.ne.0) then
         itrec(2) = ihbuff
         open(3,file=tfile(2),access='direct', status='new',
     1          form='unformatted',recl=itrec(2))
         close(3)
         hfl = .false.
         call pconsd(dm(nhi),ihbuff/8,0.0d0)
       endif
       if(nh0+nhinc .gt.  8000) then
         call phstio(3,nrec,dm(nhi),8000-nhi+1,2,tfile(2),itrec(2))
         nrec = nrec + 1
         nh0 = nhi
       endif
       ix(nen+1,n) = nh0
       ix(nen+2,n) = nrec
100    nh0 = nh0 + nhinc
c....check for errors and finish initialization
       if(nrec.gt.numel) then
         write(*,2000)
         call pdefil(tfile,2,2)
         stop
       elseif(nh0.gt.nhi) then
         call phstio(3,nrec,dm(nhi),nhf-nhi+1,2,tfile(2),itrec(2))
       else
         nrec = nrec - 1
       endif
       ne    = (nhf+1)*ipd + 1
       close(3)
       return
2000   format(' ** ERROR ** insufficient storage for history terms')
       end
```

15.8.3 ***Módulos de solución y salida de los macro comandos.*** La solución y la salida para cada problema está controlada por los subprogramas contenidos en los archivos PCMAC1.FOR, PCMAC2.FOR y PCMAC3.FOR.

(a) El archivo PCMAC1.FOR contiene el siguiente conjunto de subprogramas:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*
PMACR	SUBRUTINA	Controla la secuencia de macro solución
PINITC	SUBRUTINA	Hacer cero los parámetros de los macros
PMACIO	SUBRUTINA	Entrada y compilación de los macro comandos
PMACR1	SUBRUTINA	Controla la ejecución de los macro comandos de EF
PMACR2	SUBRUTINA	Controla otros macro comandos
FORMFE	SUBRUTINA	Prepara la llamada a los cálculos de vectores de EF
PHSTIO	SUBRUTINA	Entrada y salida de datos a disco

```
$NOFLOATCALLS
c
      subroutine pmacr (ul,xl,tl,ld,p,s,ie,d,id,x,ix,f,t,jd,f0,b,
     1  dr,ndf,ndm,nen1,nst,prt)
c....macro instruction subprograms
      logical fl,prt,hfl,hout
      integer*2 ld(1),ie(1),id(1),ix(1),jd(1),jct,lvs,lve,im
      real   ct(3,100),xl(1),tl(1),x(1),f(1),f0(1),t(1)
      real*8 d(1),ul(1),p(1),s(1),b(1),dr(1),dm,aengy,rnmax,prop
      character*4 wd(20),lct,tary*10,tfile*12
      common dm(1),rm(1),im(1)
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /fdata/ fl(11)
      common /hdatb/ nhi,nhf,ihbuff,irec,jrec,nrec,hfl,hout
      common /iofile/ ior,iow
      common /ldata/ l,lv,lvs(9),lve(9),jct(100)
      common /ldatb/ lct(100)
      common /ndata/ nv,nw
      common /rdata/ aengy,rnmax,tol,shift
      common /tdata/ ttim,dt,c1,c2,c3,c4,c5,c6
      common /temfl1/ tfile(6)
      common /temfl2/ itrec(4),nw1,nw2
      common /prlod/ prop,a(6,10),iexp(10),ik(10),npld
      data wd/'stre','tang','form','mass','reac','chec',
     1        'disp','solv','mesh','rest',
     2        'tol ','dt  ','loop','next','prop','data','time',
     2        'beta','newf',       'plot'/
c....nmi = no.  macro commands in 'pmacri'; nlp = loop number
      data nm1,nm2/10,9/
      nlp = nm1 + 3
c....set initial values of parameters
      call pinitc(aengy,rnmax,shift,tol,dt,prop,ttim,npld)
      nw1  = nm1
      nw2  = nm2 + nw1
```



```
      nneq = ndf*numnp
c....input the macro commands
100   call pmacio (jct,lct,ct,wd,nw2+1,nlp,ll)
      if(ll.le.0) go to 300
c....execute macro instruction program
      lv = 0
      l = 1
200   j = jct(l)
      i = l - 1
      call pctime (tary)
      if(l.ne.1.and.l.ne.ll) then
       write(iow,2001) i,wd(j),lct(l),(ct(k,l),k=1,3),tary
       if(ior.lt.0) write(*,2001) i,wd(j),lct(l),(ct(k,l),k=1,3),tary
      endif
      if(j.le.nw1) call pmacr1(id,ie,ix,ld,d,s,p,x,f,f0,t,jd,b,dr,
     1                         lct,ct,ndf,ndm,nen1,nst,nneq,prt,j)
      if(j.ge.nw1+1.and.j.le.nw2)
     1 call pmacr2(id,ix,f,f0,b,dr,lct,ct,ndf,nneq,j-nw1)
c....plot macro call
      if(j.eq.nw2+1) then
        call pplotf(x,ix,b,lct(l),ct(1,l),ndf,ndm,nen1,nneq)
      endif
      l = l + 1
      if(l.le.ll) go to 200
      if (ior.lt.0) go to 100
300   call pctime(tary)
      write(iow,2000) tary
      if(ior.lt.0) write(*,2000) tary
      if(.not.fl(4)) close(4,status='delete')
c....save restart information
      if(ll.lt.-1.or.fl(7)) close(3,status='delete')
      if(ll.lt.-1.or.fl(7)) return
      open (7,file=tfile(6),form='unformatted',status='new')
      rewind 7
      write(7) numnp,numel,nummat,ndm,ndf,nhi,nhf,nrec
      write(7) ttim,(b(i),i=1,3*nneq)
      if(fl(9)) write(7) (dm(i),i=nv,nv+2*neq)
      if(nrec.gt.0) then
        do 400 j = 1,nrec
          call phstio(3,j,dm(nhi),nhf-nhi+1,1,tfile(2),itrec(2))
          call phstio(7,j,dm(nhi),nhf-nhi+1,22,tfile(6),0)
400     continue
        call pdefil(tfile,2,2)
      endif
      close(7)
      return
c....formats
2000  format(' *End of macro execution*'/40x,'time=',a10)
2001  format(' *Macro ',i3,' *',2(a4,1x),
     1  'v1=',g10.3,' v2=',g10.3,' v3=',g10.3/40x,'time=',a10)
      end
c
      subroutine pinitc(engy,rnmx,shift,tol,dt,prop,ttim,npld)
      logical fl
      real*8 engy,rnmx,prop
      common /fdata/ fl(11)
```

```
      data zero,one,tolc/0.0,1.0,1.e-12/
c....set initial values of parameters
      npld  = 0
      engy  = zero
      rnmx  = zero
      shift = zero
      tol   = tolc
      dt    = zero
      prop  = one
      ttim  = zero
      do 50 i = 1,7
      fl(i+4) = .false.
50    fl(i)   = .true.
      return
      end
c
      subroutine pmacio (jct,lct,ct,wd,nwd,nlp,ll)
c....macro instruction input subprogram
      logical      pcomp
      integer*2    jct(1),js
      real         ct(3,1)
      character*4  wd(nwd),lct(1),clab1,clab2,ljs,tary*10,yyy*80
      common /iofile/ ior,iow
c....initiate the read of macro statements
      if(ior.gt.0) call prthed(iow)
      if(ior.gt.0) write(iow,2001)
c....read macro cards
      ll = 1
      jct(1) = nlp
      ct(1,1) = 1.0
100   if(ior.lt.0) then
       call pctime(tary)
       write(*,2002) tary,ll
      endif
      ll = ll + 1
      call pintio(yyy,15)
      read(yyy,1000,err=401) clab1,clab2,(ct(i,ll),i=1,3)
      if(ior.lt.0.and.pcomp(clab1,'help')) then
        call phelp(wd,nwd,'MACRO',1)
        ll = ll - 1
        go to 100
      endif
      if(ior.gt.0.and.pcomp(clab1,'end ')) go to 150
      if(ior.lt.0) then
        if(pcomp(clab1,'exit')) ll = -1
        if(pcomp(clab1,'q   ').or.pcomp(clab1,'quit')) ll = -2
        if(ll.lt.0) return
      endif
c....set execution flag
      lct(ll) = clab2
      do 110 j = 1,nwd
110   if(pcomp(clab1,wd(j))) go to 130
      call perror('PMACIO',yyy)
      ll = ll - 1
      go to 100
130   jct(ll) = j
```



```
      ll = ll + 1
150   jct(ll)= nlp+1
c....set loop markers
      j = 0
      do 200 l = 2,ll-1
        if(jct(l).eq.nlp)   j = j + 1
        if(j.gt.8) go to 400
        if(jct(l).eq.nlp+1) j = j - 1
        if(j.lt.0) go to 400
200   continue
      if(j.ne.0.and.ior.gt.0) go to 400
      if(j.ne.0.and.ior.lt.0) ll = ll - 1
      if(j.ne.0) go to 100
      do 230 l = 1,ll-1
        if(jct(l).ne.nlp) go to 230
        j = 1
        do 210 i = l+1,ll
          if(jct(i).eq.nlp) j = j + 1
          if(jct(i).eq.nlp+1) j = j - 1
          if(j.eq.0) go to 220
210     continue
        go to 400
220     ct(2,i) = l
        ct(2,l) = i
230   continue
      return
c....error messages
400   write(iow,4000)
      if(ior.gt.0) stop
      if(ior.lt.0) write(*,4000)
      go to 100
401   call perror('PMACIO',yyy)
      go to 100
1000  format(2(a4,11x),3f15.0)
2000  format(7x,a4,1x,a4,1x,3g12.5)
2001  format('  M a c r o   I n s t r u c t i o n s'// 2x,
     1'macro statement',2x,'variable 1',2x,'variable 2',2x,'variable 3')
2002  format(' Input a macro instruction, enter "exit" for restarts',
     1   ', "quit" to quit.'/3x,'Time = ',a10,' Macro',i3,'> ',$)
4000  format(' error in pmacio ** wrong loop/next order, or > 8 loops')
      end
c
      subroutine pmacr1(id,ie,ix,ld,d,s,p,x,f,f0,t,jd,b,dr,
     1                  lct,ct,ndf,ndm,nen1,nst,nneq,prt,j)
c....macro instruction subprograms
      logical fa,tr,fl,pcomp,prt,sflg,tflg,hfl,hout
      character lct(1)*4,tfile*12,tt*10,yyy*80
      integer*2 id(1),ie(1),ix(nen1,1),jd(1),ld(1),lvs,lve,jct,
     1          ia,im
      real    ct(3,1),x(1),f(1),f0(1),t(1)
      real*8 b(1),d(1),dr(1),s(1),p(1),dm,aa,aengy,rnorm,
     1 rnmax,dot,prop,eerror,elproj,ecproj,efem,enerr,ebar
      common /adata/ aa(1),ap(15998)
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /errind/ eerror,elproj,ecproj,efem,enerr,ebar
      common /fdata/ fl(11)
```

```
      common /frdata/ maxf
      common /hdatb/ nhi,nhf,ihbuff,irec,jrec,nrec,hfl,hout
      common /iofile/ ior,iow
      common /iofild/ iodr,iodw,ipd,ipr,ipi
      common /ldata/ l,lv,lvs(9),lve(9),jct(100)
      common /mdat2/ n11a,n11b,n11c,ia(2,11)
      common /ndata/ nv,nw
      common /prlod/ prop,a(6,10),iexp(10),ik(10),npld
      common /rdata/ aengy,rnmax,tol,shift
      common /tdata/ ttim,dt,c1,c2,c3,c4,c5,c6
      common /temfl1/ tfile(6)
      common /temfl2/ itrec(4),nw1,nw2
      common dm(1),rm(1),im(1)
      data zero,one/0.0,1.0/,fa,tr/.false.,.true./
c....transfer to correct process
      n1 = 1
      n3 = 1
      go to (1,2,3,4,5,6,5,2,9,10), j
c....print stress values
1     n1 = ct(1,1)
      n2 = ct(2,1)
      n3 = ct(3,1)
      n3 = max(n3,1)
      n4 = numnp - 1
      if (pcomp(lct(l),'node')) then
        n1 = max(1,min(numnp,n1))
        n2 = max(n1,min(numnp,n2))
        enerr = 0.0
        if(.not.fl(11)) then
          call pconsr(aa,8*numnp,0.0)
          call formfe(b,dr,fa,fa,fa,fa,8,1,numel,1)
          call pltstr(aa,ap(n4),numnp)
        endif
        call prtstr(aa,ap(n4),numnp,n1,n2,n3)
        fl(11) = tr
      elseif (pcomp(lct(l),'erro')) then
        n1 = max(n1,1)
        n2 = 8*numnp
        call pconsr(ap(n2-1),n2,0.0)
        enerr = 0.0
        do 110 i = 1,n1
          call pconsr(aa,n2,0.0)
          call formfe(b,dr,fa,fa,fa,fa,8,1,numel,1)
          call pltstr(aa,ap(n4),numnp)
          call addvec(ap(n2-1),ap(n4),n2-numnp)
110     continue
        fl(11) = tr
        eerror = 0.0
        eproj  = 0.0
        efem   = 0.0
        ebar   = 0.05*sqrt(enerr/numel)
        ietyp  = 1
        call formfe(b,dr,fa,fa,fa,fa,7,1,numel,1)
        call prterr
      else
        if(pcomp(lct(l),'all ')) then
```



```
          n2 = numel
        else
          n1 = max(1,min(numel,n1))
          n2 = max(n1,min(numel,n2))
        endif
        call formfe(b,dr,fa,fa,fa,fa,4,n1,n2,n3)
      endif
      return
c....form tangent stiffness
2     shft = c1
      sflg = fl(9)
      if(j.eq.2) then
        if(ct(1,1).ne.zero) then
          fl(8) = tr
          fl(7) = fa
          call pload(id,f,f0,dr,nneq,prop,dm(n1),dm(nw))
        endif
        shift= 0.
        tflg = tr
        if(.not.fl(9).and.ct(2,1).ne.zero) then
          if(fl(2)) then
            sflg = tr
            shift= ct(2,1)
            shft = -shift
            if(ior.lt.0) write(*,2006) shift
            write(iow,2006) shift
          else
            if(ior.lt.0) write(*,2007)
            write(iow,2007)
            if(ior.gt.0) stop
            return
          endif
        endif
      else
        if(.not.fl(8)) return
        fl(7) = .false.
        tflg  = .false.
      endif
c....call the solve routine to assemble and solve the tangent matrix
      na = maxf + 1
      nal= (maxf*(maxf+1))/2 + na
      call psolve(b,aa(na),aa,dr,aa(nal),dm(nl),s,ld,jd,im(n11c),nst,1,
     1            tflg,fl(8),sflg,shft,4,rnorm,aengy,1)
      call pctime(tt)
      if(fl(8)) then
        fl(8) = fa
        write(iow,2001) rnorm,tt
        if(ior.lt.0) write(*,2001) rnorm,tt
        if (rnmax.eq.0.0d0) rnmax = abs(aengy)
        write(iow,2004) rnmax,aengy,tol
        if(ior.lt.0) write(*,2004) rnmax,aengy,tol
        if(abs(aengy).le.tol*rnmax) then
          ct(1,lve(lv)) = ct(1,lvs(lv))
          l = lve(lv) - 1
        endif
        call update(id,f0,f,b,dm(nv),dm(nw),dr,nneq,neq,fl(9),prop,2)
```

```
      else
        write(iow,2002) tt
        if(ior.lt.0) write(*,2002) tt
      endif
      return
c....form out of balance force for time step/iteration
3     if(fl(8)) return
      call pload(id,f,f0,dr,nneq,prop,dm(nl),dm(nw))
      call formfe(b,dr,fa,tr,fa,fa,6,1,numel,1)
      rnorm = sqrt(dot(dr,dr,neq))
      write(iow,2003) rnorm
      if(ior.lt.0) write(*,2003) rnorm
      fl(8) = tr
      return
c....form a lumped mass approximation
4     if(fl(5)) call psetm(nl,neq,ipd,fl(5))
      call pconsd(dm(nl),neq,0.0d0)
      fl(2) = tr
      call formfe(b,dm(nl),fa,tr,fa,fa,5,1,numel,1)
      return
c....compute reactions and print
5     if(pcomp(lct(l),'all ')) then
        n2 = numnp
      else
        n1 = ct(1,l)
        n2 = ct(2,l)
        n3 = ct(3,l)
        n1 = max(1,min(numnp,n1))
        n2 = max(n1,min(numnp,n2))
        n3 = max(1,n3)
      endif
      if(j.eq.5) then
        call pconsd(dr,nneq,0.0d0)
        call formfe(b,dr,fa,tr,fa,tr,6,1,numel,1)
        call prtrea(dr,ndf,numnp,n1,n2,n3)
      else
        call prtdis(x,b,ttim,prop,ndm,ndf,n1,n2,n3)
      endif
      return
c....check mesh for input errors
6     call formfe(b,dr,fa,fa,fa,fa,2,1,numel,1)
      return
c....modify mesh data (cannot change profile of stiffness/mass)
9     i = -1
      call pmesh(ld,ie,d,id,x,ix,f,t,ndf,ndm,nen1,i,prt)
      if (i.gt.0) go to 400
      return
c....restart previously run problem
10    open (7,file=tfile(5),form='unformatted',status='old')
      read(7) nnpo,nnlo,nnmo,ndmo,ndfo,nhio,nhfo,nrco
      if((nnpo.eq.numnp).and.(nnlo.eq.numel).and.(nnmo.eq.nummat)
     1  .and.(ndmo.eq.ndm).and.(ndfo.eq.ndf).and.(nrco.eq.nrec)
     2  .and.(nhfo-nhio.eq.nhf-nhi) ) then
         read(7) ttim,(b(i),i=1,3*nneq)
         if(fl(9)) read(7) (dm(i),i=nv,nv+2*neq)
         if(nrec.gt.0) then
```



```
            do 101 j = 1,nrec
              call phstio(7,j,dm(nhi),nhf-nhi+1,11,tfile(5),0)
              call phstio(3,j,dm(nhi),nhf-nhi+1,2,tfile(2),itrec(2))
101         continue
          endif
          close(7)
        else
          if(ior.gt.0) write(iow,3001)
          if(ior.lt.0) write(  *,3001)
        endif
        return
c....error diagnostics
400     write(iow,4000)
        if(ior.gt.0) stop
        if(ior.lt.0) write(  *,4000)
        return
c....formats
2001    format('   residual norm = ',e15.7,6x,'time=',a10)
2002    format(40x,'time=',a10)
2003    format('   residual norm = ',e15.7)
2004    format('   energy convergence test'/'    maximum   =',e24.15/
     1    '    current   =',e24.15/'    tolerance =',e24.15)
2006    format('   shift of',e12.5,' applied with mass')
2007    format('   shift requested but no mass matrix exists.')
3001    format(' ** ERROR ** Data on restart file incompatible with',
     1         ' current problem.')
4000    format(' ** ERROR ** attempt to change profile during mesh')
        end
c
        subroutine pmacr2(id,ix,f,f0,b,dr,lct,ct,ndf,nneq,j)
c....macro instruction subprograms
        logical fl,pcomp,hfl,hout
        integer*2 id(1),ix(1),lvs,lve,jct,im
        real      f0(1),f(1),ct(3,1),xtl(2)
        real*8    b(1),dr(1),dm,aengy,rnmax,prop
        character*4 lct(1),ctl(2),yyy*80
        common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
        common /fdata/ fl(11)
        common /hdatb/ nhi,nhf,ihbuff,irec,jrec,nrec,hfl,hout
        common /iofile/ ior,iow
        common /iofild/ iodr,iodw,ipd,ipr,ipi
        common /ldata/ l,lv,lvs(9),lve(9),jct(100)
        common /ndata/ nv,nw
        common /prlod/ prop,a(6,10),iexp(10),ik(10),npld
        common /rdata/ aengy,rnmax,tol,shift
        common /tdata/ ttim,dt,c1,c2,c3,c4,c5,c6
        common dm(1),rm(1),im(1)
c....transfer to correct process
        go to (1,2,3,4,5,6,7,9), j
c....set solution tolerance
1       tol = ct(1,l)
        return
c....set time increment
2       dt = ct(1,l)
        if(fl(9)) call setci(ior)
        return
```

```
c....set loop start indicators
3     lv = lv + 1
      lvs(lv) = 1
      lve(lv) = ct(2,1)
      ct(1,lve(lv)) = 1.
      return
c....loop terminator control
4     n = ct(2,1)
      ct(1,1) = ct(1,1) + 1.0
      if(ct(1,1).gt.ct(1,n)) lv = lv - 1
      if(ct(1,1).le.ct(1,n)) l = n
      return
c....input proportional load table
5     npld = ct(1,1)
      prop = propld (ttim,npld)
      return
c....data command
6     if(ior.lt.0) write(*,3000) lct(l)
      call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1000,err=61) (ctl(i),i=1,2),(xtl(i),i=1,2)
      if(.not.pcomp(lct(l),ctl(1))) go to 402
      if(pcomp(ctl(1),'tol ')) tol = xtl(1)
      if(pcomp(ctl(1),'dt  ')) dt  = xtl(1)
      return
61    call perror('PMACR2',yyy)
      go to 6
c....increment time
7     ttim = ttim + dt
      if(npld.gt.0) prop = propld(ttim,0)
      write(iow,2002) ttim,prop
      if(ior.lt.0) write( *,2002) ttim,prop
      aengy = 0.0
      rnmax = 0.0
c....update history on the disk
      if(.not.hfl) then
        hout = .true.
        call formfe(b,dr,.false.,.false.,.false.,.false.,6,1,numel,1)
        hout = .false.
      endif
c....update dynamic vectors for time step
      if(fl(9)) then
        call setci(ior)
        call update(id,f0,f,b,dm(nv),dm(nw),dr,nneq,neq,fl(9),prop,1)
      endif
c....zero displacement increment for next time step
      call pconsd(b(nneq+1),nneq+nneq,0.0d0)
      fl(10) = .true.
      return
c....input integration parameters and initialize vectors
8     call param(ct(1,1))
      if(fl(9)) return
      call psetm(nv,neq*2,ipd,fl(9))
      nw = nv + neq
      fl(9) = .true.
      call pconsd(dm(nv),neq*2,0.0d0)
      return
```



```
c....update the current force vector f0
9     call saxpb(f,f0,prop,nneq, f0)
      return
c....error diagnostics
402   if(ior.gt.0) write(iow,4002)
      if(ior.gt.0)  stop
      if(ior.lt.0) write( *,4002)
      return
c....formats
1000  format(a4,6x,a4,6x,2f10.0)
2002  format('   computing solution for time',e12.5/
     1       '   proportional load value is ',e12.5)
3000  format(' Input ',a4,' macro >',\)
4002  format(' **ERROR** macro label mismatch on data command')
      end
c
      subroutine formfe(u,b,af,bf,cf,df,is,ne1,ne2,ne3)
c....form finite element arrays as required
      logical af,bf,cf,df,afl,bfl,cfl,dfl,hfl,hout
      integer*2 m,ia
      real*8 u(1),b(1),dm
      common /mdata/nn,n0,n1,n2,n3,n4,n5,n6,n7,n8,n9,n10,n11,n12,n13
      common /mdat2/ n11a,n11b,n11c,ia(2,11)
      common /sdata/ ndf,ndm,nen1,nst
      common /xdata/ isw,nn1,nn2,nn3,afl,bfl,cfl,dfl
      common dm(1),rm(1),m(1)
c....form appropriate f.e. array
      afl = af
      bfl = bf
      cfl = cf
      dfl = df
      isw = is
      nn1 = ne1
      nn2 = ne2
      nn3 = ne3
      call pform(dm(nn),rm(n0),rm(n1),m(n2),dm(n3),dm(n4),m(n5),dm(n6),
     1 m(n7),rm(n8),m(n9),rm(n10),rm(n11),m(n11c),rm(n13),u,b,ndf,
     2 ndm,nen1,nst)
      return
      end
c
      subroutine phstio(iu,irec,hh,nh,isw,tfile,itrec)
c....i/o control
      character*12 tfile
      real*8 hh(nh)
c....direct access read/write
      if(isw.lt.10) open(iu,file=tfile,access='direct',recl=itrec)
      if(isw.eq.1) read (iu,rec=irec) hh
      if(isw.eq.2) write(iu,rec=irec) hh
      if(isw.lt.10) close(iu)
c....sequential access read/write
      if(isw.eq.11) read (iu) hh
      if(isw.eq.22) write(iu) hh
      return
      end
```

(b) El archivo PCMAC2.FOR contiene el siguiente conjunto de subprogramas:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*
ADDVEC	SUBRUTINA	Sumar en un vector
JUST	SUBRUTINA	Alinear los datos para el procesador
MODIFY	SUBRUTINA	Modificar el vector de cargas para las c.c. en desplazamientos
PANGL	SUBRUTINA	Fijar los ángulos locales para rotación de GDL
PFORM	SUBRUTINA	Formar los vectores/matrices de EF
PLOAD	SUBRUTINA	Construir los vectores residuales de carga proporcional
PROPLD	FUNCION	Introducir o calcular valores de carga e inercia
PRTDIS	SUBRUTINA	Imprimir desplazamientos nodales
PRTERR	SUBRUTINA	Imprimir valores de estimación de error
PRTREA	SUBRUTINA	Imprimir reacciones nodales y sumas
PRTSTR	SUBRUTINA	Imprimir tensiones nodales
PTRANS	SUBRUTINA	Transformar vectores para contornos inclinados
SETCI	SUBRUTINA	Fijar los parámetros de integración temporal
UPDATE	SUBRUTINA	Actualizar los vectores solución

```
$NOFLOATCALLS
      subroutine addvec(a,b,nn)
      real a(1),b(1)
      do 100 n = 1,nn
        a(n) = a(n) + b(n)
100   continue
      return
      end
c
      subroutine just(y,k,n0)
c....complete the parser alignment of data
      character*1 y(k),yi,ze,ni,mi,pl,dt,sp
      data ze,ni,mi,pl,dt,sp/'0','9','-','+','.',' '/
      n1 = n0 - 1
      n2 = n1 - 1
      do 140 i = 1,k,n0
         do 100 j = i,i+n1
           if(y(j).ne.sp) go to 115
100      continue
         y(i+n1) = ze
115      if(y(i+n1).ne.sp) go to 140
         yi = y(i)
         if((yi.ge.ze.and.yi.le.ni).or.(yi.eq.mi).or.(yi.eq.pl)
     1    .or.(yi.eq.dt)) then
            do 110 j = i+n2,i,-1
               if(y(j).ne.sp) go to 120
110         continue
120         kl = n1 + i - j
            do 130 l = j,i,-1
```



```
              y(l+kl) = y(l)
              y(l) = sp
130         continue
          endif
140   continue
      return
      end
c
      subroutine modify(b,s,dul,nst)
c....modify for non-zero displacement boundary conditions
      real*8 b(1),s(nst,1),dul(1)
      do 100 i = 1,nst
      do 100 j = 1,nst
100   b(i) = b(i) - s(i,j)*dul(j)
      return
      end
c
      subroutine pangl(ix,nen,angl,angg,nrot)
c....set up table of rotation angles
      integer*2 ix(nen)
      real      angl(nen),angg(1)
      nrot = 0
      do 100 n = 1,nen
        angl(n) = 0.0
        ii = abs(ix(n))
        if (ii.gt.0) then
          angl(n) = angg(ii)
          if (angg(ii).ne.0.0) nrot = nrot + 1
        endif
100   continue
      return
      end
c
      subroutine param(ct)
c....set appropriate time integration parameters
      common /iofile/ ior,iow
      common /tbeta/ beta,gamm
      real ct(1)
      beta = ct(1)
      gamm = ct(2)
      if(beta.eq.0.0) beta = 0.25
      if(gamm.eq.0.0) gamm = 0.50
      write(iow,2000) beta,gamm
      if(ior.lt.0) write(*,2000) beta,gamm
      return
2000  format(' Newmark Method Parameters'/
     1       ' beta = ',f9.4,' ;  gamma = ',f9.4)
      end
c
      subroutine pform(ul,xl,tl,ld,p,s,ie,d,id,x,ix,f,t,idl,
     1                 f0,u,b,ndf,ndm,nen1,nst)
c....compute element arrays and assemble global arrays
      integer*2 ld(ndf,1),ie(9,1),id(ndf,1),ix(nen1,1),idl(1),ia,im
      real      xl(ndm,1),x(ndm,1),f(ndf,1),f0(ndf,1),tl(1),t(1)
      real*8    d(18,1),p(1),s(nst,1),b(1),ul(ndf,1),u(ndf,1),dm,
     1          dun,un,prop
```

```
      logical afl,bfl,cfl,dfl,efl,hfl,hout
      character*12 tfile
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /eldata/ dq,n,ma,mct,iel,nel
      common /mdat2/ n11a,n11b,n11c,ia(2,11)
      common /hdata/ nh1,nh2
      common /hdatb/ nhi,nhf,ihbuff,irec,jrec,nrec,hfl,hout
      common /prlod/ prop,ap(6,10),iexp(10),ik(10),npld
      common /temfl1/ tfile(6)
      common /temfl2/ itrec(4),nw1,nw2
      common /xdata/ isw,nn1,nn2,nn3,afl,bfl,cfl,dfl
      common dm(1),rm(1),im(1)
c....set up local arrays before calling element library
      iel = 0
      efl = .false.
      if(.not.dfl.and.isw.eq.6) efl = .true.
      if(bfl.and.isw.eq.3)      efl = .true.
      if(isw.ne.3.or.nn1.eq.1)  irec = 0
      ne2 = nen + nen
      ne3 = nen + ne2
      numnp2 = numnp + numnp
      do 110 nu = 1,numel
       n = idl(nu)
       if((n.ge.nn1 .and. n.le.nn2) .and. (mod(n-nn1,nn3).eq.0)) then
c....set up history terms
         ma  = ix(nen1,n)
         nh1 = ix(nen+1,n)
         nh2 = nh1
         if(.not.hfl) then
           jrec= ix(nen+2,n)
           if(jrec.ne.irec) then
             if(hout .and.  irec.ne.0) then
               call phstio(3,irec,dm(nhi),nhf-nhi+1,2,tfile(2),itrec(2))
             endif
             call phstio(3,jrec,dm(nhi),nhf-nhi+1,1,tfile(2),itrec(2))
             irec = jrec
           endif
         endif
         call pconsd(ul,4*nen*ndf,0.0d0)
         call pconsr(xl,nen*ndm,0.0)
         call pconsr(tl,nen,0.0)
         call pconsr(rm(n11a),nen,0.0)
         call pconsi(ld,nst,0)
         un = 0.0
         dun= 0.0
         call pangl(ix(1,n),nen,rm(n11a),rm(n11b),nrot)
         do 108 i = 1,nen
           ixi= ix(i,n)
           ii = abs(ixi)
           if(ii.ne.0) go to 105
           do 104 j = 1,ndf
104        ld(j,i) = 0
           go to 108
105        iid = ii*ndf - ndf
           nel = i
           tl(i) = t(ii)
           do 106 j = 1,ndm
106        xl(j,i) = x(j,ii)
           do 107 j = 1,ndf
             jj = ie(j,ma)
             if(jj.le.0) go to 107
             k = id(jj,ii)
             ul(j,i) = u(jj,ii)
             ul(j,i+nen) = u(jj,ii+numnp)
             ul(j,i+ne2) = u(jj,ii+numnp2)
             if(k.le.0) ul(j,i+ne3) = f0(jj,ii) + f(jj,ii)*prop
     1                              - u(jj,ii)
             dun = max(dun,abs(ul(j,i+ne3)))
             un  = max( un,abs(ul(j,i)))
             if(dfl) then
               ld(j,i) = iid + jj
             else
               ld(j,i) = k
               if(ixi.lt.0) ld(j,i) = -k
             endif
107        continue
108      continue
c....  form element array
         if(ie(7,ma).ne.iel) mct = 0
         iel = ie(7,ma)
         isx = isw
         if(efl .and.  dun.gt.0.0000001d0*un .and.  .not.afl) isx = 3
         if(nrot.gt.0)
     1   call ptrans(ia(1,iel),rm(n11a),ul,p,s,nel,nen,ndf,nst,1)
         call elmlib(d(1,ma),ul,xl,ix(1,n),tl,s,p,ndf,ndm,nst,iel,isx)
         if(nrot.gt.0)
     1   call ptrans(ia(1,iel),rm(n11a),ul,p,s,nel,nen,ndf,nst,2)
c....modify for non-zero displacement boundary conditions
         if(efl) call modify(p,s,ul(1,ne3+1),nst)
c....assemble a vector if needed
         if(bfl) then
           do 109 i = 1,nst
             j = abs(ld(i,1))
             if(j.ne.0) b(j) = b(j) + p(i)
109        continue
         endif
       endif
110   continue
c....put the last history state on the disk
      if(hout) call phstio(3,jrec,dm(nhi),nhf-nhi+1,2,tfile(2),itrec(2))
      return
      end
c
      subroutine pload(id,f,f0,b,nn,p,xm,ac)
c....form load vector in compact form
      logical fl,pfr
      integer*2 id(1)
      real f(1),f0(1)
      real*8 b(1),p,xm(1),ac(1)
      common /fdata/ fl(11),pfr
      fl(11) =  .false.
      call pconsd(b,nn,0.0d0)
```

```
      do 100 n = 1,nn
      j = id(n)
      if(j.gt.0) then
        b(j) = f(n)*p + f0(n) + b(j)
        if(fl(9)) b(j) =  b(j) - xm(j)*ac(j)
      endif
100   continue
      return
      end
c
      function propld(t,j)
c....proportional load table (j load cards, maximum 10)
      real*8 prop
      character*80 yyy
      common /iofile/ ior,iow
      common /prlod/ prop,a(6,10),iexp(10),ik(10),npld
      if(j.le.0) go to 200
c....input table of proportional loads
      write(iow,2000)
      if(ior.lt.0) then
        write( *,2000)
        write( *,2003)
      endif
      do 100 i=1,j
101   call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1000,err=102) ik(i),iexp(i),(a(m,i),m=1,6)
      go to 103
c....error message
102   call perror('PROPLD',yyy)
      go to 101
c....set a default ramp table if a type "0" input
103   if(ik(i).eq.0) then
        a(2,i) = 1.e+6
        a(4,i) = 1.
      endif
      write(iow,2001) i,ik(i),(a(m,i),m=1,6),iexp(i)
      if(ior.lt.0) write(*,2001) i,ik(i),(a(m,i),m=1,6),iexp(i)
100   continue
      nprop = j
c....compute value at time t
200   propld = 0.0
      do 220 i = 1,nprop
        tmin = a(1,i)
        tmax = a(2,i)
        if(t.lt.tmin.or.t.gt.tmax) go to 220
        l = max(iexp(i),1)
        propld = a(3,i)+a(4,i)*t+ a(5,i)*(sin(a(6,i)*t+tmin))**l
     1          + propld
220   continue
      return
c....formats
1000  format(2i10,6f10.0)
2000  format(30x,'P r o p o r t i o n a l   L o a d   T a b l e')
2001  format(/,' number    type        tmin',10x,'tmax',/i3,i10,7x,g10.4,
     1 4x,g10.4,/6x,'a(1)',10x,'a(2)',10x,'a(3)',10x,'a(4)',10x,
     2 'exp',/4x,4(g10.4,4x),i5/)
2003  format(' Input:  type, exponent, tmin, tmax, a(i),i=1,4'/' >',$)
      end
c
      subroutine prtdis(x,b,ttim,prop,ndm,ndf,n1,n2,n3)
c...output nodal displacement values
      real      x(ndm,1)
      real*8    b(ndf,1),prop
      character*4 cd*6,di*6
      common /iofile/ ior,iow
      data cd/' coord'/,di/' displ'/
      kount = 0
      do 100 n = n1,n2,n3
      kount = kount - 1
      if(kount.le.0) then
      call prthed(iow)
      write(iow,2000) ttim,prop,(i,cd,i=1,ndm),(i,di,i=1,ndf)
      if(ior.lt.0) write(*,2000) ttim,prop,(i,cd,i=1,ndm),(i,di,i=1,ndf)
      kount = 48
      endif
      if(x(1,n).ne.  -999.)  then
        write(iow,2001) n,(x(i,n),i=1,ndm),(b(i,n),i=1,ndf)
        if(ior.lt.0) write(*,2001) n,(x(i,n),i=1,ndm),(b(i,n),i=1,ndf)
      else
        write(iow,2002) n
        if(ior.lt.0) write(*,2002) n
      endif
100   continue
      return
2000  format('  N o d a l   D i s p l a c e m e n t s',5x,
     1  'time',e18.5/31x,'prop.  ld.  (eigenvalue)',e13.5//
     2  '  node',9(i7,a6))
2001  format(i6,1p9e13.6)
2002  format(i6,' not input.')
      end
c
      subroutine prterr
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      common /iofile/ ior,iow
      common /errind/ eerror,elproj,ecproj,efem,enerr,ebar
c....output the error indicator values
      elrind = 0.0
      ecrind = 0.0
      if(elproj.ne.0.0d0) elrind = sqrt((efem-elproj)/elproj)
      if(ecproj.ne.0.0d0) ecrind = sqrt((efem-ecproj)/ecproj)
      if(ecproj.ne.0.0d0) eerror = sqrt(eerror/ecproj)
      write(iow,2000) efem,elproj,ecproj,elrind,ecrind,eerror
      if(ior.lt.0)write(*,2000) efem,elproj,ecproj,elrind,ecrind,eerror
2000  format(/'     Finite Element Stress Measure              =',e15.8/
     1          '     L u m p e d  Projected Stress Measure       =',e15.8/
     2          '     Consistent   Projected Stress Measure       =',e15.8/
     3          '     L u m p e d  Error Indicator                =',e15.8/
     4          '     Consistent   Error Indicator                =',e15.8/
     5          '     Direct Error Indicator                      =',e15.8/)
      return
      end
c
```

```
      subroutine prtrea(r,ndf,numnp,n1,n2,n3)
c....print nodal reactions
      real*8      rr(6),r(ndf,1),rsum(6),asum(6),psum(6)
      common /iofile/ ior,iow
      call pconsd(rsum,ndf,0.0d0)
      call pconsd(psum,ndf,0.0d0)
      call pconsd(asum,ndf,0.0d0)
      do 75 i = 1,numnp
      do 75 k = 1,ndf
      rsum(k) = rsum(k) - r(k,i)
75    asum(k) = asum(k) + abs(r(k,i))
      kount = 0
      do 100 n = n1,n2,n3
      kount = kount - 1
      if(kount.le.0) then
        call prthed(iow)
        write(iow,2000) (k,k=1,ndf)
        if(ior.lt.0) write(*,2000) (k,k=1,ndf)
        kount = 50
      endif
      do 80 k = 1,ndf
      rr(k) = -r(k,n)
80    psum(k) = psum(k) + rr(k)
      write(iow,2001) n,(rr(k),k=1,ndf)
      if(ior.lt.0) write(*,2001) n,(rr(k),k=1,ndf)
100   continue
c....print statics check
      write(iow,2002) (rsum(k),k=1,ndf)
      write(iow,2003) (psum(k),k=1,ndf)
      write(iow,2004) (asum(k),k=1,ndf)
      if(ior.lt.0) then
        write(*,2002) (rsum(k),k=1,ndf)
        write(*,2003) (psum(k),k=1,ndf)
        write(*,2004) (asum(k),k=1,ndf)
      endif
      return
2000  format('  N o d a l    R e a c t i o n s'//6x,'node',6(i9,' dof'))
2001  format(i10,6e13.4)
2002  format(/7x,'sum',6e13.4)
2003  format( 3x,'prt sum',6e13.4)
2004  format( 3x,'abs sum',6e13.4)
      end
c
      subroutine prtstr(dt,ds,numnp,n1,n2,n3)
c....output projected nodal stress values
      real dt(numnp),ds(numnp,7)
      common /iofile/ ior,iow
      kount = 0
      do 200 n = n1,n2,n3
      kount = kount - 1
      if(kount.le.0) then
        call prthed(iow)
        write(iow,2000)
        if(ior.lt.0) write(*,2000)
        kount = 17
      endif
```



```
      write(iow,2001) n,(ds(n,i),i=1,7),dt(n)
      if(ior.lt.0) write(*,2001) n,(ds(n,i),i=1,7),dt(n)
200   continue
      return
2000  format('   N o d a l   S t r e s s e s'//' node',4x,'11-stress',4x,
     1 '12-stress',4x,'22-stress',4x,'33-stress'/10x,'1-stress',5x,
     2 '2-stress',4x,'max-shear',8x,'angle')
2001  format(i5,4e13.5/5x,4e13.5/1x)
      end
c
      subroutine ptrans(ia,angl,ul,p,s,nel,nen,ndf,nst,isw)
c....subroutine to make two-dimesional rotations
      integer*2 ia(2)
      real      angl(1)
      real*8    ul(ndf,nen,1),p(ndf,1),s(nst,nst),ang,cs,sn,tm
c....recover dof to be rotated
      ij1 = ia(1)
      ij2 = ia(2)
      go to (1,2), isw
c....transform the displacement quantities to element coordinates
1     i1 = 0
      do 110 i = 1,nel
        if(angl(i).ne.0.0) then
          ang = angl(i)*3.1415926d0/180.
          cs  = cos(ang)
          sn  = sin(ang)
          do 100 j = 1,4
            tm         = cs*ul(ij1,i,j) - sn*ul(ij2,i,j)
            ul(ij2,i,j) = sn*ul(ij1,i,j) + cs*ul(ij2,i,j)
            ul(ij1,i,j) = tm
100       continue
        endif
110   i1 = i1 + ndf
      return
c....transform the element arrays to global coordinates
2     i1 = 0
      do 220 i = 1,nel
        if(angl(i).ne.0.0) then
          ang = angl(i)*3.1415926d0/180.
          cs  = cos(ang)
          sn  = sin(ang)
c....transform load vector
          tm      = cs*p(ij1,i) + sn*p(ij2,i)
          p(ij2,i) =-sn*p(ij1,i) + cs*p(ij2,i)
          p(ij1,i) = tm
c....postmultiply s by the transformation
          do 210 j = 1,nst
            tm          = s(j,i1+ij1)*cs + s(j,i1+ij2)*sn
            s(j,i1+ij2)=-s(j,i1+ij1)*sn + s(j,i1+ij2)*cs
            s(j,i1+ij1)= tm
210       continue
c....premultiply s by the transformation
          do 215 j = 1,nst
            tm          = cs*s(i1+ij1,j) + sn*s(i1+ij2,j)
            s(i1+ij2,j)=-sn*s(i1+ij1,j) + cs*s(i1+ij2,j)
            s(i1+ij1,j)= tm
```

```
215       continue
        endif
220   i1 = i1 + ndf
      return
      end
c
      subroutine setci(ior)
c....compute integration constants 'c1' to 'c5' for current 'dt'
      common /tbeta/ beta,gamm
      common /tdata/ ttim,dt,c1,c2,c3,c4,c5,c6
      if(dt.le.0.0 .or.  beta.le.0.0) then
        write(*,2000) dt,beta
        if(ior.gt.0) stop
        return
      endif
c....compute integration constants 'c1' to 'c5' for current 'dt'
      c1 = 1.d0/(beta*dt*dt)
      c2 = gamm/(dt*beta)
      c3 = 1.d0 - 1.d0/(beta+beta)
      c4 = 1.d0 - gamm/beta
      c5 = (1.d0 - gamm/(beta+beta))*dt
      c6 = dt*c1
      return
2000  format(' ** ERROR **  A dynamic solution parameter is zero'/
     1       '              dt = ',1pe10.3,' , beta = ',0p1f9.4/
     2       '              Reinput dt or beta as nonzero number.')
      end
c
      subroutine update(id,f0,f,u,v,a,du,nneq,neq,fdyn,prop,isw)
c....update the displacements (and velocities and accelerations)
      logical fdyn
      integer*2 id(1)
      real      f0(1),f(1)
      real*8    u(nneq,1),v(1),a(1),du(1),ur1,ur2,prop,dot
      common /iofile/ ior,iow
      common /tdata/ ttim,dt,c1,c2,c3,c4,c5,c6
c....update solution vectors to begin a step
      if(isw.eq.1) then
        ur1 = sqrt(dot(v,v,neq))
        ur2 = sqrt(dot(a,a,neq))
        write(iow,2000) ur1,ur2
        if(ior.lt.0) write(*,2000) ur1,ur2
        do 100 n = 1,neq
          ur2  = - c6*v(n) + c3*a(n)
          v(n) =   c4*v(n) + c5*a(n)
          a(n) =   ur2
100     continue
      elseif(isw.eq.2) then
c....update displacement and its increments within the time step
        do 200 n = 1,nneq
          j = id(n)
          if (j.gt.0) then
c....for the active degrees-of-freedom compute values from solution
            u(n,1) = du(j) + u(n,1)
            u(n,2) = du(j) + u(n,2)
            u(n,3) = du(j)
          else
c....for the fixed degrees-of-freedom compute values from forced inputs
            ur1    = f0(n) + f(n)*prop
            u(n,3) = ur1 - u(n,1)
            u(n,2) = ur1 - u(n,1) + u(n,2)
            u(n,1) = ur1
          endif
200     continue
c....for time dependent solutions update the rate terms
        if(fdyn) then
          do 210 n = 1,neq
            v(n) = v(n) + c2*du(n)
            a(n) = a(n) + c1*du(n)
210       continue
        endif
      endif
      return
2000  format('  N o r m s   f o r   D y n a m i c s'/
     1  10x,'Velocity:',e13.5,' Acceleration:',e13.5)
      end
```

(c) El archivo PCMAC3.FOR contiene el siguiente conjunto de subprogramas:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*
ACHECK	SUBRUTINA	Procesador de datos alfanuméricos
CKISOP	SUBRUTINA	Comprobación de elementos isoparamétricos
DOT	FUNCION	Producto escalar de vectores (DOBLE PRECISIÓN)
ELMLIB	SUBRUTINA	Librería de elementos
PCONSD	SUBRUTINA	Igualar un vector en doble precisión a una constante
PCONSI	SUBRUTINA	Igualar un vector entero a una constante
PCONSR	SUBRUTINA	Igualar un vector real a una constante
PDISK	SUBRUTINA	Añadir el carácter de un disco a un nombre de archivo (c:, etc.)
PEND	SUBRUTINA	Imprimir error al leer el final de archivo
PERROR	SUBRUTINA	Imprimir por error de lectura
PGAUSS	SUBRUTINA	Posiciones/pesos de puntos de Gauss para problemas bidimensionales
PHELP	SUBRUTINA	Imprimir información de ayuda al usuario
PSETM	SUBRUTINA	Gestión de datos con alineamiento de bites
PSTRES	SUBRUTINA	Determinación de tensiones principales en dos dimensiones
SAXPB	SUBRUTINA	Escalar por vector más vector
SHAP2	SUBRUTINA	Determinación de funciones de forma cuadráticas
SHAPE	SUBRUTINA	Determinación de funciones forma lineales

```
$NOFLOATCALLS
      subroutine acheck(x,y,n0,nl)
c....data parser
      character*1 x(nl),y(nl)
      do 100 ii = nl,1,-1
         if(x(ii).ne.' ') go to 110
100   continue
110   do 150 i = 1,nl
         y(i) = ' '
150   continue
      k = 0
      il= 0
      do 200 i = 1,ii
      if(x(i).eq.',') then
         k  = k + n0
         if(k.gt.nl-n0) go to 210
         il = k - i
      else
         y(i+il) = x(i)
      endif
200   continue
```



```
      k  = k + n0
210   call just(y,k,n0)
      do 220 i = n0,nl,n0
        if(y(i).eq.' ')  y(i) = '0'
220   continue
      return
      end
c
      subroutine ckisop(ix,xl,shp,ndm)
c....check isoparametric elements
      integer*2 xn(9),yn(9),ic(18),ix(1)
      real   xl(ndm,1)
      real*8 shp(3,1),ss,tt,xsj
      common /eldata/ dm,n,ma,mct,iel,nel
      common /iofile/ ior,iow
      data xn/-1,1,1,-1,0,1,0,1,0/, yn/-1,-1,1,1,-1,0,1,0,0/
c....check the element for input errors
      ineg = 0
      do 100 l = 1,nel
        if(xl(1,l).eq.  -999.0 .and.  ix(l).ne.0) then
          ic(ineg+1) = l
          ic(ineg+2) = abs(ix(l))
          ineg = ineg + 2
        endif
100   continue
      if(ineg.gt.0) then
        write(iow,2000) n,(ic(i),i=1,ineg)
        if(ior.lt.0) write(*,2000) n,(ic(i),i=1,ineg)
      else
        do 110 l = 1,nel
          ss = xn(l)
          tt = yn(l)
          call  shape (ss,tt,xl,shp,xsj,ndm,nel,ix,.false.)
          if(xsj.le.0.0d0) then
            ic(ineg+1) = l
            ic(ineg+2) = abs(ix(l))
            ineg = ineg + 2
          endif
  110   continue
        if(ineg.gt.0) then
          write(iow,2001) n,(ic(i),i=1,ineg)
          if(ior.lt.0) write(*,2001) n,(ic(i),i=1,ineg)
        endif
      endif
      return
2000  format(' >Element',i4,' coordinates not input for nodes:'/
     1      ('                Local =',i3,' Global =',i4))
2001  format(' >Element',i4,' has negative jacobian at nodes:'/
     1      ('                Local =',i3,' Global =',i4))
      end
c
      double precision function dot (a,b,n)
      real*8 a(1),b(1)
c....  dot product function
      dot = 0.0d0
      do 10 k=1,n
```

```
          dot = dot + a(k)*b(k)
   10 continue
      return
      end
c
      subroutine elmlib(d,u,x,ix,t,s,p,i,j,k,iel,isw)
c....element library
      real*8 d(1),p(1),s(1),u(1)
      real   x(1),t(1)
      integer*2 ix(1)
      common /iofile/ ior,iow
c....total elmts loaded ----+
c                           V
      if(iel.ge.1.and.iel.le.4) then
        if(isw.ge.3.and.isw.le.6) then
          call pconsd(p,k,0.0d0)
          call pconsd(s,k*k,0.0d0)
        endif
        if(iel.eq.1) then
          call elmt01(d,u,x,ix,t,s,p,i,j,k,isw)
        elseif(iel.eq.2) then
          call elmt02(d,u,x,ix,t,s,p,i,j,k,isw)
        elseif(iel.eq.3) then
          call elmt03(d,u,x,ix,t,s,p,i,j,k,isw)
        elseif(iel.eq.4) then
          call elmt04(d,u,x,ix,t,s,p,i,j,k,isw)
        endif
      else
400   write(iow,4000) iel
      if(ior.lt.0) write(*,4000) iel
      stop
      endif
      return
4000  format('  **ERROR** Element type number',i3,' found.')
      end
c
      subroutine pconsd(v,nn,cc)
c....zero real*8 array
      real*8 v(nn),cc
      do 100 n = 1,nn
100   v(n) = cc
      return
      end
c
      subroutine pconsi(iv,nn,ic)
c....zero integer*2 array
      integer*2 iv(nn),ic
      do 100 n = 1,nn
100   iv(n) = ic
      return
      end
c
      subroutine pconsr(v,nn,cr)
c....zero real array
      real v(nn)
      do 100 n = 1,nn
```



```
100   v(n) = cr
      return
      end
c
      subroutine pdisk(disk,files)
c....set disk name character
      character*1 disk,files(1)
      files(1) = disk
      return
      end
c
      subroutine pend(subnam)
      character*6 subnam
      common /iofile/ ior,iow
      write(iow,4000) subnam
      if(ior.lt.0) write(*,4000) subnam
      stop
4000  format(' ** ERROR in ',a6,' ** end of file encountered')
      end
c
      subroutine perror(subnam,yy)
      character*80 yy,subnam*6
      common /iofile/ ior,iow
      write(iow,4000) subnam,yy
      if(ior.gt.0) stop
      write(*,4000) subnam
      return
4000  format(' ** ERROR in ',a6,' ** reinput last record:'/1x,a80)
      end
c
      subroutine pgauss(l,lint,r,z,w)
c....gauss points and weights for two dimensions
      integer*2 lr(9),lz(9),lw(9)
      real*8 r(1),z(1),w(1),g,h
      common /eldata/ dm,n,ma,mct,iel,nel
      data lr/-1,1,1,-1,0,1,0,-1,0/,lz/-1,-1,1,1,-1,0,1,0,0/
      data lw/4*25,4*40,64/
      lint = l*l
      go to (1,2,3),l
c....1x1 integration
1     r(1) = 0.
      z(1) = 0.
      w(1) = 4.
      return
c....2x2 integration
2     g = 1.0/sqrt(3.d0)
      do 21 i = 1,4
      r(i) = g*lr(i)
      z(i) = g*lz(i)
21    w(i) = 1.
      return
c....3x3 integration
3     g = sqrt(0.60d0)
      h = 1.0/81.0d0
      do 31 i = 1,9
      r(i) = g*lr(i)
```

```
      z(i) = g*lz(i)
31    w(i) = h*lw(i)
      return
      end
c
      subroutine phelp(wd,nwd,wrd,isw)
      character wd(nwd)*4,wrd*5
      common /iofile/ ior,iow
c....help file for macro command list
      if(ior.gt.0) return
      if(isw.eq.1) write(*,2000)
      if(isw.ne.1) write(*,2001) wrd
      write(*,2002) wd
      write(*,2003) wrd
      return
2000  format(//' The following macro commands are available'//
     1        ' use of loop must terminate with a matching next'//
     2        ' multiple loop-next pairs may occur up to depth of 8')
2001  format(//' The following ',a5,'commands are available:')
2002  format(/8(3x,a4))
2003  format(/' Terminate ',a5,' execution with an "end" command.')
      end
c
      subroutine psetm(na,nl,np,afl)
      logical afl
      common /iofile/ ior,iow
      common /psize/ maxm,ne
c....set data management pointers for arrays
      na = ne
      ne = na + nl*np + mod(4 - mod(nl*np,4),4)
      na   = (na + np - 1)/np - max(0,6-(np-1)*4)
      afl = .false.
      amx = maxm
      amx = ne/amx
      if(amx.gt.0.90) write(*,1001) ne,maxm,amx
      if(ne.le.maxm) return
      write(iow,1000) ne,maxm
      if(ior.lt.0) write(*,1000) ne,maxm
      stop
1000  format(2x,'**ERROR** insufficient storage in blank common'/
     1   10x,'required  =',i6/10x,'available =',i6/)
1001 format('  **Memory warning** used =',i6,' avail=',i6,' % =',f6.3)
      end
c
      subroutine pstres(sig,p1,p2,p3)
c....principal stresses (2 dimensions): sig = tau-xx,tau-xy,tau-yy
      real*8 sig(3),p1,p2,p3,xi1,xi2,rho
      xi1 = (sig(1) + sig(3))/2.
      xi2 = (sig(1) - sig(3))/2.
      rho = sqrt(xi2*xi2 + sig(2)*sig(2))
      p1 = xi1 + rho
      p2 = xi1 - rho
      p3 = 45.0
      if(xi2.ne.0.0d0) p3 = 22.5*atan2(sig(2),xi2)/atan(1.0d0)
      return
      end
```



```
c
      subroutine saxpb (a,b,x,n,c)
      real*8 a(1),b(1),c(1),x
c...vector times scalar added to second vector
      do 10 k=1,n
        c(k) = a(k)*x +b(k)
   10 continue
      return
      end
c
      subroutine shap2(s,t,shp,ix,nel)
c....add quadratic functions as necessary
      real*8    shp(3,1),s,t,s2,t2
      integer*2 ix(1)
      s2 = (1.-s*s)/2.
      t2 = (1.-t*t)/2.
      do 100 i=5,9
      do 100 j = 1,3
100   shp(j,i) = 0.0
c....midside nodes (serendipity)
      if(ix(5).eq.0) go to 101
      shp(1,5) = -s*(1.-t)
      shp(2,5) = -s2
      shp(3,5) = s2*(1.-t)
101   if(nel.lt.6) go to 107
      if(ix(6).eq.0) go to 102
      shp(1,6) = t2
      shp(2,6) = -t*(1.+s)
      shp(3,6) = t2*(1.+s)
102   if(nel.lt.7) go to 107
      if(ix(7).eq.0) go to 103
      shp(1,7) = -s*(1.+t)
      shp(2,7) = s2
      shp(3,7) = s2*(1.+t)
103   if(nel.lt.8) go to 107
      if(ix(8).eq.0) go to 104
      shp(1,8) = -t2
      shp(2,8) = -t*(1.-s)
      shp(3,8) = t2*(1.-s)
c....interior node (lagrangian)
104   if(nel.lt.9) go to 107
      if(ix(9).eq.0) go to 107
      shp(1,9) = -4.*s*t2
      shp(2,9) = -4.*t*s2
      shp(3,9) = 4.*s2*t2
c....correct edge nodes for interior node (lagrangian)
      do 106 j= 1,3
      do 105 i = 1,4
105   shp(j,i) = shp(j,i) - 0.25*shp(j,9)
      do 106 i = 5,8
106   if(ix(i).ne.0) shp(j,i) = shp(j,i) - .5*shp(j,9)
c....correct corner nodes for presense of midside nodes
107   do 108 i = 1,4
      k = mod(i+2,4) + 5
      l = i + 4
      do 108 j = 1,3
```

```
108   shp(j,i) = shp(j,i) - 0.5*(shp(j,k)+shp(j,l))
      return
      end
c
      subroutine shape(ss,tt,xl,shp,xsj,ndm,nel,ix,flg)
c....shape function routine for two dimensional elements
      logical flg
      real    xl(ndm,1),s(4),t(4)
      real*8 shp(3,1),xs(2,2),sx(2,2),ss,tt,xsj,tp
      integer*2 ix(1)
      data s/-.5,.5,.5,-.5/, t/-.5,-.5,.5,.5/
c....form 4-node quadrilateral shape functions
      do 100 i = 1,4
        shp(3,i) = (0.5+s(i)*ss)*(0.5+t(i)*tt)
        shp(1,i) = s(i)*(0.5+t(i)*tt)
        shp(2,i) = t(i)*(0.5+s(i)*ss)
100   continue
      if(nel.eq.3) then
c....form triangle by adding third and fourth together
        do 110 i = 1,3
110     shp(i,3) = shp(i,3)+shp(i,4)
      endif
c....add quadratic terms if necessary
      if(nel.gt.4) call shap2(ss,tt,shp,ix,nel)
c....construct jacobian and its inverse
      do 125 i = 1,2
      do 125 j = 1,2
        xs(i,j) = 0.0
        do 120 k = 1,nel
          xs(i,j) = xs(i,j) + xl(i,k)*shp(j,k)
120     continue
125   continue
      xsj = xs(1,1)*xs(2,2)-xs(1,2)*xs(2,1)
      if(flg) return
      if(xsj.le.0.0d0) xsj = 1.0
      sx(1,1) = xs(2,2)/xsj
      sx(2,2) = xs(1,1)/xsj
      sx(1,2) =-xs(1,2)/xsj
      sx(2,1) =-xs(2,1)/xsj
c....form global derivatives
      do 130 i = 1,nel
        tp       = shp(1,i)*sx(1,1)+shp(2,i)*sx(2,1)
        shp(2,i)  = shp(1,i)*sx(1,2)+shp(2,i)*sx(2,2)
        shp(1,i) = tp
130   continue
      return
      end
```


15.8.4 *Módulos de solución de ecuaciones.* El tipo de solucionador de ecuaciones para cada problema viene definido por el sistema seleccionado. Debe elegirse uno de las siguientes sistemas de solución de los archivos PASOLV.FOR o PFSOLV.FOR

(a) El archivo PASOLV.FOR contiene el conjunto de subprogramas para resolver las ecuaciones mediante un método de perfil, de banda variable. El archivo contiene los siguientes subprogramas:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*
PSOLVE	SUBRUTINA	Controla la solución de las ecuaciones
DASBLY	SUBRUTINA	Ensambla los vectores en la banda variable
DASOL	SUBRUTINA	Resuelve las ecuaciones
DATRI	SUBRUTINA	Realiza la descomposición triangular
DREDU	SUBRUTINA	Calcula las diagonales, reducidas durante la descomposición
PROFIL	SUBRUTINA	Calcula los números de las ecuaciones y el perfil

```
c
      subroutine psolve(u,a,b,dr,m,xm,s,ld,ig,idl,nst,nrs,afac,solv,
     1                  dyn,c1,ipd,rnorm,aengy,ifl)
c...active column assembly and solution of equations
      logical afac,solv,dyn,fl,fa
      character*12 tfile
      real*8 u(1),a(1),b(1),dr(1),xm(1),s(nst,1),aengy,rnorm,dot
      integer*2 m(1),ld(1),ig(1),idl(1)
      common /cdata/  numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /fdata/  fl(11)
      common /iofile/ ior,iow
      common /temfl1/ tfile(6)
      common /temfl2/ itrec(4),nw1,nw2
      data fa/.false./
c....form and assemble the matrix
      if(afac) then
        if(fl(4)) then
          ibuf = ig(neq)+neq
          if(ibuf.gt.8000) stop 'profile too large'
          itrec(1) = ibuf*8
          open (4,file=tfile(1),status='new',access='direct',
     1          form='unformatted',recl=itrec(1))
          close(4)
          fl(4) = fa
        endif
        call pconsd(a,ibuf,0.0d0)
c....modify tangent form lumped mass effects
        if(dyn) then
          do 310 n = 1,neq
            a(n)  =  c1*xm(n)
310       continue
        endif
        do 320 n = 1,numel
```

```
c...compute and assemble element arrays
          ne = n
          call formfe(u,dr,.true.,solv,fa,fa,3,ne,ne,1)
          if(ior.lt.0 .and.  mod(n,20).eq.0) write(*,2000) n
          call dasbly(s,s,ld,ig,nst,fa,afac,fa,dr,a(neq+1),a(neq+1),a)
320     continue
        rnorm = sqrt(dot(dr,dr,neq))
        call datri(a(neq+1),a(neq+1),a,ig,neq,.false.)
        call phstio(4,1,a,ibuf,2,tfile(1),itrec(1))
      endif
      if(solv) then
        if(.not.afac) call phstio(4,1,a,ibuf,1,tfile(1),itrec(1))
        do 330 n = 1,nrs
          ne = (n-1)*neq + 1
          call dasol(a(neq+1),a(neq+1),a,dr(ne),ig,neq, aengy)
330     continue
      endif
      return
2000  format(5x,'**',i4,' elements completed.')
2001  format(i4,' Elmts completed.')
      end
c
      subroutine dasbly(s,p,ld,jp,ns,alfl,aufl,bfl,  b,al,au,ad)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
c....assemble the symmetric or unsymmetric arrays for 'dasol'
      logical alfl,aufl,bfl
      integer*2 ld(ns),jp(1)
      real*8 al(1),au(1),ad(1),b(1),s(ns,ns),p(ns)
c....loop through the rows to perform the assembly
      do 200 i = 1,ns
        ii = ld(i)
        if(ii.gt.0) then
          if(aufl) then
c....loop through the columns to perform the assembly
            do 100 j = 1,ns
              if(ld(j).eq.ii) then
                ad(ii) = ad(ii) + s(i,j)
              elseif(ld(j).gt.ii) then
                jc = ld(j)
                jj = ii + jp(jc) - jc + 1
                au(jj) = au(jj) + s(i,j)
                if(alfl) al(jj) = al(jj) + s(j,i)
              endif
100         continue
          endif
          if(bfl) b(ii)  = b(ii)  + p(i)
        endif
200   continue
      return
      end
c
      subroutine dasol(al,au,ad,b,jp,neq, energy)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
c....solution of symmetric equations stored in profile form
c....coefficient matrix must be decomposed into its triangular
```



```
c....factors using datri before using dasol.
      integer*2 jp(1)
      real*8 al(1),au(1),ad(1),b(1)
      common /iofile/ ior,iow
      data zero/0.0d0/
c....find the first nonzero entry in the right hand side
      do 100 is = 1,neq
        if(b(is).ne.zero) go to 200
100   continue
      write(iow,2000)
      if(ior.lt.0) write(*,2000)
      return
200   if(is.lt.neq) then
c....reduce the right hand side
        do 300 j = is+1,neq
          jr = jp(j-1)
          jh = jp(j) - jr
          if(jh.gt.0) then
            b(j) = b(j) - dot(al(jr+1),b(j-jh),jh)
          endif
300     continue
      endif
c....multiply by inverse of diagonal elements
      energy = zero
      do 400 j = is,neq
        bd = b(j)
        b(j) = b(j)*ad(j)
        energy = energy + bd*b(j)
400   continue
c....backsubstitution
      if(neq.gt.1) then
        do 500 j = neq,2,-1
          jr = jp(j-1)
          jh = jp(j) - jr
          if(jh.gt.0) then
            call saxpb(au(jr+1),b(j-jh),-b(j),jh, b(j-jh))
          endif
500     continue
      endif
      return
2000  format(' ***DASOL WARNING 1*** Zero right-hand-side vector')
      end
c
      subroutine datest(au,jh,daval)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      real*8 au(jh)
c....test for rank
      daval = 0.0d0
      do 100 j = 1,jh
         daval = daval + abs(au(j))
100   continue
      return
      end
c
      subroutine datri(al,au,ad,jp,neq,flg)
```

```
      implicit real*8 (a-h,o-z)
c....triangular decomposition of a matrix stored in profile form
      logical flg
      integer*2 jp(1)
      real*8 al(1),au(1),ad(1)
      common /iofile/ ior,iow
c....n.b. tol should be set to approximate half-word precision.
      data zero,one/0.0d0,1.0d0/, tol/0.5d-07/
c....set initial values for conditioning check
      dimx = zero
      dimn = zero
      do 50 j = 1,neq
      dimn = max(dimn,abs(ad(j)))
50    continue
      dfig = zero
c....loop through the columns to perform the triangular decomposition
      jd = 1
      do 200 j = 1,neq
        jr = jd + 1
        jd = jp(j)
        jh = jd - jr
        if(jh.gt.0) then
          is = j - jh
          ie = j - 1
c....if diagonal is zero compute a norm for singularity test
          if(ad(j).eq.zero) call datest(au(jr),jh,daval)
          do 100 i = is,ie
            jr = jr + 1
            id = jp(i)
            ih = min(id-jp(i-1),i-is+1)
            if(ih.gt.0) then
              jrh = jr - ih
              idh = id - ih + 1
              au(jr) = au(jr) - dot(au(jrh),al(idh),ih)
              if(flg) al(jr) = al(jr) - dot(al(jrh),au(idh),ih)
            endif
100       continue
        endif
c....reduce the diagonal
        if(jh.ge.0) then
          dd = ad(j)
          jr = jd - jh
          jrh = j - jh - 1
          call dredu(al(jr),au(jr),ad(jrh),jh+1,flg  ,ad(j))
c....check for possible errors and print warnings
          if(abs(ad(j)).lt.tol*abs(dd))  write(iow,2000) j
          if(dd.lt.zero.and.ad(j).gt.zero) write(iow,2001) j
          if(dd.gt.zero.and.ad(j).lt.zero) write(iow,2001) j
          if(ad(j) .eq.  zero)             write(iow,2002) j
          if(dd.eq.zero.and.jh.gt.0) then
            if(abs(ad(j)).lt.tol*daval)   write(iow,2003) j
          endif
          if(ior.lt.0) then
            if(abs(ad(j)).lt.tol*abs(dd))  write(*,2000) j
            if(dd.lt.zero.and.ad(j).gt.zero) write(*,2001) j
            if(dd.gt.zero.and.ad(j).lt.zero) write(*,2001) j
            if(ad(j) .eq.  zero)             write(*,2002) j
            if(dd.eq.zero.and.jh.gt.0) then
              if(abs(ad(j)).lt.tol*daval)   write(*,2003) j
            endif
          endif
        endif
c....store reciprocal of diagonal, compute condition checks
        if(ad(j).ne.zero) then
          dimx  = max(dimx,abs(ad(j)))
          dimn  = min(dimn,abs(ad(j)))
          dfig  = max(dfig,abs(dd/ad(j)))
          ad(j) = one/ad(j)
        endif
200   continue
c....print conditioning information
      dd = zero
      if(dimn.ne.zero) dd = dimx/dimn
      ifig = dlog10(dfig) + 0.6
      write(iow,2004) dimx,dimn,dd,ifig
      if(ior.lt.0) write(*,2004) dimx,dimn,dd,ifig
      return
c....formats
2000  format(' ***DATRI WARNING 1*** Loss of at least 7 digits in',
     1 ' reducing diagonal of equation',i5)
2001  format(' ***DATRI WARNING 2*** Sign of diagonal changed when',
     1 ' reducing equation',i5)
2002  format(' ***DATRI WARNING 3*** Reduced diagonal is zero for',
     1 ' equation',i5)
2003  format(' ***DATRI WARNING 4*** Rank failure for zero unreduced',
     1 ' diagonal in equation',i5)
2004  format(' Condition check: D-max',e11.4,'; D-min',e11.4,
     1 '; Ratio',e11.4/' Maximum no. diagonal digits lost:',i3)
2005  format('Cond ck: Dmax',1p1e9.2,'; Dmin',1p1e9.2,'; Ratio',1p1e9.2)
      end
c
      subroutine dredu(al,au,ad,jh,flg  ,dj)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
c....reduce diagonal element in triangular decomposition
      logical flg
      real*8 al(jh),au(jh),ad(jh)
      do 100 j = 1,jh
        ud = au(j)*ad(j)
        dj = dj - al(j)*ud
        au(j) = ud
100   continue
c....finish computation of column of al for unsymmetric matrices
      if(flg) then
        do 200 j = 1,jh
          al(j) = al(j)*ad(j)
200     continue
      endif
      return
      end
c
      subroutine profil (jd,idl,id,ix,ndf,nen1)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
```

```
c....compute profile of global arrays
      integer*2 jd(1),idl(1),id(ndf,1),ix(nen1,1)
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /frdata/ maxf
      common /iofile/ ior,iow
c....set up the equation numbers
      neq = 0
      nneq = ndf*numnp
      do 10 n = 1,nneq
        j = id(n,1)
        if(j.eq.0) then
          neq = neq + 1
          id(n,1) = neq
        else
          id(n,1) = 0
        endif
10    continue
c....compute column heights
      call pconsi(jd,neq,0)
      do 50 n = 1,numel
        mm  = 0
        nad = 0
        do 30 i = 1,nen
          ii = iabs(ix(i,n))
          if(ii.gt.0) then
            do 20 j = 1,ndf
              jj = id(j,ii)
              if(jj.gt.0) then
                if(mm.eq.0) mm = jj
                mm = min(mm,jj)
                nad = nad + 1
                idl(nad) = jj
              endif
20          continue
          endif
30      continue
        if(nad.gt.0) then
          do 40 i = 1,nad
            ii = idl(i)
            jj = jd(ii)
            jd(ii) = max(jj,ii-mm)
40        continue
        endif
50    continue
c....compute diagonal pointers for profile
      nad = 0
      jd(1) = 0
      if(neq.gt.1) then
        do 60 n = 2,neq
          jd(n) = jd(n) + jd(n-1)
60      continue
        nad = jd(neq)
      endif
c....set element search order to sequential
      do 70 n = 1,numel
        idl(n) = n
```



```
70    continue
c....equation summary
      maxf = 0
      mm   = 0
      if(neq.gt.0) mm = (nad+neq)/neq
      write(iow,2001) neq,numnp,mm,numel,nad,nummat
      if(ior.lt.0) write(*,2001) neq,numnp,mm,numel,nad,nummat
      return
      end
```

(b) El archivo PFSOLV.FOR contiene el conjunto de subprogramas para resolver las ecuaciones por el método frontal. El archivo contiene los siguientes subprogramas:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*
PSOLVE	SUBRUTINA	Controla la solución de las ecuaciones
PBUFF	SUBRUTINA	Controla las operaciones entrada/salida de disco
PFRTAS	SUBRUTINA	Ensambla los vectores en el frente
PFRTBK	SUBRUTINA	Solución por sustitución hacia atrás
PFRTB	SUBRUTINA	Macro de sustitución hacia atrás
PFRTD	SUBRUTINA	Descomposición triangular
PFRTFW	SUBRUTINA	Solución hacia adelante
PFRTF	SUBRUTINA	Macro de solución hacia adelante
PREFRT	SUBRUTINA	Calcula el orden de las ecuaciones en el frente
PROFIL	SUBRUTINA	Calcula los números de las ecuaciones y el tamaño del frente

```
$NOFLOATCALLS
      subroutine psolve(u,a,b,dr,m,xm,s,ld,ig,idl,nst,nrs,afac,solv,
     1                  dyn,c1,ipd,rnorm,aengy,ifl)
c...frontal assembly and solution of equations
      logical afac,solv,dyn,fl,fa
      character*12 tfile
      real*8 u(1),a(1),b(1),dr(1),xm(1),s(1),dimx,dimn,r,rnorm,aengy
      integer*2 m(1),ld(1),ig(1),idl(1)
      common /cdata/  numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /fdata/  fl(11)
      common /frdata/ maxf
      common /iofile/ ior,iow
      common /nfrta/  dimx,dimn,nv,npl
      common /temfl1/ tfile(6)
      common /temfl2/ itrec(4),nw1,nw2
      data fa/.false./
c...set control data and zero
      if(.not.afac) go to 400
      if(fl(4)) then
        nal= 1 + (maxf*(maxf+3))/2
        if(nal+maxf.gt.8000) stop 'front too large'
        ibuf = (min(8000 - nal,(maxf+2)*neq))*4
```

```
        itrec(1) = ibuf*2 + 4
        open (4,file=tfile(1),status='new',access='direct',
     1        form='unformatted',recl=itrec(1))
        close(4)
        fl(4) = fa
      endif
      call pconsd(a,maxf*(maxf+1)/2,0.0d0)
      call pconsd(b,maxf,0.0d0)
      ig(1)=1
      ig(maxf+1)=0
      do 100 n=2,maxf
       ig(n)=ig(n-1)+n
       ig(maxf+n)=0
100   continue
c....begin loop through elements to perform front solution
      np  = 0
      nv  = 0
      nfrt= 0
      dimx  = 0.0
      dimn  = 0.0
      rnorm = 0.0
c...frontal elimination program
      do 320 n = 1,numel
c...pick next element
        ne = idl(n)
c...compute element arrays
        call formfe(u,dr,.true.,solv,fa,fa,3,ne,ne,1)
        if(ior.lt.0 .and. mod(n,20).eq.0) write(*,2000) n,nfrt
c....assemble element and determine eliminations
        call pfrtas(a,s,ld,ig,ig(maxf+1),ie,maxf,nfrt,nst)
        if(ie.ne.0) then
c...eliminate equations
          do 310 i=1,ie
            k=ld(i)
            jj=-ig(maxf+k)
            if(solv) then
              rnorm = rnorm + dr(jj)**2
              r=b(k)+dr(jj)
              dr(jj) = r
            endif
            if(dyn) then
             ii = ig(k)
             a(ii) = a(ii) + c1*xm(jj)
            endif
            if(np+8+nfrt*ipd.gt.ibuf) then
             call pbuff(m,ibuf,np,nv,2,ifl)
            endif
            m(np+1) = nfrt
            m(np+2) = k
            m(np+3) = jj
            call pfrtd(a,b,r,ig,ig(maxf+1),solv,m(np+5),nfrt,k)
c.........align last word of buffer for backsubstitution reads
            np = np + 8 + nfrt*ipd
            m(np) = nfrt
            nfrt = nfrt - 1
310       continue
```



```
        endif
c...end of forward elimination and triangularization
320   continue
      rnorm = sqrt(rnorm)
      rxm   = 0.0
      if(dimn.ne.0.0d0) rxm = dimx/dimn
      if(ior.lt.0) write(*,2001) dimx,dimn,rxm
      write(iow,2001) dimx,dimn,rxm
c....  clear buffer one last time
      if(np.gt.0) call pbuff(m,ibuf,np,nv,2,ifl)
      go to 500
c....  forward and back substitutions for solution
400   if(solv) call pfrtfw(b,dr,m,ipd,ibuf,maxf,nv,neq,nrs,ifl)
500   if(solv) call pfrtbk(b,dr,m,ipd,ibuf,maxf,nv,neq,nrs,aengy,ifl)
      return
2000  format(5x,'**',i4,' elements completed.    Current front width is',
     1           i4)
2001  format(5x,'Condition check:  D-max',1p1e11.4,'; D-min',1p1e11.4,
     1           '; Ratio',1p1e11.4)
2002  format(i4,' Elmts completed.    Current front width is',i4)
2003  format('Cond ck:  Dmax',1p1e9.2,'; Dmin',1p1e9.2,'; Ratio',1p1e9.2)
      end
c
      subroutine pbuff(m,ibuf,ilast,nv,is,ifl)
c....tape input/output routine for frontal program
      integer*2 m(ibuf)
      real*8    dimx,dimn
      character*12 tfile
      common /nfrta/ dimx,dimn,nvp,npl
      common /temfl1/ tfile(6)
      common /temfl2/ itrec(4),nw1,nw2
      open(4,file=tfile(ifl),access='direct',recl=itrec(ifl))
c....read record 'nv' from the file
      if(is.eq.1) then
        read(4,rec=nv,end=901,err=902)  ilast,m
c....write record 'nv' from the file
      elseif(is.eq.2) then
        nv = nv + 1
        if(nv.eq.1) npl = ilast
        write(4,rec=nv,err=901) ilast,m
        ilast = 0
      endif
      close(4)
      return
c....error messages
901   write(*,4000)
      stop
902   call pend('PBUFF ')
      stop
4000  format(' ** ERROR IN PBUFF ** records do not match problem?')
      end
c
      subroutine pfrtas(a,s,ld,ig,lg,ie,maxf,nfrt,nst)
c....assembly and elimination determination for frontal program
      real*8 a(1),s(nst,1)
      integer*2 ld(1),ig(1),lg(1)
```

```
c...convert ld to front order
      do 203 j=1,nst
        ii=abs(ld(j))
        i = 0
c...check if ii is already in list
        if(ii.ne.0) then
          if(nfrt.ne.0) then
            do 200 i=1,nfrt
              if(ii.eq.abs(lg(i))) go to 202
200         continue
          endif
c...assign ii to next available entry and increase front width
          nfrt = nfrt + 1
          i = nfrt
c...replace destination value by new value
202       lg(i)=ld(j)
c...set ld for assembly
          ld(j)=i
        endif
203   continue
c...assemble element into front
      do 205 j = 1,nst
        k = abs(ld(j))
        if(k.gt.0) then
          l = ig(k) - k
          do 204 i = 1,nst
            m = abs(ld(i))
            if(m.gt.0 .and. m.le.k) a(m+l) = a(m+l) + s(i,j)
204       continue
        endif
205   continue
c...set up equations to be eliminated
      ie=0
      do 206 i = nfrt,1,-1
        if(lg(i).lt.0) then
          ie = ie + 1
          ld(ie) = i
        endif
206   continue
      return
      end
c
      subroutine pfrtbk(b,dr,m,ipd,ibuf,maxf,nv,neq,nev,aengy,ifl)
c....backsubstitution for frontal solution
      real*8 b(maxf,1),dr(neq,1),aengy,dimx,dimn
      integer*2 m(1)
      common /nfrta/ dimx,dimn,nvp,npl
      call pconsd(b,maxf*nev,0.0d0)
      aengy = 0.0
c....recover block
      np = npl
      do 503 n = nv,1,-1
        if(nv.gt.1) call pbuff(m,ibuf,np,n,1,ifl)
501     nfrt = m(np)
        np = np - 8 - nfrt*ipd
        k  = m(np+2)
```



```
        jj = m(np+3)
        do 502 i = 1,nev
          call pfrtb(b(1,i),dr(1,i),nfrt,k,jj,m(np+5),aengy)
502     continue
        if(np.gt.0) go to 501
503   continue
      return
      end
c
      subroutine pfrtb(b,dr,nfrt,k,jj,eq,aengy)
c....backsubstitution macro for frontal program
      real*8 b(1),dr(1),eq(1),dot,aengy
c...expand b array
      kk = nfrt
500   if(kk.le.k) go to 501
      b(kk) = b(kk-1)
      kk = kk - 1
      go to 500
501   b(k) = 0.0
c...extract pivot and solve, also compute energy
      aengy = aengy + dr(jj)**2/eq(k)
      dr(jj)=(dr(jj)-dot(eq,b,nfrt))/eq(k)
      b(k) = dr(jj)
      return
      end
c
      subroutine pfrtd(a,b,r,ig,lg,solv,eq,nfrt,k)
c....triangular decomposition for frontal program
      logical solv
      real*8 a(1),b(1),eq(1),dimx,dimn,pivot,term,r
      integer*2 ig(1),lg(1)
      common /nfrta/ dimx,dimn,nv,npl
c...extract equation
      do 301 j=1,nfrt
        l = max(j,k)
        l=ig(l)-l+min(j,k)
        eq(j)=a(l)
301   continue
      pivot=eq(k)
      if(pivot.eq.0.0d0) then
        call pconsd(eq,nfrt,0.0d0)
        write(*,2000)
        pivot = 1.0
        eq(k) = 1.0
      else
        dimx = max(dimx,abs(pivot))
        if(dimn.eq.0.0d0) dimn = abs(pivot)
        dimn = min(dimn,abs(pivot))
      endif
      km = k - 1
      kp = k + 1
      kk = 1
      if(km.gt.0) then
        do 302 jj = 1,km
          if(eq(jj).ne.0.0d0) then
            term = -eq(jj)/pivot
```

```
          if(solv) b(jj) = b(jj) + term*r
          call saxpb(eq,a(kk),term,jj,a(kk))
        endif
        kk = ig(jj) + 1
302   continue
      endif
      kk = ig(k) + 1
      if(kp.le.nfrt) then
        do 303 jj = kp,nfrt
          lg(jj-1) = lg(jj)
          kl = kk - jj
          term = -eq(jj)/pivot
          if(solv) b(jj-1) = b(jj) + term*r
          call saxpb(eq(kp),a(kk+k),term,jj-k,a(kl+k))
          if(km.gt.0) then
            kl = kl + 1
            call saxpb(eq,a(kk),term,km, a(kl))
          endif
          kk = ig(jj) + 1
303     continue
      endif
      call pconsd(a(kk-nfrt),nfrt,0.0d0)
      b(nfrt) = 0.0
      lg(nfrt) = 0
      return
2000  format(' WARNING -- Zero pivot, check boundary codes.'/
     1                     Pivot set to 1.0 and solution continued.')
      end
c
      subroutine pfrtfw(b,dr,m,ipd,ibuf,maxf,nv,neq,nev,ifl)
c....forward solution for frontal resolutions
      real*8 b(maxf,1),dr(neq,1)
      integer*2 m(1)
      call pconsd(b,maxf*nev,0.0d0)
      do 403 n = 1,nv
        call pbuff(m,ibuf,ilast,n,1,ifl)
        np = 1
401     nfrt = m(np)
        k    = m(np+1)
        jj   = m(np+2)
        do 402 i = 1,nev
          call pfrtf(b(1,i),dr(1,i),nfrt,k,jj,m(np+4))
402     continue
c.........align last word of buffer for backsubstitution reads
        np = np + 8 + m(np)*ipd
        if(np.lt.ilast) go to 401
403   continue
      return
      end
c
      subroutine pfrtf(b,dr,nfrt,k,jj,eq)
c....forward elimination macro for front program
      real*8 b(1),dr(1),eq(1),r
      dr(jj) = dr(jj) + b(k)
      r = dr(jj)/eq(k)
      km = k - 1
```



```
      kp = k + 1
      if(km.gt.0) then
        do 402 ii = 1,km
          b(ii) = b(ii) - eq(ii)*r
402     continue
      endif
      if(kp.le.nfrt) then
        do 404 ii = kp,nfrt
          b(ii-1) = b(ii) - eq(ii)*r
404     continue
      endif
      b(nfrt) = 0.0
      return
      end
c
      subroutine prefrt(il,idl,ix,maxf,ndf,nen,nen1,numel,numnp)
      integer*2 il(1),idl(1),ix(nen1,1)
c...prefrontal routine to flag last occurance of nodes
c...preset check array
      do 100 n=1,numnp
        il(n)=0
100   continue
c...set last occurance of nodes
      do 102 nu=numel,1,-1
        n = idl(nu)
        do 101 i=nen,1,-1
          ii=abs(ix(i,n))
          if((ii.ne.0).and.(il(ii).eq.0)) then
            il(ii)=n
            ii=-ii
          endif
          ix(i,n)=ii
101     continue
102   continue
c...get estimate to maximum frontwith
      maxf=0
      nowf=0
      do 107 nu=1,numel
        n = idl(nu)
        do 105 i=1,nen
          ii=ix(i,n)
          if(ii.ne.0) then
            jj=abs(ii)
            if(il(jj).ne.0) nowf=nowf+ndf
            maxf=max(maxf,nowf)
            il(jj)=0
          endif
105     continue
        do 106 i = 1,nen
          if(ix(i,n).lt.0) nowf = max(0,nowf-ndf)
106     continue
107   continue
      write(*,3000) maxf
3000  format(' ** Estimate of maximum front width is ',i5)
      return
      end
```

```
c
      subroutine profil (jd,idl,id,ix,ndf,nen1)
c....compute front profile of global arrays
      integer*2 jd(1),idl(1),id(1),ix(nen1,1)
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /iofile/ ior,iow
      common /frdata/ maxf
c....set up the equation numbers
      neq = 0
      nneq = ndf*numnp
      do 10 n = 1,nneq
        j = id(n)
        if(j.eq.0) then
          neq = neq + 1
          id(n) = neq
        else
          id(n) = 0
        endif
10    continue
      do 11 n = 1,numel
        idl(n) = n
11    continue
c....compute front width
      call prefrt(jd,idl,ix,maxf,ndf,nen,nen1,numel,numnp)
      if(maxf.gt.120) then
        write(*,2001) maxf
        if(ior.lt.0) write(iow,2001) maxf
      endif
      return
2001  format(' ** ERROR ** front requires too much storage ')
      end
```


15.8.5 *Módulo de dibujo.* El dibujo de mallas para problemas bidimensionales se controla a través de los subprogramas contenidos en el archivo PCPLOT.FOR

(a) el archivo PCPLOT.FOR contiene el siguiente conjunto de subprogramas

Nombre	*Tipo*	*Descripción*
PPLOTF	SUBRUTINA	Controla la secuencia del dibujo
DPLOT	SUBRUTINA	Dibuja líneas en la pantalla
PDEVCL	SUBRUTINA	Cierra el periférico de dibujo y retorna al macro
PDEVOP	SUBRUTINA	Abre el periférico del dibujo, dibuja una caja alrededor de la región
PLOTL	SUBRUTINA	Dibuja la figura a escala; llama a DPLOT
FRAME	SUBRUTINA	Determina la región del dibujo y la escala a la pantalla
PDEFM	SUBRUTINA	Calcula las coordenadas del dibujo de la deformada
PLINE	SUBRUTINA	Dibuja la malla o el contorno

```
$NOFLOATCALLS
      subroutine pplotf(x,ix,b,lci,ct,ndf,ndm,nen1,nneq)
c....plot control subroutine for feap
      logical pcomp,oflg
      character lci*4
      integer*2 ixy,devnam,status,vslcol,il,ix(1),coli
      real  x(ndm,1),ct(2)
      real*8 b(1),prop
      common dr(1)
      common /adata/ il(32000)
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /pdata2/ ixy(4),devnam
c....open kernel system and plot mesh or outline of parts
      call pdevop(devnam)
      call frame(x,ndm,numnp)
c....plot mesh or outline of parts
      oflg = .not.pcomp(lci,'outl')
      c    = 0.0
      ic   = 1
      if(ct(1).ne.0.0) ic = 2
      do 100 i = ic,1,-1
        coli   = 8 - 2*i
        status = vslcol(devnam,coli)
        call pdefm(x,b,c,ndm,ndf,numnp, dr)
        call pline(dr,ix,il,numnp,numel,ndm,nen1,nen,ct(2),oflg)
        c      = ct(1)
100   continue
c....close plot
      call pdevcl(devnam)
      return
      end
```

```
c
      subroutine dplot(x,y,ipen)
      integer*2  ixy,devnam,status,vpline
      common /pdata2/ ixy(4),devnam
c....pen command motions  (ipen = 2, pendown)
      ixy(3) = 22000*x
      ixy(4) = 22000*y
      if(ipen.eq.2) then
        status = vpline(devnam,2,ixy)
      endif
      ixy(1) = ixy(3)
      ixy(2) = ixy(4)
      return
      end
c
      subroutine pdevcl(devnam)
      integer*2 devnam,status,vclrwk,vencur,vclswk,vrqstr,ixy(2)
      character*1 xxx
c....close the plotting device
      status = vrqstr(devnam,1,0,ixy,xxx)
      status = vclrwk(devnam)
      status = vencur(devnam)
      status = vclswk(devnam)
      return
      end
c
      subroutine pdevop(devnam)
c....open graphics workstation
      integer*2 devnam,wkin(19),wkout(66),status,vopnwk,vclrwk,vslcol
      data wkin/1,1,1,4,1,1,1,1,1,1,68,73,83,80,76,65,89,32/
c....open kernel system
      status = vopnwk(wkin,devnam,wkout)
      if(status.lt.0) then
        write(*,2000)
        return
      endif
      status = vclrwk(devnam)
      status = vslcol(devnam,2)
      call dplot(0.0000,0.0000,1)
      call dplot(1.4545,0.0000,2)
      call dplot(1.4545,1.0090,2)
      call dplot(0.0000,1.0090,2)
      call dplot(0.0000,0.0000,2)
      return
2000  format('  Graphics Device Driver not installed correctly.')
      end
c
      subroutine plotl(x1,x2,x3,ipen)
c....line drawing command
      common /pdata1/ scale,dx(2),sx(2)
c....compute the normal coordinates
      s1 = max(0.0,min(1.45,scale*(x1 + x1 - sx(1)) + 0.5))
      s2 = max(0.0,min(1.00,scale*(x2 + x2 - sx(2)) + 0.5))
      call dplot(s1,s2,ipen)
      return
      end
```



```
c
      subroutine frame(x,ndm,numnp)
c....compute scaling for plot area
      logical iflg
      real     x(ndm,1),xmn(2),xmx(2),xmin(3),xmax(3)
      common /pdata1/ scale,dx(2),sx(2)
c....determine window coordinates
      if(ndm.eq.1) then
        dx(2) = 0.
        sx(2) = 0.0
      endif
      ii = min(ndm,3)
      ij = min(ndm,2)
c....find the minimum and maximum coordinate of input nodes
      iflg = .true.
      do 104 n = 1,numnp
        if(x(1,n).ne. -999.) then
          if(iflg) then
            do 100 i = 1,ii
              xmin(i) = x(i,n)
              xmax(i) = x(i,n)
100         continue
            iflg = .false.
          else
            do 102 i = 1,ii
              xmin(i) = min(xmin(i),x(i,n))
              xmax(i) = max(xmax(i),x(i,n))
102         continue
          endif
        endif
104   continue
      scale  = max(xmax(1)-xmin(1),xmax(2)-xmin(2))
c....plot region determination
      do 110 i = 1,ij
        xmn(i) = min(xmin(i),xmax(i))
        xmx(i) = max(xmin(i),xmax(i))
        dx(i) = xmx(i) - xmn(i)
        sx(i) = xmx(i) + xmn(i)
110   continue
c....rescale window
      if(dx(1).gt.dx(2)) then
        xmn(2) = (sx(2) - dx(1))/2.0
        xmx(2) = (sx(2) + dx(1))/2.0
      else
        xmn(1) = (sx(1) - dx(2))/2.0
        xmx(1) = (sx(1) + dx(2))/2.0
      endif
      do 112 i = 1,ij
        xmin(i) = max(xmin(i),xmn(i)) - scale/100.
        xmax(i) = min(xmax(i),xmx(i)) + scale/100.
112   continue
c....default values
      scale  = max(xmax(1)-xmin(1),xmax(2)-xmin(2))
c....reset values for deformed plotting
      do 114 i = 1,ij
        xcen = xmax(i)+xmin(i)
```

```
        xmax(i) = (xcen + 1.1*scale)/2.
        xmin(i) = (xcen - 1.1*scale)/2.
114   continue
      scale = 0.4/scale
      return
      end
c
      subroutine pdefm(x,b,c,ndm,ndf,numnp, dr)
c....compute the deformed position of two-dimensional meshes
      real x(ndm,1),dr(ndm,1)
      real*8 b(ndf,1)
      call pconsr(dr,ndm*numnp,0.0)
      do 120 n = 1,numnp
        if(x(1,n).ne. -999.) then
          do 110 i = 1,ndm
            dr(i,n) = x(i,n) + c*b(i,n)
110       continue
        endif
120   continue
      return
      end
c
      subroutine pline(x,ix,ic,numnp,numel,ndm,nen1,nen,ct,isw)
c....plot mesh or outline
      logical ifl,iend,isw
      integer*2 ix(nen1,1),iplt(8),ic(numnp,1)
      real      x(ndm,1)
      data iplt/5,2,6,3,7,4,8,1/
c....initialize connection array
      call pconsi(ic,numnp*4,0)
c....loop through elements to set up list
      do 206 n = 1,numel
        jj = abs(ct)
        if(jj.eq.0) go to 197
        ii = abs(ix(nen1,n))
        if(ii.ne.jj) go to 206
197     i = 1
        ii = abs(ix(i,n))
        do 205 ij = 1,8
          j = iplt(ij)
          if(j.le.nen.and.ix(j,n).ne.0) then
            jj = abs(ix(j,n))
            if(jj.ne.ii) then
              n1 = min(ii,jj)
              n2 = max(ii,jj)
              do 203 k = 1,4
                if(ic(n1,k).eq.0) then
                  ic(n1,k) = n2
                  go to 204
                elseif(ic(n1,k).eq.n2) then
                  ic(n1,k) = -n2
                  go to 204
                endif
203           continue
            endif
204         ii = jj
```



```
          endif
205     continue
206   continue
c....change signs to permit mesh plot
      if(isw) then
        do 250 n = 1,numnp
        do 250 i = 1,4
          ic(n,i) = abs(ic(n,i))
250     continue
      endif
c....plot outline of part with continuous lines
      x3 = 0.
      do 304 ni = 1,numnp
        iend = .true.
        do 303 n = 1,numnp
          ifl = .true.
          n1 = n
300       do 301 i = 1,4
            if(ic(n1,i)) 301,303,302
301       continue
          go to 303
302       iend = .false.
          if(ndm.ge.3) x3 = x(3,n1)
          if(ifl) call plotl(x(1,n1),x(2,n1),x3,1)
          ifl = .false.
          n2 = ic(n1,i)
          ic(n1,i) = -n2
          if(ndm.ge.3) x3 = x(3,n2)
          call plotl(x(1,n2),x(2,n2),x3,2)
          n1 = n2
          go to 300
303     continue
        if(iend) go to 305
304   continue
305   return
      end
```

15.8.6 ***Módulos de los elementos.*** Los módulos de los elementos para los elementos elásticos lineales están contenidos en los archivos PCELM1.FOR, PCELM2.FOR, PCLEM3.FOR y PCELM4.FOR.

(a) El archivo PCELM1.FOR contiene un módulo de elemento para elasticidad lineal bidimensional isótropa. Debe introducirse información de control de tal forma que

$$\text{NDM} = 2$$
$$\text{NDF} \geq 2$$
$$\text{NEN} \geq 3$$

Cada uno de los tres elementos de elasticidad tiene dos grados de libertad en cada nodo (esto es, u, v); por tanto, el usuario debe especificar que NDF ≥ 2 como se ha indicado. Los elementos funcionarán si NDF > 2, pero se obtendrán desplazamientos nulos en los grados de libertad adicionales. Los grados de libertad adicionales sólo deben utilizarse si el elemento se usa con otro elemento que los requiera (ej., un elemento típico de viga bidimensional precisa 3 grados de libertad por nodo; el elemento de tensión plana se puede usar como panel de cortante).

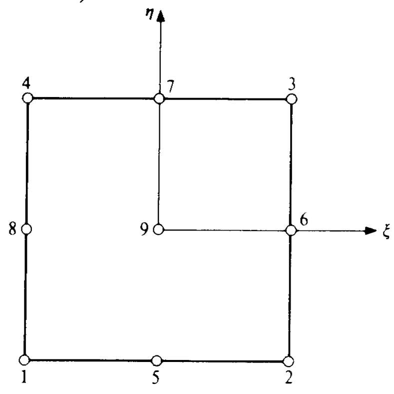


Figura 15.25 Secuencia de numeración local de los nodos para un elemento de cuatro nodos.

El elemento ELMT01 permite analizar geometrías de tensión plana, deformación plana y axial-simétricas con fuerzas nodales, temperaturas o fuerzas de volumen. El elemento se basa en el método de los desplazamientos (formulación irreducible) y usa los subprogramas de funciones de forma isoparamétricas de tres a nueve nodos contenidas en el archivo PCMAC3.FOR. La numeración local de los nodos para este elemento se muestra en la Figura 15.25. Si el número global de un nodo es cero para cualquier nodo local, la función de forma correspondiente no se construye. Así, es posible tener elementos que tienen funciones de forma lineales sobre un lado mientras que otros lados tienen variaciones cuadráticas. El elemento de tres nodos se genera bien repitiendo el número global de nodo para nodos en esquinas adyacentes, o bien especificando tres nodos de esquina. Se pueden formar triángulos cuadráticos asignando el mismo número de nodo a un lado completo. Se sugiere que se incluyan tanto los nodos de centro de lado como el nodo central (esto es, el nodo 9) para los triángulos cuadráticos. El elemento calcula valores de tensiones tanto elementales como nodales. Las proyecciones de tensiones nodales se usan para calcular y proporcionar los estimadores de error y de refinamiento.

Los parámetros de grupo de propiedades materiales que siguen a los datos descritos en la Tabla 15.8 se introducen como sigue:

Grupo de Propiedades 1.) FORMAT—3F10.0,3I10

Columna	*Descripción*
1 a 10	E, módulo de Young
11 a 20	ν, coeficiente de Poisson
21 a 30	ρ, densidad
31 a 40	L, número de puntos de cuadratura por dirección para cálculo de vectores/matrices
41 a 50	K, número de puntos por dirección para salida de tensiones
51 a 60	I, Tipo de Problema: $I = 1$ tensión plana $I = 2$ deformación plana $I = 3$ axial-simétrico

Grupo de Propiedades 2.) FORMAT—5F10.0

Columna	*Descripción*
1 a 10	Espesor (sólo para tensión plana)
11 a 20	Fuerza de volumen-1 (por unidad de volumen)
21 a 30	Fuerza de volumen-2 (por unidad de volumen)
31 a 40	α, coeficiente de dilatación térmica
41 a 50	T_0, temperatura inicial

El archivo PCELM1.FOR contiene los siguientes subprogramas:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*
ELMT01	SUBRUTINA	Entrada de parámetros, calcula los vectores/ matrices de EF
STRE01	SUBRUTINA	Cálculo de tensiones y deformaciones en un punto
STCN01	SUBRUTINA	Cálculo de las tensiones nodales
STER01	SUBRUTINA	Cálculo e impresión de los estimadores de error

```
$NOFLOATCALLS
      subroutine elmt01(d,ul,xl,ix,tl,s,p,ndf,ndm,nst,isw)
c
c....plane linear elastic element routine
c
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      integer*2 ix(1)
      real   xl(ndm,1),tl(1),aa,dm
      real*8 d(1),ul(ndf,1),s(nst,1),p(1),eps(4),sigr(6),shp(3,9),
     1       sg(16),tg(16),wg(16),ang
      character wd(3)*12,yyy*80
      common /adata/ aa(16000)
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /eldata/ dm,n,ma,mct,iel,nel
      common /iofile/ ior,iow
      data wd/'Plane Stress','Plane Strain','Axisymmetric'/
c....go to correct array processor
      l    = d(5)
      k    = d(6)
      ityp = d(15)
      go to(1,2,3,3,3,3,7,8), isw
c....input material properties
1     if(ior.lt.0) write(*,5000)
      call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1000,err=110) e,xnu,d(4),l,k,ityp
11    if(ior.lt.0) write(*,5001)
      call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1001,err=111) d(14),d(11),d(12),alp,t0
c....set material parameter type and flags
      ityp = max(1,min(ityp,3))
      j = min(ityp,2)
      d(1) = e*(1.+(1-j)*xnu)/(1.+xnu)/(1.-j*xnu)
      d(2) = xnu*d(1)/(1.+(1-j)*xnu)
      d(3) = e/2./(1.+xnu)
      d(13)= d(2)*(j-1)
      if(d(14).le.0.0d0 .or.  ityp.ge.2) d(14) = 1.0
      d(15) = ityp
      d(16) = e
      d(17) = xnu
      d(18) = -xnu/e
      l = min(4,max(1,l))
      k = min(4,max(1,k))
      d(5) = l
      d(6) = k
      d(9) = t0
      d(10)= e*alp/(1.-j*xnu)
      lint = 0
      write(iow,2000) wd(ityp),d(16),d(17),d(4),l,k,d(14),d(11),d(12),
     1               alp,t0
      if(ior.lt.0) write(*,2000) wd(ityp),d(16),d(17),d(4),l,k,
     1               d(14),d(11),d(12),alp,t0
      d(4) = d(4)*d(14)
      return
c....read error messages
110   call perror('PCELM1',yyy)
      go to 1
```



```
111   call perror('PCELM1',yyy)
      go to 11
2     call ckisop(ix,xl,shp,ndm)
      return
c....stiffness/residual computation
3     if(isw.eq.4) l = k
      if(l*l.ne.lint) call pgauss(l,lint,sg,tg,wg)
c....compute integrals of shape functions
      do 340 l = 1,lint
        call shape(sg(l),tg(l),xl,shp,xsj,ndm,nel,ix,.false.)
        call stre01(d,xl,ul,tl,shp,eps,sigr,xx,yy,ndm,ndf,nel,ityp)
        xsj = xsj*wg(l)*d(14)
c....compute jacobian correction
        if(ityp.le.2) then
          dv  = xsj
          xsj = 0.0
          zz  = 0.0
          sigr4 = -d(11)*dv
        else
          dv  = xsj*xx
          zz  = 1./xx
          sigr4 = sigr(4)*xsj - d(11)*dv
        endif
        j1 = 1
c....compute the mass term
        if(isw.eq.5) then
          dv = dv*d(4)
          do 315 j = 1,nel
            p(j1  ) = p(j1) + shp(3,j)*dv
            p(j1+1) = p(j1)
            j1 = j1 + ndf
315       continue
        elseif(isw.eq.4) then
          call pstres(sigr,sigr(5),sigr(6),ang)
c....output stresses and strains
          mct = mct - 2
          if(mct.le.0) then
            call prthed(iow)
            write(iow,2001)
            if(ior.lt.0) write(*,2001)
            mct = 50
          endif
          write(iow,2002) n,xx,sigr,ma,yy,eps,ang
          if(ior.lt.0) write(*,2002) n,xx,sigr,ma,yy,eps,ang
        else
c....loop over rows
          do 330 j = 1,nel
            w11 = shp(1,j)*dv
            w12 = shp(2,j)*dv
            w22 = shp(3,j)*xsj
c....compute the internal forces
            p(j1  ) = p(j1  ) - (shp(1,j)*sigr(1)+shp(2,j)*sigr(2))*dv
     1                        - shp(3,j)*sigr4
            p(j1+1) = p(j1+1) - (shp(1,j)*sigr(2)+shp(2,j)*sigr(3))*dv
     1                        + d(12)*shp(3,j)*dv
c....loop over columns (symmetry noted)
```

```
          if(isw.eq.3) then
            k1 = j1
            a11 = d(1)*w11 + d(2)*w22
            a21 = d(2)*w11 + d(1)*w22
            a31 = d(2)*(w11+w22)
            a41 = d(3)*w12
            a12 = d(2)*w12
            a32 = d(1)*w12
            a42 = d(3)*w11
            do 320 k = j,nel
              w11 = shp(1,k)
              w12 = shp(2,k)
              w22 = shp(3,k)*zz
              s(j1  ,k1  ) = s(j1  ,k1  ) + w11*a11+w22*a21+w12*a41
              s(j1+1,k1  ) = s(j1+1,k1  ) + (w11 + w22)*a12+w12*a42
              s(j1  ,k1+1) = s(j1  ,k1+1) + w12*a31 + w11*a41
              s(j1+1,k1+1) = s(j1+1,k1+1) + w12*a32 + w11*a42
              k1 = k1 + ndf
320         continue
          endif
          j1 = j1 + ndf
330     continue
      endif
340   continue
c....make stiffness symmetric and compute a residual
      if(isw.eq.3) then
        do 360 j = 1,nst
        do 360 k = j,nst
          s(k,j) = s(j,k)
360     continue
      endif
      return
c....compute the stress errors
7     if(l*l.ne.lint) call pgauss(l,lint,sg,tg,wg)
      call ster01(ix,d,xl,ul,tl,shp,aa,aa(numnp+1),ndf,ndm,
     1  numnp,numel,sg,tg,wg,sigr,eps,lint,ityp)
      return
c....compute the nodal stress values
8     if(l*l.ne.lint) call pgauss(l,lint,sg,tg,wg)
      call stcn01(ix,d,xl,ul,tl,shp,aa,aa(numnp+1),ndf,ndm,nel,
     1  numnp,sg,tg,sigr,eps,lint,ityp)
      return
c....formats for input-output
1000  format(3f10.0,3i10)
1001  format(8f10.0)
2000  format(/5x,a12,' Linear Elastic Element'//
     1 10x,'Modulus',e18.5/10x,'Poisson ratio',f8.5/10x,'Density',e18.5/
     2 10x,'Gauss pts/dir',i3/10x,'Stress pts',i6/10x,'Thickness',e16.5/
     3 10x,'1-gravity',e16.5/10x,'2-gravity',e16.5/10x,'Alpha',e20.5/
     4 10x,'Base temp',e16.5/)
2001  format(5x,'Element Stresses'//' elmt  1-coord',2x,'11-stress',2x,
     1 '12-stress',2x,'22-stress',2x,'33-stress',3x,'1-stress',3x,
     2 '2-stress'/' matl  2-coord',2x,'11-strain',2x,'12-strain',2x,
     3 '22-strain',2x,'33-strain',6x,'angle'/39(' -'))
2002  format(i5,0p1f9.3,1p6e11.3/i5,0p1f9.3,1p4e11.3,0p1f11.2/)
5000  format(' Input:  E, nu, rho, pts/stiff, pts/stre',
```



```
     1 ', type(1=stress,2=strain,3=axism)',/3x,'>',$)
5001  format(' Input:  Thickness, 1-body force, 1-body force, alpha,'
     1       ,' Temp-base'/3x,'>',$)
      end
c
      subroutine stre01(d,xl,ul,tl,shp,eps,sig,xx,yy,ndm,ndf,nel,ityp)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      real   xl(ndm,1),tl(1)
      real*8 d(1),ul(ndf,1),shp(3,1),eps(4),sig(4)
c....compute strains and coordinates
      call pconsd(eps,4,0.0d0)
      xx = 0.0
      yy = 0.0
      ta = -d(9)
      do 100 j = 1,nel
        xx = xx + shp(3,j)*xl(1,j)
        yy = yy + shp(3,j)*xl(2,j)
        ta = ta + shp(3,j)*tl(j)
        eps(1) = eps(1) + shp(1,j)*ul(1,j)
        eps(2) = eps(2) + shp(1,j)*ul(2,j) + shp(2,j)*ul(1,j)
        eps(3) = eps(3) + shp(2,j)*ul(2,j)
        if(ityp.eq.3) eps(4) = eps(4) + shp(3,j)*ul(1,j)
100   continue
      ta = ta*d(10)
c....compute stresses
      if(ityp.gt.2) then
        if(xx.ne.0.0d0) then
          eps(4) = eps(4)/xx
        else
          eps(4) = eps(1)
        endif
        sig(4) = d(1)*eps(4) + d(2)*(eps(1) + eps(3)) - ta
      else
        sig(4) = d(13)*(eps(1) + eps(3)) - ta
      endif
      sig(1) = d(1)*eps(1) + d(2)*(eps(3) + eps(4)) - ta
      sig(2) = d(3)*eps(2)
      sig(3) = d(1)*eps(3) + d(2)*(eps(1) + eps(4)) - ta
      if(ityp.eq.1) eps(4) = d(18)*(sig(1) + sig(3))
      return
      end
c
      subroutine stcn01(ix,d,xl,ul,tl,shp,dt,st,ndf,ndm,nel,numnp,
     1                  sg,tg,sig,eps,lint,ityp)
c....project stresses onto nodes
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      integer*2 ix(1)
      real   dt(numnp),st(numnp,1),xl(ndm,1),tl(1)
      real*8 eps(4),sig(4),ul(ndf,1),shp(3,4),d(1),sg(9),tg(9)
      common /errind/ eerror,elproj,ecproj,efem,enerr,ebar
      gr = (1.+d(17))/d(16)
      do 130 l = 1,lint
        call shape(sg(l),tg(l),xl,shp,xsj,ndm,nel,ix,.false.)
        call stre01(d,xl,ul,tl,shp,eps,sig,xx,yy,ndm,ndf,nel,ityp)
        enerr = enerr+((sig(1)+sig(3)+sig(4))**2)*d(18)*xsj
     1     + gr*xsj*sig(2)**2
```

```
        do 110 i = 1,4
          enerr  = enerr  + gr*sig(i)**2*xsj
110     continue
        do 120 ii = 1,nel
          ll = abs(ix(ii))
          if(ll.gt.0) then
            xsji = xsj*shp(3,ii)
            dt(ll) = dt(ll) + xsji
            st(ll,1) = st(ll,1) + sig(1)*xsji
            st(ll,2) = st(ll,2) + sig(2)*xsji
            st(ll,3) = st(ll,3) + sig(3)*xsji
            st(ll,4) = st(ll,4) + sig(4)*xsji
          endif
120     continue
130   continue
      return
      end
c
      subroutine ster01(ix,d,xl,ul,tl,shp,dt,st,ndf,ndm,
     1   numnp,numel,sg,tg,wg,sig,eps,lint,ityp)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      integer*2 ix(1)
      real   dt(numnp),st(numnp,1),xl(ndm,1),tl(1),dm
      real*8 shp(3,4),sig(6),sigp(4),dsig(4),d(1),eps(4),ul(ndf,1),
     1       sg(16),tg(16),wg(16),deps(4)
      common /iofile/ ior,iow
      common /eldata/ dm,n,ma,mct,iel,nel
      common /errind/ eerror,elproj,ecproj,efem,enerr,ebar
c....stress error computations
      psis = 0.0
      psi  = 0.0
      gr   = (1.+d(17))/d(16)
      do 200 ii = 1,lint
        call shape(sg(ii),tg(ii),xl,shp,xsj,ndm,nel,ix,.false.)
        call stre01(d,xl,ul,tl,shp,eps,sig,xx,yy,ndm,ndf,nel,ityp)
        xsj = xsj*wg(ii)
        do 100 i = 1,4
          sigp(i)= 0.0d0
100     continue
        do 110 i = 1,nel
          ll = iabs(ix(i))
          if(ll.ne.0) then
            do 105 j = 1,4
              sigp(j) = sigp(j) + shp(3,i)*st(ll,j)
105         continue
          endif
110     continue
c....compute the integral of the stress squares for error indicator use
        do 120 i = 1,4
          dsig(i) = sigp(i)-sig(i)
          efem    = efem   + sig(i)*sig(i)*xsj
          ecproj  = ecproj + sigp(i)*sigp(i)*xsj
          psis    = psis   + (dsig(i)**2)*xsj
          psi     = psi    +  gr*(dsig(i)**2)*xsj
120     continue
        psi = psi +  gr*dsig(2)**2*xsj +
```



```
     1       ((dsig(1)+dsig(3)+dsig(4))**2)*d(18)*xsj
200   continue
      eerror = eerror + psis
      if(elproj.ne.0.0d0) then
        psi     = sqrt(abs(psi))/ebar
        psis    = 20.0*sqrt(abs(psis)/elproj*numel)
        if(mct.eq.0) then
          write(iow,2000)
          if(ior.lt.0) write(*,2000)
          mct = 50
        endif
        mct = mct - 1
        write(iow,2001) n,psis,psi
        if(ior.lt.0) write(*,2001) n,psis,psi
      endif
      return
2000  format('  M e s h   R e f i n e m e n t s   f o r   5%',
     1      '  E r r o r'//'    elmt    h-sigma    h-energy'/)
2001  format(i8,1p2e12.4)
      end
```

(b) El archivo PCELM2.FOR contiene un módulo de elemento para elasticidad lineal bidimensional isótropa. Debe introducirse información de control de forma que

$$\mathrm{NDM} = 2$$
$$\mathrm{NDF} \geq 2$$
$$\mathrm{NEN} \geq 4$$

El elemento permite analizar geometrías de deformación plana y axial-simétricas, con especificación de las fuerzas nodales. El elemento se basa en la formulación mixta de tres campos discutida en el Capítulo 12, que conduce a una matriz de desplazamientos-deformaciones modificada, **B**-barra. En consecuencia, el elemento se puede usar para materiales cuasi-incompresibles. El elemento usa los subprogramas de funciones de forma isoparamétricas contenidas en el archivo PCMAC3.FOR, pero su uso está restringido a elementos cuadriláteros de cuatro nodos solamente. La numeración local para este elemento se muestra en la Figura 15.25. El elemento calcula los valores de tensiones tanto elementales como nodales. No se incluyen estimadores de error en este elemento debido a limitaciones de espacio.

Los parámetros del grupo de propiedades de los materiales que siguen a los datos descritos en la Tabla 15.8 se introducen como sigue:

Grupo de Propiedades 1.) FORMAT—3F10.0

Columna	*Descripción*
1 a 10	E, módulo de Young
11 a 20	ν, coeficiente de Poisson

Grupo de Propiedades 2.) FORMAT—2I10

Columna	*Descripción*	
1 a 10	IT, tipo de Problema	$IT = 1$ tensión plana $IT = 2$ deformación plana
11 a 20	IB, matriz de deformación	$IB = 0$ para **B**-barra $IB = 1$ para **B**, formulación en desplazamientos
21 a 30	ρ, densidad	

El archivo PCELM2.FOR contiene los siguientes subprogramas

Nombre	*Tipo*	*Descripción*
ELMT02	SUBRUTINA	Entrada de parámetros: cálculo de vectores/matrices de EF
GVC2	SUBRUTINA	Cálculo de integrales de volumen de las funciones de forma
BMAT02	SUBRUTINA	Cáculo de la matrix desplazamientos -deformación
STRN02	SUBRUTINA	Cálculo de las deformaciones en un punto
STCN02	SUBRUTINA	Cálculo de las tensiones nodales
MATL02	SUBRUTINA	Entrada de los valores de los parámetros de los materiales
MODL02	SUBRUTINA	cálculo de las tensiones y matriz constitutiva


```
$NOFLOATCALLS
      subroutine elmt02(d,ul,xl,ix,tl,s,p,ndf,ndm,nst,isw)
c....plane/axisymmetric linear element routine -- bbar formulation
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      logical flg
      integer*2 ix(1)
      real   xl(ndm,1),aa,dm
      real*8 d(1),ul(ndf,1),s(nst,1),p(1),eps(4),sig(6),bbar(4,2,4),
     1    bbd(4,2),sg(4),tg(4),wg(4),shp3(4,4),shp(3,4,4),xsj(4),ang
      common /adata/ aa(16000)
      common /cdata/ numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /eldata/ dm,n,ma,mct,iel,nel
      common /elcom2/ g(2,4),ad(4,4)
      common /iofile/ ior,iow
c....go to correct array processor
      go to(1,2,3,3,5,3,7,3), isw
      return
c....input material properties
    1 call matl02(d,ityp,ib)
      d(5) = ityp
      d(6) = ib
      l    = 2
      call pgauss(l,lint,sg,tg,wg)
      return
c....check for element errors
    2 call ckisop(ix,xl,shp,ndm)
      return
c
c....compute tangent stiffness and residual force vector
    3 type = d(5)
      ib   = d(6)
c....compute volumetric integrals
      call pconsd(g,8,0.0d0)
      do 300 l = 1,lint
        call shape(sg(l),tg(l),xl,shp(1,1,l),xsj(l),ndm,4,ix,.false.)
        call gvc2(shp(1,1,l),shp3(1,l),xsj(l),wg(l),xl,type,ndm)
300   continue
      vol  = xsj(1) + xsj(2) + xsj(3) + xsj(4)
      do 310 i = 1,4
        g(1,i) = g(1,i)/vol
        g(2,i) = g(2,i)/vol
310   continue
      if(isw.eq.4) go to 4
      if(isw.eq.8) go to 8
      flg  = isw .eq. 3
      do 400 l = 1,lint
c....compute stress, strain, and material moduli
        call strn02(shp(1,1,l),xl,ul,type,xr0,xz0,ndm,ndf,eps)
```

```
        call modl02(d,ul,eps,sig,xsj(l),ndf,ib)
        i1 = 0
        do 380 i = 1,4
c....compute the internal stress divergence term
          p(i1+1) = p(i1+1) - shp(1,i,l)*sig(1) - shp(2,i,l)*sig(2)
     1                      - shp3(i,l)*sig(4)
          p(i1+2) = p(i1+2) - shp(2,i,l)*sig(3) - shp(1,i,l)*sig(2)
c....compute stiffness
          if(flg) then
c....compute b-bar matrix
            call bmat02(shp3(i,l),shp(1,i,l),g(1,i),bbar(1,1,i),ib)
            do 320 ii = 1,2
            do 320 jj = 1,4
              bbd(jj,ii) = dot(bbar(1,ii,i),ad(1,jj),4)
320         continue
            j1 = 0
            do 360 j  = 1,i
              do 340 ii = 1,2
              do 340 jj = 1,2
                s(ii+i1,jj+j1) = s(ii+i1,jj+j1)
     1                         + dot(bbd(1,ii),bbar(1,jj,j),4)
340           continue
360         j1 = j1 + ndf
          endif
380     i1 = i1 + ndf
400   continue
c....form lower part by symmetry
      if(flg) then
        do 410 i = 1,nst
        do 410 j = 1,i
          s(j,i) = s(i,j)
410     continue
      endif
      return
c
c....compute stresses at center of element
   4  call shape(0.0d0,0.0d0,xl,shp,xsj,ndm,4,ix,.false.)
      call strn02(shp,xl,ul,type,rr,zz,ndm,ndf,eps)
      call modl02(d,ul,eps,sig,1.0d0,ndf,ib)
      call pstres(sig,sig(5),sig(6),ang)
c....output stresses
      mct = mct - 2
      if(mct.le.0) then
        call prthed(iow)
        write(iow,2001)
        if(ior.lt.0) write(*,2001)
        mct = 50
      endif
      write(iow,2002) n,ma,sig,rr,zz,ang
      if(ior.lt.0) write(*,2002) n,ma,sig,rr,zz,ang
      return
c
c....compute lumped mass matrix
   5  do 530 l = 1,lint
        call shape(sg(l),tg(l),xl,shp,xsj,ndm,4,ix,.false.)
c....compute radius and multiply into jacobian for axisymmetry
```



```
        if(d(5).ne.0.0d0) then
          rr = 0.0
          do 500 j = 1,4
            rr = rr + shp(3,j,l)*xl(1,j)
500       continue
          xsj(l) = xsj(l)*rr
        endif
        xsj(l) = wg(l)*xsj(l)*d(4)
c....for each node j compute db = rho*shape*dv
        j1 = 1
        do 520 j = 1,4
          p(j1  ) = p(j1) + shp(3,j,l)*xsj(l)
          p(j1+1) = p(j1)
          j1 = j1 + ndf
520     continue
530   continue
      return
   7  return
c
c....stress computations for nodes
   8  call stcn02(ix,d,xl,ul,shp,aa,aa(numnp+1),ndf,ndm,
     1   numnp,sg,tg,sig,eps,lint,type,ib)
      return
c
c....formats for input-output
1000  format(2i5)
1001  format(a5,1x,2i10,f10.0/9f10.0)
2001  format('  Element Stresses'//'  elmt  matl  11-stress  12-stress',
     1 '  22-stress  33-stress   1-stress   2-stress'/'  1-coord',
     2 '  2-coord   ',42x,'angle')
2002  format(2i6,6e11.3/2f9.3,41x,f8.2/1x)
      end
c
      subroutine gvc2(shp,shp3,xsj,wg,xl,type,ndm)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
c....compute the volumetric integrals for the bbar
      real   xl(ndm,4)
      real*8 shp(3,4),shp3(4)
      common /elcom2/ g(2,4),ad(4,4)
      if(type.ne.0.0d0) then
        rr = 0.0
        do 100 i = 1,4
          rr = rr + shp(3,i)*xl(1,i)
100     continue
        xsj = xsj*rr
      else
      endif
      xsj = xsj*wg
      do 110 i = 1,4
        shp3(i) = 0.0
        if(type.ne.0.0d0) shp3(i) = shp(3,i)/rr
        g(1,i) = g(1,i) + (shp(1,i) + shp3(i))*xsj
        g(2,i) = g(2,i) +  shp(2,i)*xsj
110   continue
      return
      end
```

```
c
      subroutine bmat02(sh3,shp,g,bbar,ib)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      real*8 shp(3),g(1),bbar(4,2)
c....bbar matrix for plane and axisymmetric problems
      bbar(1,1) = shp(1)
      bbar(2,1) = 0.0
      bbar(3,1) = sh3
      bbar(4,1) = shp(2)
      bbar(1,2) = 0.0
      bbar(2,2) = shp(2)
      bbar(3,2) = 0.0
      bbar(4,2) = shp(1)
c....correct for the b-bar effects
      if(ib.eq.0) then
        bb1 = (g(1) - shp(1) - sh3)/3.0
        bb2 = (g(2) - shp(2))/3.0
        do 100 i = 1,3
          bbar(i,1) = bbar(i,1) + bb1
          bbar(i,2) = bbar(i,2) + bb2
100     continue
      endif
      return
      end
c
      subroutine strn02(shp,xl,ul,type,xr0,xz0,ndm,ndf,eps)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      real   xl(ndm,1)
      real*8 ul(ndf,1),eps(4),shp(3,1)
c....compute strain and incremental tensors for constitutive equations
      xr0   = 0.0
      xz0   = 0.0
      call pconsd(eps,4,0.0d0)
      do 310 k = 1,4
        xr0   = xr0    + shp(3,k)*xl(1,k)
        xz0   = xz0    + shp(3,k)*xl(2,k)
        eps(1) = eps(1) + ul(1,k)*shp(1,k)
        eps(2) = eps(2) + ul(2,k)*shp(2,k)
        eps(3) = eps(3) + shp(3,k)*ul(1,k)
        eps(4) = eps(4) + (ul(2,k)*shp(1,k) + ul(1,k)*shp(2,k))/2.
310   continue
      eps(3) = type*eps(3)/xr0
      return
      end
c
      subroutine stcn02(ix,d,xl,ul,shp,dt,st,ndf,ndm,
     1                  nnp,sg,tg,sig,eps,lint,type,ib)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      integer*2 ix(1)
      real   dt(nnp),st(nnp,1),xl(ndm,1)
      real*8 d(1),ul(ndf,1),sig(1),eps(1),shp(3,4),sg(1),tg(1)
      do 200 jj = 1,4
c....compute stresses at nodes from history terms
        call shape(sg(jj),tg(jj),xl,shp,xsj,ndm,4,ix,.false.)
        call strn02(shp,xl,ul,type,rr,zz,ndm,ndf,eps)
        call modl02(d,ul,eps,sig,1.0d0,ndf,ib)
```



```
        do 100 ii = 1,4
          ll = abs(ix(ii))
          if(ll.gt.0) then
            shpj = shp(3,i)*xsj
            dt(ll) = dt(ll) + shpj
            do 50 i = 1,4
50          st(ll,i) = st(ll,i) + sig(i)*shpj
          endif
100     continue
200   continue
      return
      end
c
      subroutine matl02(d,it,ib)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      real*8 d(1)
      character*12 wa(2),wb(2),yyy*80
c....parameter specification for FEAP materials
      common /iofile/ ior,iow
c
      data wa/' P l a n e  ',' A x i s y m'/
      data wb/' S t r a i n',' m e t r i c'/
1     if(ior.lt.0) write(*,3000)
      call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1000,err=101) ee,xnu
      if(ior.lt.0) write(*,3001)
      call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1001,err=101) it,ib,d(4)
      it = max(0,min(1,it))
      ib = max(0,min(1,ib))
      d(1) = ee/(1. - 2.*xnu)/3.0
      d(2) = ee/(1.+xnu)/2.
      write(iow,2000) wa(it+1),wb(it+1),ee,xnu,d(4),ib
      if(ior.lt.0) write(*,2000) wa(it+1),wb(it+1),ee,xnu,d(4),ib
      return
101   call perror('PCELM4',yyy)
      go to 1
c....formats
1000  format(2f10.0)
1001  format(2i10,f10.0)
2000  format(/' E l a s t i c   M a t e r i a l  '/5x,2a12/
     2 10x,'Young modulus (E)    ',e15.5/
     3 10x,'Poisson Ratio (nu)   ',e15.5/
     4 10x,'Density        (rho) ',e15.5/
     5 10x,'Strain-B   (0=bbar) ',i5/)
3000  format(' Input:  E, nu'/3x,'>',$)
3001  format(' Input:  it(0=plane,1=axisy), ib(0=bbar), rho'/' >',$)
      end
c
      subroutine modl02(d,ul,eps,sig,xsj,ndf,ib)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      real*8 d(15),ul(ndf,1),eps(4),sig(4)
      common /elcom2/ g(2,4),ad(4,4)
c....constitutive equation
      twog = (d(2) + d(2))*xsj
      elam = d(1)*xsj - twog/3.
```

```
c....compute trace of incremental strain
      treps = 0.0
      do 100 i = 1,4
        treps = treps + g(1,i)*ul(1,i) + g(2,i)*ul(2,i)
100   continue
c....compute the stress
      epstr  = eps(1)+eps(2)+eps(3)
      press = elam*epstr
      if(ib.eq.0) press = d(1)*xsj*treps - twog*epstr/3.0
      sig(1) = twog*eps(1) + press
      sig(2) = twog*eps(4)
      sig(3) = twog*eps(2) + press
      sig(4) = twog*eps(3) + press
c....set up elastic moduli
      do 110 i = 1,3
        do 105 j = 1,3
          ad(i,j) = elam
105     continue
        ad(i,4) = 0.0
        ad(4,i) = 0.0
        ad(i,i) = elam + twog
110   continue
      ad(4,4) = d(2)*xsj
c
      return
      end
```


(c) El archivo PCELM3.FOR contiene un módulo de elemento para elasticidad lineal bidimensional isótropa. Debe introducirse información de control de forma que

$$\mathrm{NDM} = 2$$
$$\mathrm{NDF} \geq 2$$
$$\mathrm{NEN} \geq 4$$

El elemento permite analizar geometrías de tensión y deformación plana, con especificación de las fuerzas nodales. El elemento se basa en la formulación mixta de dos campos discutida en el Capítulo 13. El desarrollo original se debe a Pian y Sumihara,[36] y el elemento se encuentra entre los elementos cuadriláteros de cuatro nodos más precisos desarrollados hasta el momento. El elemento puede usarse también para materiales que son cuasi-imcompresibles. La numeración local para este elemento se muestra en la Figura 15.25. El elemento calcula valores de tensiones tanto elementales como nodales. No se incluyen estimadores de error en este elemento debido a limitaciones de espacio.

Los parámetros de grupo de propiedades de los materiales que siguen a los datos descritos en la Tabla 15.8 se introducen como sigue:

Grupo de Propiedades1.) FORMAT—4F10.0,I10

Columna	*Descripción*
1 a 10	E, módulo de Young
11 a 20	ν, coeficiente de Poisson
21 a 30	ρ, densidad
31 a 40	Espesor (sólo tensión plana)
41 a 50	I, Tipo de Problema: $I = 1$ tensión plana $I = 2$ deformación plana

El archivo PCELM3.FOR contiene los siguientes subprogramas:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*
ELMT03	SUBRUTINA	Entrada de parámetros: cálculo de vectores/matrices de EF
PIAN03	SUBRUTINA	Cálculo de la rigidez y fuerzas residuales
STCN03	SUBRUTINA	Cálculo de las tensiones nodales

```
$NOFLOATCALLS
      subroutine elmt03(d,ul,xl,ix,tl,s,p,ndf,ndm,nst,isw)
c....Plane stress/strain Pian Sumihara Element
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      integer*2 ix(1)
      real   xl(ndm,1),dm,ap
      real*8 d(1),ul(ndf,1),s(nst,1),p(1),sig(4),p1,p2,p3
      character*4 wd(2),yyy*80
```

```
      common /adata/ ap(16000)
      common /cdata/  numnp,numel,nummat,nen,neq
      common /eldata/ dm,n,ma,mct,iel,nel
      common /elcom3/ xs,xt,xh,ys,yt,yh,xj0,xj1,xj2,a1(3),a2(3),beta(5)
      common /iofile/ ior,iow
      data wd/'ress','rain'/
c....go to correct array processor
      go to(1,2,3,3,3,3,7,3), isw
c....input/output material properties
    1 if(ior.lt.0) write(*,3000)
      call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1000,err=11) (d(i),i=8,11),is
      is = max(1,min(is,2))
      d(12)= is
      d(2) = d(9)*d(8)/(1.+d(9))/(1.-is * d(9))
      d(4) = d(8)/(1.+d(9))
      d(3) = d(4)/2.
      d(1) = d(2) + d(4)
c....set parameters for plane stress (is = 1)
      if(is.eq.1) then
        if(d(11).le.0.0d0) d(11) = 1.0
        d(5) =  1./d(8)
        d(6) = -d(9)/d(8)
        d(13)=  0.0
c....set parameters for plane strain (is = 2)
      else
        d(11)=  1.0
        d(5) =  (1.-d(9))/d(4)
        d(6) = -d(9)/d(4)
        d(13)=  d(9)
      endif
      write(iow,2000) wd(is),(d(i),i=8,11)
      if(ior.lt.0) write(*,2000) wd(is),(d(i),i=8,11)
      d(10) = d(10)*d(11)
      return
   11 call perror('PCEL03',yyy)
      go to 1
c....check mesh
    2 call ckisop(ix,xl,ap,ndm)
      return
c....Compute the Pian-Sumihara arrays for elastic: compute jacobian
    3 xs = (-xl(1,1)+xl(1,2)+xl(1,3)-xl(1,4))/4.
      ys = (-xl(2,1)+xl(2,2)+xl(2,3)-xl(2,4))/4.
      xt = (-xl(1,1)-xl(1,2)+xl(1,3)+xl(1,4))/4.
      yt = (-xl(2,1)-xl(2,2)+xl(2,3)+xl(2,4))/4.
      xh = ( xl(1,1)-xl(1,2)+xl(1,3)-xl(1,4))/4.
      yh = ( xl(2,1)-xl(2,2)+xl(2,3)-xl(2,4))/4.
      xj0 = xs*yt - xt*ys
      xj1 = xs*yh - xh*ys
      xj2 = xh*yt - xt*yh
      if(isw.eq.5) go to 5
      ssa = xj1/xj0/3.
      tta = xj2/xj0/3.
c....form stiffness for elastic part and compute the beta parameters
      call pian03(d,ul,s,p,nst,ndf,isw)
      if(isw.eq.4) go to 4
```



```
      if(isw.eq.8) go to 8
c....compute symetric part of s
        do 334 i = 1,nst
          do 332 j = i,nst
            s(j,i) = s(i,j)
  332     continue
  334   continue
      return
c....compute the stresses
    4 is = d(12)
c....compute the stresses at the center and the specified points
      ssg    = -ssa*beta(5)
      ttg    = -tta*beta(4)
      sig(1) =  beta(1) + a1(1)*ttg + a2(1)*ssg
      sig(2) =  beta(2) + a1(2)*ttg + a2(2)*ssg
      sig(3) =  beta(3) + a1(3)*ttg + a2(3)*ssg
      sig(4) =  d(13)*(sig(1)+sig(2))
  330 continue
      call pstres(sig,p1,p2,p3)
      xx = (xl(1,1)+xl(1,2)+xl(1,3)+xl(1,4))/4.0
      yy = (xl(2,1)+xl(2,2)+xl(2,3)+xl(2,4))/4.0
      mct = mct - 1
      if(mct.gt.0) go to 450
      call prthed(iow)
      write(iow,2001) wd(is)
      if(ior.lt.0) write(*,2001) wd(is)
      mct = 25
  450 write(iow,2002) n,ma,xx,yy,p1,p2,p3,(sig(i),i=1,4)
      if(ior.lt.0) write(*,2002) n,ma,xx,yy,p1,p2,p3,
     1             (sig(i),i=1,4)
      return
c....compute a lumped mass matrix
    5 p(      1) = (xj0-(xj1+xj2)/3.)*d(10)
      p( ndf+1) = (xj0+(xj1-xj2)/3.)*d(10)
      p(2*ndf+1) = (xj0+(xj1+xj2)/3.)*d(10)
      p(3*ndf+1) = (xj0-(xj1-xj2)/3.)*d(10)
      do 510 i = 2,nst,ndf
        p(i) = p(i-1)
  510 continue
      return
c....error estimator goes here!
    7 continue
      return
c....compute the nodal stress values
    8 call stcn03(ix,d,ssa,tta,ap,ap(numnp+1),numnp)
      return
c....format statements
 1000 format(4f10.0,i10)
 2000 format(5x,'Plane St',a4,' Element'//10x,'modulus      =',e12.5/
     1  10x,'poisson ratio=', f8.5/10x,'mass density =',e12.5/
     2  10x,'thickness    =', e12.5)
 2001 format(5x,'Plane St',a4,' Stresses'//'  element material',
     1  5x,'1-coord',5x,'2-coord',8x,'sig1',8x,'sig2',3x,'angle'/
     2  38x,'s-11',8x,'s-12',8x,'s-22',8x,'s-33'/1x)
 2002 format(2i9,2f12.4,2e12.4,f8.2/30x,4e12.4)
 3000 format(' Input: e, nu, rho, th, is (1=pl.stress,2=pl.strain)'/
```

```
1     3x,'mate>',$)
      end
c
      subroutine pian03(d,ul,s,p,nst,ndf,isw)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
c....pian-sumihara stiffness matrix developed explicitly
      real*8 ul(ndf,1),s(nst,1),p(1),d(1),rr(5),x1(4),x2(4),y1(4),y2(4)
1           ,ax(4),bx(4),cx(4),ay(4),by(4),cy(4)
      common /elcom3/ xs,xt,xh,ys,yt,yh,xj0,xj1,xj2,a1(3),a2(3),beta(5)
c..1.)set up stress interpolants for the 4-5 term
      r1 = xj1/xj0
      r2 = xj2/xj0
      a1(1) = xs*xs
      a1(2) = ys*ys
      a1(3) = xs*ys
      a2(1) = xt*xt
      a2(2) = yt*yt
      a2(3) = xt*yt
c..2.)set up shape function coefficients - jacobian weighted
      ax(1) = -yt + ys
      ax(2) =  yt + ys
      ax(3) = -ax(1)
      ax(4) = -ax(2)
      bx(1) = -yh - ys
      bx(2) = -bx(1)
      bx(3) =  yh - ys
      bx(4) = -bx(3)
      cx(1) =  yt + yh
      cx(2) = -yt + yh
      cx(3) = -cx(2)
      cx(4) = -cx(1)
      ay(1) =  xt - xs
      ay(2) = -xt - xs
      ay(3) = -ay(1)
      ay(4) = -ay(2)
      by(1) =  xh + xs
      by(2) = -by(1)
      by(3) = -xh + xs
      by(4) = -by(3)
      cy(1) = -xt - xh
      cy(2) =  xt - xh
      cy(3) = -cy(2)
      cy(4) = -cy(1)
c..3.)compute volume and stabilization h-array
      vol = 4.*xj0
      d11 = d(1)/vol
      d12 = d(2)/vol
      d33 = d(3)/vol
      hy  = vol*3.
      hx  = hy*d(5)
      h44 = hx*(1.-r2*r2/3.)*(a1(1)+a1(2))**2
      h55 = hx*(1.-r1*r1/3.)*(a2(1)+a2(2))**2
      h45 =-(r1*r2/3.)*(hx*(xs*xt+ys*yt)**2+d(6)*hy*(ys*xt-xs*yt)**2)
c..4.)Invert stabilization h-array
      hx  = h44*h55 - h45*h45
      hy  = h55/hx
```



```
      h55 = h44/hx
      h45 =-h45/hx
      h44 = hy
c..5.)Compute the current stress parameters
      call pconsd(rr,5,0.0d0)
      do 50 j = 1,4
        hx = cx(j) - r2*ax(j)
        hy = cy(j) - r2*ay(j)
        x1(j) = a1(1)*hx + a1(3)*hy
        x2(j) = a1(2)*hy + a1(3)*hx
        hx = bx(j) - r1*ax(j)
        hy = by(j) - r1*ay(j)
        y1(j) = a2(1)*hx + a2(3)*hy
        y2(j) = a2(2)*hy + a2(3)*hx
        rr(1) = rr(1) + ax(j)*ul(1,j)
        rr(2) = rr(2) + ay(j)*ul(2,j)
        rr(3) = rr(3) + ay(j)*ul(1,j) + ax(j)*ul(2,j)
c......(stabilization terms)
        rr(4) = rr(4) + x1(j)*ul(1,j) + x2(j)*ul(2,j)
        rr(5) = rr(5) + y1(j)*ul(1,j) + y2(j)*ul(2,j)
50    continue
      beta(1) = d11*rr(1) + d12*rr(2)
      beta(2) = d12*rr(1) + d11*rr(2)
      beta(3) = d33*rr(3)
      beta(4) = (h44*rr(4) + h45*rr(5))*3.
      beta(5) = (h45*rr(4) + h55*rr(5))*3.
c..6.)Form stiffness matrix for 1-pt (constant) terms
      if(isw.eq.3) then
        d11 = d11*d(11)
        d12 = d12*d(11)
        d33 = d33*d(11)
        i1 = 1
        do 110 i = 1,2
          bd11 = ax(i)*d11
          bd12 = ax(i)*d12
          bd13 = ay(i)*d33
          bd21 = ay(i)*d12
          bd22 = ay(i)*d11
          bd23 = ax(i)*d33
          j1   = i1
          do 100 j = i,2
            s(i1  ,j1  ) = bd11*ax(j) + bd13*ay(j)
            s(i1  ,j1+1) = bd12*ay(j) + bd13*ax(j)
            s(i1+1,j1  ) = bd21*ax(j) + bd23*ay(j)
            s(i1+1,j1+1) = bd22*ay(j) + bd23*ax(j)
            j1 = j1 + ndf
100       continue
          i1 = i1 + ndf
110     continue
c..7.)Copy other parts from computed terms
        i1 = ndf + ndf
        do 120 i = 1,i1
        do 120 j = i,i1
          s(i   ,j+i1) =-s(i,j)
          s(i+i1,j+i1) = s(i,j)
120     continue
```

```
          j1 = i1 + ndf
          s(2    ,i1+1) =-s(2,1)
          s(ndf+2,j1+1) =-s(ndf+2,ndf+1)
          s(ndf+1,i1+1) =-s(1,ndf+1)
          s(ndf+1,i1+2) =-s(2,ndf+1)
          s(ndf+2,i1+1) =-s(1,ndf+2)
          s(ndf+2,i1+2) =-s(2,ndf+2)
c..8.)Add stabilization matrix
          h44 = h44*d(11)
          h45 = h45*d(11)
          h55 = h55*d(11)
          j1 = 1
          do 210 j = 1,4
            bd11 = h44*x1(j) + h45*y1(j)
            bd12 = h44*x2(j) + h45*y2(j)
            bd21 = h45*x1(j) + h55*y1(j)
            bd22 = h45*x2(j) + h55*y2(j)
            i1 = 1
            do 200 i = 1,j
              s(i1  ,j1  ) = s(i1  ,j1  ) + x1(i)*bd11 + y1(i)*bd21
              s(i1  ,j1+1) = s(i1  ,j1+1) + x1(i)*bd12 + y1(i)*bd22
              s(i1+1,j1  ) = s(i1+1,j1  ) + x2(i)*bd11 + y2(i)*bd21
              s(i1+1,j1+1) = s(i1+1,j1+1) + x2(i)*bd12 + y2(i)*bd22
              i1 = i1 + ndf
200         continue
            j1 = j1 + ndf
210       continue
        endif
c..9.)compute the residual force vector
        if(mod(isw,3).eq.0) then
c...a.)compute the constant part
          do 300 i = 1,5
            beta(i) = beta(i)*d(11)
300       continue
          do 310 i = 1,2
            p(2*i-1) = -(ax(i)*beta(1) + ay(i)*beta(3))
            p(2*i+3) = -p(2*i-1)
            p(2*i  ) = -(ay(i)*beta(2) + ax(i)*beta(3))
            p(2*i+4) = -p(2*i  )
310       continue
c...b.)compute the stabilization part
          do 320 i = 1,4
            p(2*i-1) = p(2*i-1) - (x1(i)*beta(4) + y1(i)*beta(5))/3.0
            p(2*i  ) = p(2*i  ) - (x2(i)*beta(4) + y2(i)*beta(5))/3.0
320       continue
        endif
        return
        end
c
        subroutine stcn03(ix,d,ssa,tta,dt,st,nnp)
        implicit real*8 (a-h,o-z)
        integer*2 ix(1)
        real   dt(nnp),st(nnp,1),ss(4),tt(4)
        real*8 d(1)
        common /elcom3/ xs,xt,xh,ys,yt,yh,xj0,xj1,xj2,a1(3),a2(3),beta(5)
        data ss/-1.0,1.0,1.0,-1.0/,tt/-1.0,-1.0,1.0,1.0/
```



```
c....compute stress projections
      do 200 jj = 1,4
        ll = abs(ix(jj))
        if(ll.gt.0) then
c....compute weighted stresses at nodes
          xsj = xj0 + ss(jj)*xj1 + tt(jj)*xj2
          ssg = (ss(jj) - ssa)*beta(5)
          ttg = (tt(jj) - tta)*beta(4)
          dt(ll)   = dt(ll)   + xsj
          sig1     = (beta(1) + a1(1)*ttg + a2(1)*ssg)*xsj
          sig2     = (beta(2) + a1(2)*ttg + a2(2)*ssg)*xsj
          sig3     = (beta(3) + a1(3)*ttg + a2(3)*ssg)*xsj
          st(ll,1) = st(ll,1) + sig1
          st(ll,2) = st(ll,2) + sig3
          st(ll,3) = st(ll,3) + sig2
          st(ll,4) = st(ll,4) + d(13)*(sig1+sig2)
        endif
200   continue
      return
      end
```

(d) El archivo PCELM4.FOR contiene el módulo de elemento para cálculos con una barra biarticulada elástica lineal en una, dos o tres dimensiones. Debe introducirse información de control de forma que

$$\begin{aligned} \text{NDM} &\quad 1,2 \text{ ó } 3 \\ \text{NDF} &= \text{NDM} \\ \text{NEN} &\geq 2 \end{aligned}$$

El elemento permite analizar estructuras de barras articuladas con especificación de las fuerzas nodales. El elemento se basa en la formulación en desplazamientos y usa campos lineales de desplazamientos entre los extremos de los elementos de barra. El elemento calcula sólo valores de fuerzas elementales; no se incluyen estimadores de error para este elemento.

Los parámetos del grupo de propiedades de los materiales que siguen a los datos descritos en la Tabla 15.8 se introducen como sigue:

Grupo de Propiedades 1.) FORMAT—3F10.0

Columna	*Descripción*
1 a 10	E, módulo de Young
11 a 20	A, área de la sección recta
21 a 30	ρ, densidad (por unidad de volumen)

El archivo PCELM4.FOR consiste en el siguiente subprograma:

Nombre	*Tipo*	*Descripción*
ELMT04	SUBRUTINA	Entrada de parámetros y cálculo de vectores/matrices de EF

```
$NOFLOATCALLS
      subroutine elmt04(d,u,x,ix,t,s,p,ndf,ndm,nst,isw)
c....elastic 1,2, or 3d truss element routine
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      real   x(ndm,1),xx(3),dm
      real*8 d(1),u(ndf,1),s(nst,1),p(1),db(3),dx(3)
      character yyy*80
      common /eldata/ dm,n,ma,mct,iel,nel
      common /iofile/ ior,iow
      go to (1,3,3,3,3,3,8,8),isw
c....input material properties
1     if(ior.lt.0) write(*,3000)
      call pintio(yyy,10)
      read(yyy,1000,err=110) d(1),d(2),d(3)
      d(4) = d(1)*d(2)
      d(5) = d(3)*d(2)
      call pconsr(xx,3,0.0)
      write(iow,2000) d(1),d(2),d(3)
      if(ior.lt.0) write(*,2000) d(1),d(2),d(3)
      return
110   call perror('PCELM9',yyy)
```



```
      go to 1
c....compute element properties
3     if(ndf.ne.ndm) then
        write(iow,4001)
        if(ior.lt.0) write(*,4001)
        stop
      endif
      xl = 0.0
      eps = 0.0
      do 31 i = 1,ndm
        dx(i) = x(i,2) - x(i,1)
        xl = xl + dx(i)**2
        eps = eps + dx(i)*(u(i,2)-u(i,1))
        xx(i) = (x(i,2) + x(i,1))/2.
31    continue
c....error check on length
      if(isw.eq.2) then
        if(xl.le.0.0d0. or. x(1,1).eq.-999.0 .or. x(1,2).eq.-999.) then
          write(iow,4000) n,x(1,1),x(1,2)
          if(ior.lt.0) write(*,4000) n,x(1,1),x(1,2)
        endif
        return
      endif
      eps = eps/xl
      sig = d(4)*eps
c....compute the element stiffness matrix
      if(isw.eq.3) then
        xl = xl*sqrt(xl)
        do 32 i = 1,ndm
          db(i) = d(4)*dx(i)
          dx(i) = dx(i)/xl
32      continue
        do 33 i = 1,ndm
        do 33 j = 1,ndm
          s(i,j) = db(i)*dx(j)
          s(i+ndf,j+ndf) = s(i,j)
          s(i,j+ndf) = -s(i,j)
          s(i+ndf,j) = -s(j,i)
33      continue
c....output stress and strain in element
      elseif(isw.eq.4) then
        mct = mct - 1
        if(mct.le.0) then
          call prthed(iow)
          write(iow,2001)
          if(ior.lt.0) write(*,2001)
          mct = 50
        endif
        write(iow,2002) n,ma,xx,sig,eps
        if(ior.lt.0) write(*,2002) n,ma,xx,sig,eps
c....compute element lumped mass matrix
      elseif(isw.eq.5) then
        xl = d(5)*sqrt(xl)/2.0
        do 34 i = 1,ndm
          p(i     ) = xl
          p(i+ndf) = xl
```

```
34        continue
        endif
c....form a residual if needed
        if(mod(isw,3).eq.0) then
          sig = sig/sqrt(xl)
          do 35 i = 1,ndf
            p(i) = dx(i)*sig
            p(i+ndf) = -p(i)
35        continue
        endif
8       return
c....formats
1000  format(3f10.0)
2000  format(5x,'T r u s s    E l e m e n t'//10x,'Modulus =',e13.5/10x,
     1   'Area     =',e13.5/10x,'Density =',e13.5)
2001  format(5x,'T r u s s    E l e m e n t'//' elem mate',
     1  4x,'1-coord',4x,'2-coord',4x,'3-coord',5x,'force',7x,'strain')
2002  format(2i5,3f11.4,2e13.5)
3000  format(' Input:  E, A, rho'/3x,'>',$)
4000  format(' ** ERROR ** Truss element ',i4,' has zero length or'/
     1        '              undefined points:  1=',e10.3,' , 2=',e10.3)
4001  format(' ** ERROR ** Truss element must have ndm = ndf!')
      end
```

Referencias

1. O.C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method*, 3rd ed., McGraw-Hill, London, 1977.
2. B.M. IRONS, "A frontal solution program", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **2**, 5-32, 1970.
3. E. HINTON y D.R.J. OWEN, *Finite Element Programming*, Academic Press, 1977.
4. R.L. TAYLOR, "Solution of linear equations by a profile solver", *Eng. Comput.*, **2**, 344-50, 1985.
5. Graphics Developement Toolkit, IBM Personal Computer Software, Boca Raton, Florida, 1984.
6. P. HOOD, "Frontal solution program for unsymmetric matrices", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **10**, 379-400, 1976.
7. O.C. ZIENKIEWICZ y D.V. PHILLIPS, "An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by isoparametric coordinates", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **3**, 519-28, 1971.
8. THOMAS J.R. HUGHES, *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1987.
9. W. PILKEY, K. SACZALSKI, y H. SCHAEFFER (eds), *Structural Mechanics Computer Programs*, University Press of Virginia Charlottesville, 1974.
10. H.H. FONG, "Interactive graphics and commercial finite element codes", Mechanical Engineering ASME 106, June 1984.
11. B.M. IRONS, "A technique for degenerating brick type isoparametric elements using hierarchical midside nodes", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **8**, 209-11, 1973.

12. R.L. WILSON, y S. J. SACKETT, "Direct solution of equations by frontal and variable band, active columm methods", in *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics* (eds W. Wunderlich, E. Stein, y K.-J. Bathe), Springer-Verlag, 1981.
13. N.E. GIBBS, W.G. POOLE, JR, y P.K. STOCKMEYER, "An algorithm for reducing the bandwidth and profile of a sparse matrix", *SIAM J. Num. Anal.*, **13**, 236-50, 1976.
14. W.H. LIU y A.H. SHERMAN, "Comparative analysis of the Cuthill-McKee and the reserved Cuthill-McKee ordering algorithms for sparse matrices", *SIAM J. Num. Anal.*, **13**, 198-213, 1976.
15. M. HOIT y E.L. WILSON, "An equation numbering algorithm based on a minimun front criteria", *Comp. Struct.*, **16** 225-39, 1983.
16. M.G. KATONA y O.C. ZIENKIEWICZ, "A unified set of single step algorithms, Part 3: The Beta-m method, a generalization of the Newmark scheme", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **21**, 1345-59, 1985.
17. N.M. NEWMARK, "A method of computation for structural dynamics", *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, **85**, 67-94, 1959.
18. A.K. GUPTA y B. MOHRAZ, "A method of computing numerically integrated stiffness matrices",*Int. J. Num. Meth. Eng.*, **5**, 83-9, 1972.
19. E.L. WILSON, "SAP-a general structural analysis program for linear systems", *Nudl. Engr. Des.*, **25**, 257-74, 1973.
20. A. RALSTON, *A First Course in Numerical Analysis*, McGraw-Hill, 1965.
21. L. FOX, *An Introduction to Numerical Linear Algebra*, Oxford University Press, 1965.
22. J.H. WILKINSON y C. REINSCH, *Linear Algebra. Handbook for Automatic Computation*, **Vol. II**, Springer-Verlag, 1971.
23. G. STRANG, *Linear Algebra and Its Applications*, Academic Press, 1976.
24. C. MEYER, "Solution of equations; state-of-the-art", *J. Struct. Div. ASCE*, **99** (7), 1507-26,1973.
25. C. MEYER, "Special problems related to linear equation solvers", *J. Struct. Div. ASCE*, **101** (4), 869-90, 1975.
26. K.J. BATHE y E.L. WILSON, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, 1976.
27. A. JENNINGS, "A compact storage scheme for the solution of symmetric simultaneous equations", *Comp. J.*, 281-5, 1966.
28. D.P. MONDKAR y G.H. POWELL, "Towards optimal in-core equation solving", *Comp. Struct.*, **4**, 531-48, 1974.
29. C.A. FELIPPA, "Solution of linear equations with skyline-stored symmetric matrix",*Comp. Struct.*, **5**, 13-30, 1975.
30. E.L. WILSON, "SAP-80 structural analysis program for small or large computer systems" *Proc. CEPA Fall Conf.*, 1980.
31. T.J.R. HUGHES, I. LEVIT, y J. WINGET, "Element-by-element implicit algorithms for heat conduction",*J. Eng. Mech. ASCE*, **109** (2), 576-85, 1983.
32. T.J.R. HUGHES, I. LEVIT, y J. WINGET, "Element-by-element implicit algorithms for problems of structural and solid mechanics", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **36**, 241-54, 1983.
33. B.M. IRONS, Personal communication, 1970.

34. G. STRANG y G.J. FIX, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1973.
35. Fortran 77 Compiler for Personal Computers, MicroSoft Corporation, 1985.
36. T.H. PIAN y K. SUMIHARA, "Rational approach for assumed stress finite elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **20**, 1685-95, 1984.

Apéndice 1

ÁLGEBRA MATRICIAL

La mística que rodea al álgebra matricial se debe quizás a los textos sobre el tema, que exigen al estudiante "tragar demasiado" de una sola vez. Se encontrará que para seguir este libro y efectuar los cálculos necesarios sólo se necesita un conocimiento limitado de unas pocas definiciones básicas.

Definición de matriz

La relación lineal entre un sistema de variables x y b:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned} \tag{A1.1}$$

puede escribirse de manera abreviada como

$$[A]\{x\} = \{b\}$$

o bien (A1.1a)

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

donde

$$\mathbf{A} \equiv [A] = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} \equiv \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \tag{A1.2}$$

$$\mathbf{b} \equiv \{b\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

La notación anterior contiene en si misma la definición de matriz y del proceso de multiplicación. Las matrices se *definen* como "conjuntos de números" dispuestos como en (A1.2). La forma particular que agrupa a los números en una sola columna se llama vector o matriz columna. La multiplicación de una matriz por una matriz columna *está definida* por la equivalencia de los primeros miembros de las ecuaciones (A1.1) y (A1.1a).

A lo largo del texto se seguirá el convenio de usar negritas para definir matrices y columnas —generalmente las letras minúsculas denotarán vectores y las mayúsculas matrices—.

Si existe otra relación con las mismas constantes, pero con x y b diferentes, de manera que

$$\begin{aligned} a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 + a_{14}x'_4 &= b'_1 \\ a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 + a_{24}x'_4 &= b'_2 \\ a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 + a_{34}x'_4 &= b'_3 \end{aligned} \qquad (A1.3)$$

podremos escribir entonces

$$[A][X] = [B]$$

o bien (A1.4)

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

en la cual

$$\mathbf{X} \equiv [X] = \begin{bmatrix} x_1, & x'_1 \\ x_2, & x'_2 \\ x_3, & x'_3 \\ x_4, & x'_4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} \equiv [B] = \begin{bmatrix} b_1, & b'_1 \\ b_2, & b'_2 \\ b_3, & b'_3 \end{bmatrix} \qquad (A1.5)$$

lo que implica la agrupación ordenada de las dos expresiones (A1.1) y (A1.3):

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots, & a_{11}x'_1 + \cdots \\ a_{21}x_1 + \cdots, & a_{21}x'_1 + \cdots \\ a_{31}x_1 + \cdots, & a_{31}x'_1 + \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1, & b'_1 \\ b_2, & b'_2 \\ b_3, & b'_3 \end{bmatrix} \qquad (A1.4a)$$

Se ha visto, incidentalmente, que las matrices sólo pueden ser iguales cuando cada uno de sus componentes individuales sean iguales.

La expresión anterior define la multiplicación de matrices llenas, y es obvio que sólo tiene sentido si el número de columnas de **A** es igual al número de filas de **X** para una relación del tipo (A1.4). Una propiedad que distingue la multiplicación de matrices es que, en general,

$$\mathbf{AX} \neq \mathbf{XA}$$

es decir, la multiplicación de matrices no es conmutativa como en el álgebra ordinaria.

Suma y resta de matrices

Si se suman relaciones de la forma (A1.1) y (A1.3) se tiene entonces

$$\begin{aligned} a_{11}(x_1 + x'_1) + a_{12}(x_2 + x'_2) + a_{13}(x_3 + x'_3) + a_{14}(x_4 + x'_4) &= b_1 + b'_1 \\ a_{21}(x_1 + x'_1) + a_{22}(x_2 + x'_2) + a_{23}(x_3 + x'_3) + a_{24}(x_4 + x'_4) &= b_2 + b'_2 \\ a_{31}(x_1 + x'_1) + a_{32}(x_2 + x'_2) + a_{33}(x_3 + x'_3) + a_{34}(x_4 + x'_4) &= b_3 + b'_3 \end{aligned} \qquad (A1.6)$$

lo que también se deduce de

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{Ax}' = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = \mathbf{b} + \mathbf{b}' = \mathbf{b}' + \mathbf{b}$$

si se define la suma de matrices como simple suma de las componentes individuales de las matrices. Claramente, esto sólo puede hacerse si las dimensiones de las matrices son iguales, o sea, por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}, b_{12}, b_{13} \\ b_{21}, b_{22}, b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{12}, a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21}, a_{22} + b_{22}, a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

o (A1.7)

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

implica que cada componente de **C** es igual a la suma de las componentes correspondientes de **A** y **B**.

La sustracción obedece obviamente las mismas reglas.

Traspuesta de una matriz

Se trata simplemente de una definición para reordenar las componentes de una matriz de la manera siguiente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad (A1.8)$$

y se representa por el símbolo T como se muestra en la expresión anterior.

Su empleo no es obvio de inmediato, pero más adelante se hará referencia a la misma y aquí puede considerarse como una simple operación aislada.

Inversa de una matriz

Si en la relación (A1.1a) la matriz **A** es "cuadrada", es decir, representa los coeficientes de ecuaciones simultáneas del tipo (A1.1) cuyo número es igual al de incógnitas **x**, entonces en general es posible despejar las incógnitas **x** en función de los coeficientes conocidos **b**. Esta solución puede escribirse como

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \qquad (A1.9)$$

donde la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ se conoce como "inversa" de la matriz cuadrada **A**. Claramente $\mathbf{A}^{-1}$ es también cuadrada de las mismas dimensiones que **A**.

Se podría obtener (A1.9) multiplicando ambos miembros de (A1.1a) por $\mathbf{A}^{-1}$ y por tanto

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} \qquad (A1.10)$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz unidad cuyos términos "diagonales" valen uno y todos los demás son cero.

Si las ecuaciones son singulares y no tienen solución, entonces evidentemente no existe matriz inversa.

Suma de productos

En problemas de mecánica se encuentran frecuentemente un número de magnitudes, como fuerzas, que pueden agruparse en "vectores":

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix} \qquad (A1.11)$$

Éstas, a su vez, se encuentran generalmente asociadas a un mismo número de desplazamientos dados por otro vector, por ejemplo,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \qquad (A1.12)$$

Sabemos que el trabajo está representado como una suma de productos de fuerzas y desplazamientos:

$$W = \sum f_n u_n$$

Claramente la matriz resulta útil aquí, puesto que se puede escribir, siguiendo la primera regla del producto de matrices

$$W = [f_1, f_2, \ldots, f_n] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \mathbf{f}^T\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}^T\mathbf{f} \qquad (A1.13)$$

En este libro se hace uso frecuentemente de este hecho.

Traspuesta de un producto

Una operación que a veces se presenta es la de tomar la traspuesta de

un producto de matrices. Dejamos que el lector demuestre mediante las definiciones anteriores que

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \qquad (A1.14)$$

Matrices simétricas

En problemas de estructuras se encuentra con frecuencia matrices simétricas. Si un término de la matriz $\mathbf{A}$ se define como a_{ij}, se tiene entonces que para una matriz simétrica

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Puede demostrarse que la inversa de una matriz simétrica es siempre simétrica.

Partición

Es fácil demostrar que una matriz producto

$$\mathbf{A}\mathbf{B}$$

en la cual, por ejemplo,

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right]$$

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ \hdashline b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{array}\right]$$

puede obtenerse dividiendo cada matriz en submatrices, indicadas por las líneas punteadas, y aplicando las reglas de multiplicación de matrices primero a cada submatriz, como si fuese un número escalar y después efectuando nuevas multiplicaciones en la manera usual. Así, si se escribe

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

Entonces puede comprobarse que

$$\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

representa el producto completo, sin más que efectuar las multiplicaciones.

La característica esencial de la partición de matrices es que el tamaño de las subdivisiones ha de ser tal que los productos del tipo $\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1$ tengan sentido, es decir, que el número de columnas de $\mathbf{A}_{11}$ sea igual al número de filas de $\mathbf{B}_1$, etc. Si la definición anterior se cumple, entonces todas las operaciones posteriores pueden efectuarse a partir de las submatrices tratando cada una como si fuese un escalar.

Debe advertirse que toda matriz puede multiplicarse por un escalar (número). En este caso, obviamente, ya no es necesaria la condición de igualdad de las filas y columnas apropiadas.

Si una matriz simétrica se divide en un número igual de submatrices $\mathbf{A}_{ij}$ en filas y columnas, entonces

$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ji}^T$$

Problemas de autovalores

Un autovalor de una matriz simétrica $\mathbf{A}$ de tamaño $n \times n$ es un escalar λ_i que permite la solución de

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\boldsymbol{\phi}_i = 0 \qquad \text{y} \qquad \det|\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}| = 0 \qquad (A1.15)$$

Normalmente, hay n autovalores λ_i, y a cada uno le corresponde un vector $\boldsymbol{\phi}_i$. Se demuestra que dichos vectores son ortonormales, y se puede escribir

$$\boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_j = 0 \quad i \neq j \qquad\qquad \boldsymbol{\phi}_i \boldsymbol{\phi}_j = 1 \quad i = j$$

El conjunto completo de autovalores y autovectores se puede escribir de la forma

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad\qquad \boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1, \cdots, \boldsymbol{\phi}_n]$$

La matriz $\mathbf{A}$ se puede escribir en su *forma espectral*, tal como puede verificar el lector

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Phi} \Lambda \boldsymbol{\Phi}^T \qquad (A1.16)$$

El número de condicionamiento κ (que está relacionado con el error de redondeo en la solución) se define como

$$\kappa = \frac{|\lambda|_{max}}{|\lambda|_{min}} \qquad (A1.17)$$

Apéndice 2

ECUACIONES BÁSICAS DEL ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LOS DESPLAZAMIENTOS (CAPITULO 2)

Desplazamientos

(2.1) $$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{N}\mathbf{a}$$

Deformación

(2.2 – 2.3) $$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\mathbf{u} \approx \sum \mathbf{B}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{B}\mathbf{a}$$

(2.4) $$\mathbf{B}_i = \mathbf{S}\mathbf{N}_i \qquad \mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{N}$$

Relaciones de comportamiento de la elasticidad lineal entre tensiones y deformaciones

(2.5) $$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0$$

Ecuaciones aproximadas de equilibrio

(2.23) $$\mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{f} = \mathbf{r}$$

(2.24) $$\mathbf{K}_{ij} = \int_V \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j \, dV$$
$$\mathbf{f}_i = -\int_V \mathbf{N}_i^T \mathbf{b} \, dV - \int_A \mathbf{N}_i^T \bar{\mathbf{t}} \, dA - \int_V \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \, dV + \int_V \mathbf{B}_i^T \boldsymbol{\sigma}_0 \, dV$$

Apéndice 3

ALGUNAS FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN PARA TRIÁNGULOS (FIGURA 3.1)

Sea un triángulo definido en el plano xy por tres puntos (x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_m, y_m) con el origen de coordenadas en el centro de gravedad, es decir,

$$\frac{x_i + x_j + x_m}{3} = \frac{y_i + y_j + y_m}{3} = 0$$

Entonces, integrando sobre el área del triángulo

$$\int x \, dx \, dy = \int y \, dx \, dy = 0$$

$$\int dx \, dy = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \Delta = \text{área del triángulo}$$

$$\int x^2 \, dx \, dy = \frac{\Delta}{12}(x_i^2 + x_j^2 + x_m^2)$$

$$\int y^2 \, dx \, dy = \frac{\Delta}{12}(y_i^2 + y_j^2 + y_m^2)$$

$$\int xy \, dx \, dy = \frac{\Delta}{12}(x_i y_i + x_j y_j + x_m y_m)$$

Apéndice 4

ALGUNAS FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN PARA TETRAEDROS (FIGURA 5.1)

Sea un tetraedro definido en el sistema de coordenadas (x, y, z) por cuatro puntos (x_i, y_i, z_i), (x_j, y_j, z_j), (x_m, y_m, z_m), (x_p, y_p, z_p) con el origen de coordenadas en el centro de gravedad, o sea,

$$\frac{x_i + x_j + x_m + x_p}{4} = \frac{y_i + y_j + y_m + y_p}{4} = \frac{z_i + z_j + z_m + z_p}{4} = 0$$

Entonces, integrando sobre el volumen del tetraedro

$$\int dx\ dy\ dz = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_m & y_m & z_m \\ 1 & x_p & y_p & z_p \end{vmatrix} = V = \text{volumen del tetraedro}$$

Si el orden de numeración es el indicado en la Figura 5.1, se tiene también que

$$\int x\ dx\ dy\ dz = \int y\ dx\ dy\ dz = \int z\ dx\ dy\ dz = 0$$

$$\int x^2\ dx\ dy\ dz = \frac{V}{20}(x_i^2 + x_j^2 + x_m^2 + x_p^2)$$

$$\int y^2\ dx\ dy\ dz = \frac{V}{20}(y_i^2 + y_j^2 + y_m^2 + y_p^2)$$

$$\int z^2\ dx\ dy\ dz = \frac{V}{20}(z_i^2 + z_j^2 + z_m^2 + z_p^2)$$

$$\int xy\ dx\ dy\ dz = \frac{V}{20}(x_i y_i + x_j y_j + x_m y_m + x_p y_p)$$

$$\int xz\ dx\ dy\ dz = \frac{V}{20}(x_i z_i + x_j z_j + x_m z_m + x_p z_p)$$

$$\int yz\ dx\ dy\ dz = \frac{V}{20}(y_i z_i + y_j z_j + y_m z_m + y_p z_p)$$

Apéndice 5

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA VECTORIAL

Es necesario un cierto conocimiento y entendimiento de álgebra vectorial básica para afrontar la complejidad de elementos orientados en el espacio, como ocurre en las láminas, etc. Aquí se resumen algunas de las operaciones esenciales.

Los vectores (en un sentido geométrico) pueden definirse por sus componentes sobre los ejes x, y, z.

Por tanto, el vector $\mathbf{V}_{01}$ representado por la Figura A5.1 puede escribirse como

$$\mathbf{V}_{01} = \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}y_1 + \mathbf{k}z_1 \qquad (A5.1)$$

en donde **i**, **j**, **k** son vectores unitarios en las direcciones de los ejes x, y, z.

Alternativamente, el mismo vector podría escribirse como

$$\mathbf{V}_{01} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} \qquad (A5.2)$$

(siendo ahora un "vector" en sentido matricial) donde las componentes se distinguen por su posición en la columna.

Suma y resta. La suma y resta de vectores se definen por la suma y resta de sus componentes. Así, por ejemplo,

$$\mathbf{V}_{02} - \mathbf{V}_{01} = \mathbf{V}_{21} = \mathbf{i}(x_2 - x_1) + \mathbf{j}(y_2 - y_1) + \mathbf{k}(z_2 - z_1) \qquad (A5.3)$$

Mediante las definiciones del álgebra matricial se llega al mismo resultado; así

$$\mathbf{V}_{02} - \mathbf{V}_{01} = \mathbf{V}_{21} = \begin{Bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{Bmatrix} \qquad (A5.4)$$

Longitud de un vector. La longitud del vector $\mathbf{V}_{21}$ viene dada, puramente por geometría, como

$$l_{21} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (A5.5)$$

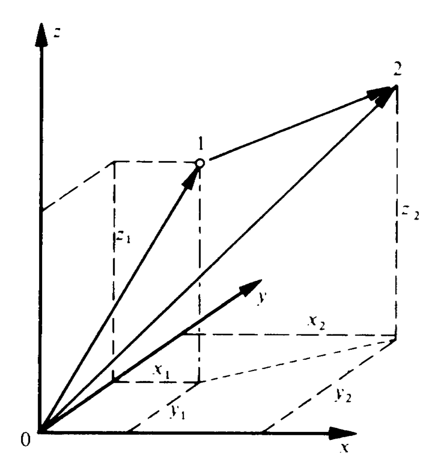


Figura A5.1 Suma de vectores.

o en términos del álgebra matricial

$$l_{12} = \sqrt{\mathbf{V}_{12}^T \mathbf{V}_{12}} \tag{A5.6}$$

Cosenos directores. Los cosenos directores de un vector vienen dados, a partir de la definición de las longitudes de las proyecciones de sus componentes, por

$$\cos \alpha_x = \lambda_{vx} = \frac{x_2 - x_1}{l_{12}}, \text{ etc.} \tag{A5.7}$$

donde α_x es el ángulo formado por el vector y el eje x.

Producto escalar. El producto escalar de dos vectores *se define* como el producto de la longitud de un vector por la proyección del otro vector sobre él. O, si γ es el ángulo formado por dos vectores **A** y **B** y sus longitudes son l_a y l_b, respectivamente,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = l_a l_b \cos \gamma = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \tag{A5.8}$$

Si

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} a_x + \mathbf{j} a_y + \mathbf{k} a_z \tag{A5.9}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{i} b_x + \mathbf{j} b_y + \mathbf{k} b_z \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned} \tag{A5.10}$$

si advertimos que, por la definición anterior,

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\cdot\mathbf{i} &= \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} &= \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0, \text{etc.} \end{aligned}$$

Usando notación matricial

$$\mathbf{A} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \tag{A5.11}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \tag{A5.12}$$

Producto vectorial. Otro producto de dos vectores *se define* como un vector orientado en dirección normal al plano definido por los dos vectores e igual en magnitud al producto de las longitudes de los dos vectores, multiplicado por el seno del ángulo que forman. Además, su sentido sigue la regla de la mano derecha, tal como se muestra en la Figura A5.2, en donde

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C} \tag{A5.13}$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \tag{A5.14}$$

Vale la pena advertir que el módulo (*o longitud*) de **C** es igual al área del paralelogramo que se indica en la Figura A5.2.

Mediante la definición (A5.9) y advirtiendo que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \tag{A5.15}$$

se tiene

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} \tag{A5.16}$$

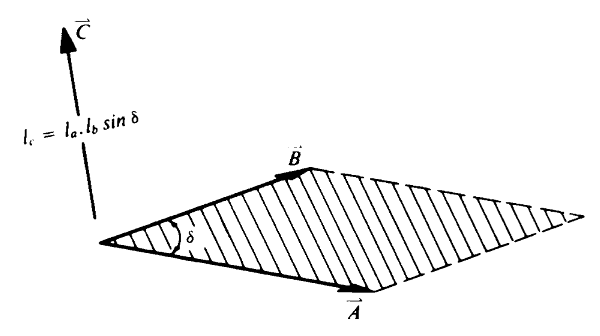


Figura A5.2 Multiplicación de vectores (producto vectorial).

En álgebra matricial esto no se puede expresar de manera sencilla, pero la expresión anterior puede usarse para definir el vector **C**†

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{Bmatrix} \qquad (A5.17)$$

El producto vectorial resulta particularmente útil para resolver el problema de obtener la normal a una superficie.

Elementos de superficie y de volumen. Si ξ y η son coordenadas curvilíneas, se tiene que los vectores contenidos en un plano

$$d\boldsymbol{\xi} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \end{Bmatrix} d\xi \qquad d\boldsymbol{\eta} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{Bmatrix} d\eta \qquad (A5.18)$$

definidos a partir de la relación entre las coordenadas cartesianas y las curvilíneas, son vectores dirigidos según las tangentes a los contornos

† Volviendo a escribir **A** como matriz antisimétrica

$$\hat{\mathbf{A}} \equiv \begin{bmatrix} 0, & -a_z, & a_y \\ a_z, & 0, & -a_x \\ -a_y, & a_x, & 0 \end{bmatrix}$$

el lector podrá comprobar que otra representación del vector producto en forma matricial es (T. Crouch, comunicación privada)

$$\mathbf{C} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{B}$$

ξ =const. y η =const., respectivamente. Como la ***longitud*** del vector que resulta del producto vectorial de $d\boldsymbol{\xi} \times d\boldsymbol{\eta}$ es igual a la superficie del paralelogramo elemental, se puede escribir según la Ec. (A5.17)

$$d(\text{área}) = \det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi\, d\eta \qquad (A5.19)$$

Similarmente, si se tienen tres coordenadas curvilíneas ξ, η, ζ en el espacio cartesiano, el "triple producto escalar" define un volumen unidad

$$d(\text{vol}) = d\boldsymbol{\xi}(d\boldsymbol{\eta} \times d\boldsymbol{\zeta}) = \det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} d\xi\, d\eta\, d\zeta \qquad (A5.20)$$

Esto se deduce simplemente por razonamientos geométricos. El producto entre paréntesis, por definición, es un vector cuya longitud es igual a la superficie del paralelogramo cuyos lados son tangentes a dos de los ejes coordenados. La segunda multiplicación por una longitud y por el coseno del ángulo entre dicha longitud y la normal al paralelogramo establece un elemento diferencial de volumen.

Las ecuaciones anteriores sirven para efectuar el cambio de variables en las integrales de área y de volumen.

Apéndice 6

INTEGRACIÓN POR PARTES EN DOS O TRES DIMENSIONES (TEOREMA DE GREEN)

Consideremos la integración por partes de la expresión bidimensional siguiente

$$\int\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} \, dx \, dy \tag{A6.1}$$

Integrando primero respecto de x y según la conocida regla de la integración por partes

$$\int_{x_L}^{x_R} u \, dv = -\int_{x_L}^{x_R} v \, du + (uv)_{x=x_R} - (uv)_{x=x_L} \tag{A6.2}$$

se tiene, usando los símbolos de la Figura A6.1,

$$\int\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} \, dx \, dy = -\int\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \psi \, dx \, dy + \int_{y=y_B}^{y=y_T} [(\phi\psi)_{x=x_R} - (\phi\psi)_{x=x_L}] \, dy \tag{A6.3}$$

Si ahora se considera una porción del contorno $d\Gamma$ perteneciente al contorno de la derecha, vemos que

$$dy = d\Gamma n_x \tag{A6.4}$$

donde n_x es el coseno director del ángulo que forma la normal y la dirección x. Similarmente, en la parte izquierda del contorno se tiene

$$dy = -d\Gamma n_x \tag{A6.5}$$

El término final de (A6.2) puede, por tanto, expresarse como la integral siguiente sobre el contorno tomada en dirección contraria a las agujas del reloj:

$$\oint_{\Gamma} \phi\psi \, n_x \, d\Gamma \tag{A6.6}$$

Si hay varios contornos cerrados esta integración ha de efectuarse sobre cada contorno. Para todos los casos, la expresión general es

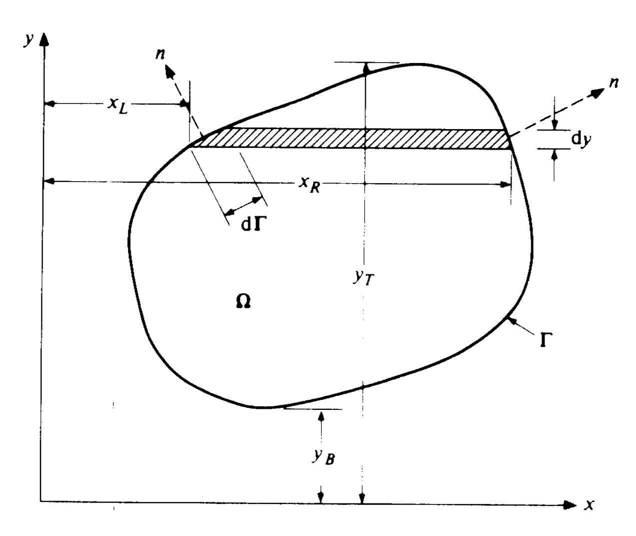


Figura A6.1

$$\int\int_\Omega \phi \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx\, dy \equiv -\int\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x}\psi\, dx\, dy + \oint_\Gamma \phi\psi\, n_x\, d\Gamma \qquad (A6.7)$$

Similarmente, si aparecen derivadas parciales con respecto a y, se puede escribir

$$\int\int_\Omega \phi \frac{\partial \psi}{\partial y}\, dx\, dy \equiv -\int\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial y}\psi\, dx\, dy + \oint_\Gamma \phi\psi\, n_y\, d\Gamma \qquad (A6.8)$$

donde n_y es el coseno del ángulo que forma la normal exterior y el eje y.

Análogamente, en tres dimensiones se puede escribir

$$\int\int\int_\Omega \phi \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = -\int\int\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x}\psi\, dx\, dy\, dz + \oint_\Gamma \phi\psi\, n_x\, d\Gamma \quad (A6.9)$$

donde Γ es el elemento de área y la última integral se efectúa sobre toda la superficie.

Apéndice 7

SOLUCIONES NODALMENTE EXACTAS

Se puede conseguir que la solución por elementos finitos de ecuaciones diferenciales ordinarias sea exacta en los nodos interelementales mediante una apropiada elección de las funciones "de ponderación" usadas en la forma débil. Para ser más específicos, consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = \mathbf{0} \qquad (A7.1)$$

donde $\mathbf{u}$ es un conjunto de variables dependientes que son función de una única variable independiente $\mathbf{x}$, y $\mathbf{f}$ es un vector de funciones prescritas. La forma débil de la ecuación diferencial es

$$\int_L \mathbf{v}^T(\mathbf{A}(\mathbf{u}) + \mathbf{f})\, dx = 0 \qquad (A7.2)$$

La forma débil puede transformarse utilizando integración por partes para eliminar todas las derivadas de $\mathbf{u}$ y reemplazarlas por las de $\mathbf{v}$. El resultado es

$$\int_L (\mathbf{A}^*(\mathbf{v})^T\mathbf{u} + \mathbf{v}^T\mathbf{f})\, dx + \mathbf{B}^*(\mathbf{v})^{\mathbf{T}}\mathbf{B}(\mathbf{u})|_\Gamma = 0 \qquad (A7.3)$$

donde $\mathbf{A}^*(\mathbf{v})$ es la "ecuación diferencial adjunta" y $\mathbf{B}^*(\mathbf{v})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{u})$ son los términos en el contorno, Γ, resultantes de la integración por partes.

Como ejemplo tipo, consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + f = 0 \qquad (A7.4)$$

con la forma débil asociada

$$\int_L v\left(\frac{d^2u}{dx^2} + P\frac{du}{dx} + f\right) dx = 0 \qquad (A7.5)$$

Después de integrar por partes la forma débil queda

$$\int_L \left[\left(\frac{d^2v}{dx^2} - P\frac{dv}{dx}\right)u + vf\right] dx + \left[v\left(\frac{du}{dx} + Pu\right) - \frac{dv}{dx}u\right]\Bigg|_\Gamma \qquad (A7.6)$$

La ecuación diferencial adjunta está dada por

$$a^*(v) = \frac{d^2v}{dx^2} - P\frac{dv}{dx} \qquad (A7.7)$$

y los términos de contorno por

$$\mathbf{B}^*(\mathbf{v}) = \begin{Bmatrix} v \\ -\dfrac{dv}{dx} \end{Bmatrix} \qquad (A7.8)$$

y

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \dfrac{du}{dx} + Pu \\ u \end{Bmatrix} \qquad (A7.9)$$

En el ejemplo anterior se pueden identificar dos casos:

a) P en cero; en cuyo caso la ecuación diferencial adjunta es idéntica a la ecuación original. Este es el caso *autoadjunto*.

b) P no es cero; en cuyo caso la ecuación diferencial adjunta es distinta de la ecuación original. Este es un problema *no autoadjunto*.

La solución por elementos finitos de los dos casos es a menudo bastante distinta. En el primer caso existe un teorema variacional equivalente, mientras que en el caso *b*) no existe tal teorema.†

Si definimos ahora que el dominio de la forma débil sea un único elemento L_e *y exigimos que la ecuación diferencial adjunta se satisfaga en cada elemento*, la forma débil se simplifica notablemente. De hecho, para elementos que tengan sólo nodos en los extremos, la forma débil quedará expresada en función de cantidades *conocidas* en L_e y valores desconocidos de la variable dependiente y de sus derivadas en los contornos interelementales, Γ_e. Si consideramos que todos los valores de la función prescrita están contenidos en f, los términos en $\mathbf{B}(\mathbf{u})$ deben ser continuos para una solución exacta entre elementos adyacentes. Además, la función de peso debe satisfacer condiciones de continuidad impuestas por la forma débil (en el ejemplo tipo v debe ser continua en los contornos entre elementos). Sumando sobre todos los elementos e lleva a que

$$\sum_e \left(\int_{L_e} \mathbf{v}^T \mathbf{f}\, dx + \mathbf{B}^*(\mathbf{v})^T \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{u})|_{\Gamma_e} \right) + \mathbf{B}^*(\mathbf{v})^T \mathbf{Q}|_\Gamma = 0 \qquad (A7.10)$$

que puede usarse para generar los vectores y matrices de los elementos finitos. Después de remarcar los requisitos de continuidad y equilibrio de las magnitudes adecuadas, los términos restantes en los contornos se incluyen en lo anterior definiendo

† A menudo puede introducirse un factor de integración para hacer que la forma débil genere un problema autoadjunto; sin embargo, el problema de aproximación sigue siendo igual. Viz. Sección 9.11.2.

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ u \end{Bmatrix} \qquad (A7.11)$$

El contorno de dominio completo se denota aquí como Γ y el término $\mathbf{Q}$ es el conjunto de *condiciones de contorno* prescritas. El resultado para el problema tipo es

$$\sum_e \left(\int_{L_e} vf\, dx - \frac{dv}{dx} u|_{\Gamma_e} \right) + vQ|_\Gamma = 0 \qquad (A7.12)$$

donde Q es el flujo, igual a $\frac{du}{dx} + Pu$ en el contorno.

En el caso *a)* la solución de la ecuación adjunta es

$$v = Ax + B \qquad (A7.13)$$

que puede escribirse como funciones de forma lineales convencionales en cada elemento. Así, usando funciones de forma lineales en cada elemento como funciones de ponderación, los desplazamientos nodales interelementales u serán exactos (ej., ver Figura 9.4) independientemente de la interpolación usada para u.

En el caso *b)* la solución exacta es

$$v = Ae^{Px} + B \qquad (A7.14)$$

y de nuevo u es exacta en los nodos interelementales.

En ambos casos, las constantes de integración A y B se pueden expresar en función de los *parámetros nodales* en los extremos izquierdo y derecho de cada elemento, v_1 y v_2, respectivamente. Después de sustituir las funciones de formas en la forma débil, en la expresión final aparecerán sólo valores de la variable dependiente $u(x)$ en los nodos. De esta forma se pueden calcular soluciones exactas en los nodos, *sin ninguna aproximación de la variable dependiente*. Si se usa interpolación, el resultado será exacto en los nodos, y aproximado entre los nodos. Después de construir soluciones nodalmente exactas para u, se pueden calcular soluciones exactas para las derivadas a partir de la forma débil en cada elemento.

El proceso anterior fue descrito por primera vez por Tong para ecuaciones diferenciales autoadjuntas a partir de una formulación variacional[1].

Referencias

1. P. TONG, "Exact solutions of certain problems by the finite element method", *AIAA*, **7**, 179-80, 1969.

Apéndice 8

DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES O "AGLUTINAMIENTO"

Algunos de los algoritmos propuestos en este volumen son más eficientes si una de las matrices globales puede ser diagonalizada (o "aglutinada", según muchos ingenieros). Por ejemplo, las soluciones de problemas mixtos, alisado de tensiones o problemas transitorios (que se discutirán en el Vol. 2) son más eficientes si la matriz global que debe invertirse es diagonal [viz. Capítulos 12 y 14, Ecs. (12.67) y (14.71)]. Los ingenieros suelen insistir en bases puramente físicas para el aglutinamiento de matrices; sin embargo, claramente se precisa un procedimiento sistemático y matemáticamente aceptable para realizar tal tarea.

Definamos la matriz a considerar como

$$\mathbf{A} = \int_\Omega \mathbf{N}^T \mathbf{c} \mathbf{N} \, d\Omega \qquad (A8.1)$$

donde **c** es una matriz de pequeñas dimensiones. A menudo **c** es una matriz diagonal (ej., en problemas de masa o mínimos cuadrados **c** es una matriz de identidad escalada). Cuando **A** se calcula exactamente resulta de rango completo y no diagonal -esta es la llamada forma "consistente" de **A**, ya que se calcula consistentemente con los demás términos del modelo de elementos finitos-. La forma diagonalizada se define con respecto a los "nodos" de las funciones de forma, N_i; entonces, la matriz tendrá pequeños bloques diagonales, cada uno con la dimensión de **c**. Sólo cuando **c** sea diagonal la matriz **A** puede ser diagonalizada completamente. Se pueden seguir cuatro procedimientos básicos para construir una forma diagonal.

El primer procedimiento es usar funciones de forma diferentes para aproximar cada término de la discretización por elementos finitos. Para la matriz **A** usamos las funciones de forma $\bar{\mathbf{N}}_i$ para el proceso de aglutinamiento. En la definición de **A** no aparecen derivadas de las funciones de forma. En consecuencia, para este término las funciones de forma pueden ser contínuas a trozos y producir, sin embargo aproximaciones aceptables. Si las funciones de forma usadas para definir **A** son constantes a trozos, de forma que $N_i = 1$ es una cierta parte del elemento que rodea al nodo i y cero en el resto, y si tales partes no se superponen, entonces claramente la matriz de la Ec. (A8.1) es diagonal, ya que

$$\int_\Omega \bar{\mathbf{N}}_i^T \mathbf{c} \bar{\mathbf{N}}_j \, d\Omega = 0 \qquad i \neq j \qquad (A8.2)$$

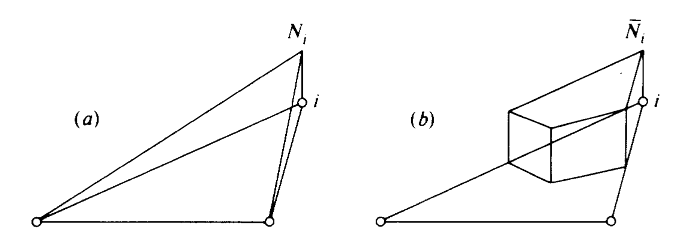


Figura A8.1 Funciones de forma *(a)* lineal y *(b)* constante a trozos para un triángulo.

Tal aproximación con diferentes funciones de forma es permisible, ya que satisface los criterios usuales de integrabilidad y completitud. Las funciones relacionadas sólo deben satisfacer la condición

$$\sum_i \bar{N}_i = 1 \qquad \bar{\mathbf{N}}_i = \bar{N}_i \mathbf{I} \tag{A8.3}$$

En la Figura A8.1 se muestran las funciones N_i y $\bar{N}_i$ para un elemento triangular.

El segundo método para diagonalizar una matriz es advertir que la condición (A8.3) es simplemente un requisito para asegurar la conservación de la magnitud $\mathbf{c}$ en el elemento. En aplicaciones de dinámica de estructuras esto es la conservación de masa a nivel elemental. En consecuencia, se ha observado que cualquier procedimiento de aglutinamiento que conserve la integral de $\mathbf{c}$ sobre el elemento debe llevar a resultados convergentes, aunque la velocidad de convergencia puede ser menor que usando $\mathbf{A}$ consistente. Se han propuesto muchas alternativas basadas en este método. Los procedimientos originales llevaban a cabo la diagonalización basándose sólo en la intuición física. Más tarde se propusieron procedimientos alternativos. Una sugerencia, llamada método "de la suma por filas", es calcular la forma diagonal de la matriz como

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} \sum_k \int_\Omega \mathbf{N}_i^T \mathbf{c} \mathbf{N}_k \, d\Omega & i = j \\ \mathbf{0} & i \neq j \end{cases} \tag{A8.4}$$

Este algoritmo es análogo a reemplazar las N_i por la condición (A8.3), que de hecho hace la diagonal igual a la suma de todos los términos de la fila. Tal algoritmo sólo tiene sentido cuando los grados de libertad del problema tienen todos el mismo sentido físico. Una alternativa consiste en escalar los términos diagonales de la matriz consistente para satisfacer el requisito de conservación. En este caso la matriz diagonal se calcula como

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} a \int_\Omega N_i^T \mathbf{c} \mathbf{N}_i \, d\Omega & i = j \\ \mathbf{0} & i \neq j \end{cases} \tag{A8.5}$$

donde a se calcula para que

$$\sum_i \mathbf{A}_{ii} = \int_\Omega \mathbf{c} \, d\Omega \tag{A8.6}$$

El tercer procedimiento usa la integración numérica para diagonalizar, aparentemente sin introducir funciones de forma adicionales. Si se usa integración numérica para evaluar la matriz $\mathbf{A}$ de la Ec. (A8.1) se puede escribir un típico término como una suma (ver Capítulo 8):

$$\mathbf{A}_{ij} = \int \mathbf{N}_i^T \mathbf{c} \mathbf{N}_j \, d\Omega = \sum_q \mathbf{W}_q (\mathbf{N}_i^T \mathbf{c} \mathbf{N}_j)_q J_q \tag{A8.7}$$

donde q se refiere al punto de muestreo en el que se evalúa el integrando, J es el jacobiano de la transformación y $\mathbf{W}_q$ es el peso de la cuadratura.

Si los puntos de muestreo para la integración numérica están situados en los nodos, entonces, dado que todas las funciones N_i menos uno son cero en cualquier nodo,

$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{0} \qquad i \neq j \tag{A8.8}$$

y la matriz resulta diagonal.

Se pueden calcular los ceros apropiados exigiendo que la cuadratura integre exactamente ciertos polinomios en el sistema natural de coordenadas. En general la cuadratura debería integrar un polinomio completo del orden del polinomio de interpolación. Así, para elementos cuadriláteros de cuatro nodos, se deberían integrar exactamente funciones lineales. Para elementos de ocho y nueve nodos, se deberían evaluar funciones cuadráticas. La integración de términos adicionales puede llevar a matrices diagonales más precisas en sus resultados.

Para elementos de bajo orden se pueden usar argumentos de simetría para aglutinar matrices. Por ejemplo, es obvio que en un sencillo triángulo se puede conseguir poca mejora con respecto al aglutinamiento trivial en el que $\mathbf{c}$ se distribuye en tres partes iguales. Sin embargo, no existe un procedimiento tan evidente para un elemento isoparamétrico bidimensional de ocho nodos. En la Figura A8.2 se muestra el caso de los elementos rectangulares de cuatro, ocho y nueve nodos y el aglutinamiento según (A8.4), (A8.5) y (A8.7). Nótese que cuando se usa (A8.4) algunas de las cantidades aglutinadas son negativas para el elemento de ocho nodos. Esto puede tener efectos adversos en ciertos algoritmos (ej., en esquemas

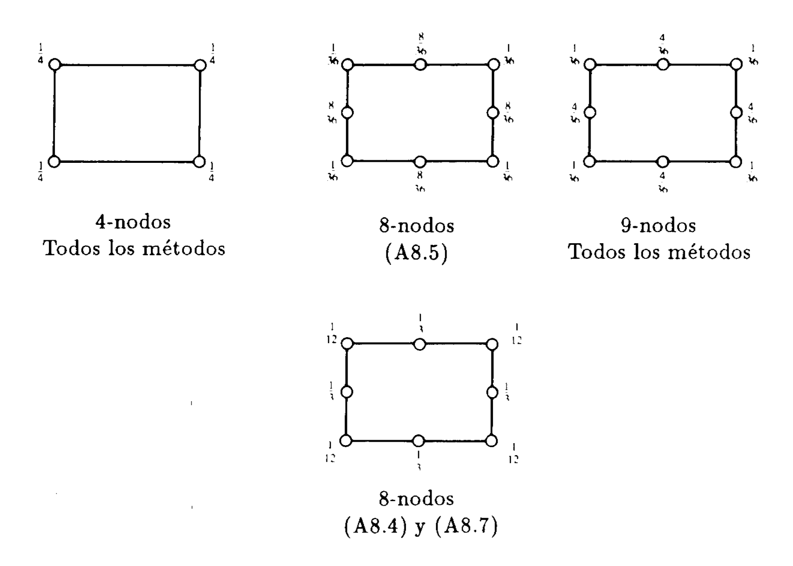


Figura A8.2 Diagonalización de elementos rectangulares según diversos métodos

de avance en el tiempo para integrar problemas transitorios), e impedir su utilización. En la Figura A8.3 se muestran algunas matrices aglutinadas para elementos triangulares calculadas mediante cuadraturas. Se advierte que en el elemento cúbico se producen de nuevo términos negativos, mientras que en el cuadrático aparecen términos nulos. Los términos nulos son más difíciles de tratar, ya que la matriz **A** diagonal resultante es singular, y no puede ser invertida. En la Figura A8.2 se muestra el caso de los elementos rectangulares de cuatro, ocho y nueve nodos y el aglutinamiento según (A8.4), (A8.5) y (A8.7). Nótese que cuando se usa (A8.4) algunas de las cantidades aglutinadas son negativas para el elemento de ocho nodos. Esto puede tener efectos adversos en ciertos algoritmos (ej., en esquemas de avance en el tiempo para integrar problemas transitorios), e impedir su utilización. En la Figura A8.3 se muestran algunas matrices aglutinadas para elementos triangulares calculadas mediante cuadraturas. Se advierte que en el elemento cúbico se producen de nuevo términos negativos, mientras que en el cuadrático aparecen términos nulos. Los términos nulos son más difíciles de tratar, ya que la matriz **A** diagonal resultante es singular, y no puede ser invertida.

Otro aspecto del aglutinamiento es el comportamiento del elemento cuando se distorsiona. Por ejemplo, a medida que un elemento rectangular se distorsiona y se acerca a la forma triangular, sería deseable que los casos límites se comportasen debidamente. En el caso de un elemento rectangular de cuatro nodos, la matriz aglutinada es siempre la misma para todos los

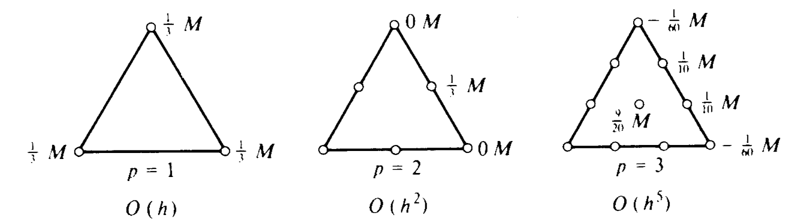


Figura A8.3 Aglutinamiento para triángulos mediante integración numérica

métodos de aglutinamiento. Sin embargo, si se distorsiona el elemento según la transformación definida por un parámetro y que se muestra en la Figura A8.4, entonces los tres procedimientos de aglutinamiento presentados dan respuestas distintas. La transformación jacobiana viene dada por

$$J = ab(1 - f) \tag{A8.9}$$

y **c** es la matriz identidad. La forma (A8.4) da

$$\mathbf{A}_{ii} = \begin{cases} ab(1 - f/3) & \text{arriba} \\ ab(1 + f/3) & \text{abajo} \end{cases} \tag{A8.10}$$

la forma (A8.5) da

$$\mathbf{A}_{ii} = \begin{cases} ab(1 - f/2) & \text{arriba} \\ ab(1 + f/2) & \text{abajo} \end{cases} \tag{A8.11}$$

y la cuadratura (A8.7) da

$$\mathbf{A}_{ii} = \begin{cases} ab(1 - f) & \text{arriba} \\ ab(1 + f) & \text{abajo} \end{cases} \tag{A8.12}$$

El elemento de cuatro nodos tiene la propiedad de poder definir un triángulo al colapsar dos nodos y asignarles el mismo número en la malla. Así, el cuadrilátero se convierte en triángulo cuando el parámetro f es uno. El valor límite para el método (A8.4) da términos aglutinados idénticos para los tres nodos [el método (A8.5) da un valor aglutinado para el nodo colapsado, que es dos tercios de los otros nodos, y (A8.7) da cero para este nodo en el caso límite]. Los métodos (A8.5) y (A8.7) dan casos límites que dependen de cómo se han numerado los nodos para cada elemento triangular. Esta falta de objetividad no es deseable en el software de aplicación; por tanto, para el cuadrilátero de cuatro nodos, el método (A8.4) parece superior al (A8.5) o al (A8.7). Sin embargo, se ha observado que el uso de (A8.4) conduce a elementos negativos en la diagonal para el elemento de 8 nodos. Parece por tanto evidente que no existe un método universal de aglutinar una matriz que pueda aplicarse a todos los elementos.

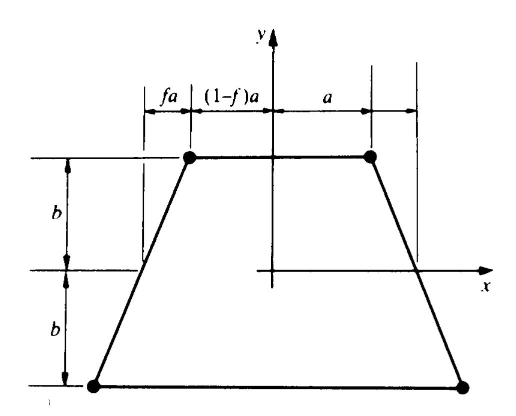


Figura A8.4 Elemento de cuatro nodos distorsionado

Se puede usar un cuarto método, no muy extendido, para deducir una matriz consistente que sea diagonal. Este consiste en hacer una representación mixta del término que conduce a $\mathbf{A}$. Si este término es

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{u}} = \left(\int_\Omega \mathbf{N}^T \mathbf{c} \mathbf{N} \, d\Omega\right) \bar{\mathbf{u}} \tag{A8.13}$$

entonces se puede plantear un problema mixto en el que

$$\mathbf{p} = \mathbf{u} \tag{A8.14}$$

con las aproximaciones

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}} \tag{A8.15}$$

y

$$\mathbf{p} = \mathbf{n}\bar{\mathbf{p}} \tag{A8.16}$$

La forma débil de la anterior es

$$\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{p}} = \left(\int_\Omega \mathbf{N}^T \mathbf{c} \mathbf{n} \, d\Omega\right) \bar{\mathbf{p}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{u}} \tag{A8.17}$$

y

$$\mathbf{H}\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{u}} \tag{A8.18}$$

donde

$$\mathbf{H} = \int_\Omega \mathbf{n}^T \mathbf{c} \mathbf{n} \, d\Omega \tag{A8.19}$$

La eliminación de $\bar{\mathbf{p}}$ lleva a la matriz de la forma mixta

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{H}^{-1} \bar{\mathbf{A}}^T \tag{A8.20}$$

para la cual se pueden buscar ahora formas diagonales.

ÍNDICE DE AUTORES

ÍNDICE TEMÁTICO

El Método de los Elementos Finitos

VOLUMEN 1 - 4ª EDICION

Desde la publicación de la primera edición hace poco más de veinte años, pionera en tratar este tema, la potencia y efectividad del Método de los Elementos Finitos (MEF) han aumentado y se han encontrado muchas aplicaciones nuevas. Esto se ha logrado por una ampliación de la base matemática del método de manera conveniente para ingenieros y científicos. Ahora son posibles procedimientos nuevos y más eficaces, por lo que el MEF tiene una gran aceptación en todos los campos de la ingeniería.

Esta nueva edición está escrita con los mismos objetivos de la original, primero señalar y segundo presentar una base de referencia del «estado de la cuestión», de gran importancia para ingenieros, físicos e investigadores.

Este primer volumen presenta los conceptos básicos de aproximación por elementos finitos en problemas estáticos lineales simples, que constituyen aún la mayor parte de las aplicaciones de los elementos finitos.

Para tener éxito en su aplicación, el MEF depende esencialmente del uso experto de las computadoras, así como de técnicas numéricas y de programación eficientes. El último capítulo de este volumen incluye mucha de la experiencia sobre programación de la Universidad de California en Berkeley y del Instituto de Métodos Numéricos en Ingeniería de la Universidad de Gales en Swansea. Esto se hace describiendo un programa de ordenador bastante completo que el lector puede emplear inmediatamente para analizar de forma numérica cualquier problema de los estudiados en el libro.





McGraw Hill
ISBN: 84-481-0177-4